Mathématiques Élémentaires : Correctif interrogation du 4/10/2021

1 Théorie

Voir cours théorique.

2 Exercices

Exercice 2.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Exprimer, l'aide de quantificateurs, le fait que f n'est pas impair.

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Il suffit de nier cette assertion, ce qui donne :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas impair s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq -f(-x)$ i.e.

$$\exists\ x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -f(-x).$$

Exercice 2.2. Soient A, B et C des ensembles. Montrer que

$$(((A \cup B) = (A \cup C)) \wedge ((A \cap B) = (A \cap C))) \Rightarrow (B = C). \tag{1}$$

Il faut montrer que $B = C$. On procède par double inclusion.

Soit $x \in B$ et montrons que $x \in C$. Puisque $x \in B$, on a $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse $A \cup B = A \cup C$. On en tire que $x \in A \cup C$. Par définition de l'union, il s'ensuit que $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, la première partie de la démonstration est terminée. Supposons, à présent, que $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$ et par hypothèse $A \cap B = A \cap C$; donc $x \in A \cap C$. Par définition de l'intersection, il en découle que $x \in C$. Au total, si $x \in B$ alors $x \in C$.

La seconde inclusion est entièrement symétrique à la première. On en conclut que $B = C$.

Certains ont préféré raisonner au moyen des tables de vérités. Dans ce cas, il faut montrer que la proposition est une tautologie.

Notons $\mathcal{A} := x \in A$, $\mathcal{B} := x \in B$ et $\mathcal{C} := x \in C$. Par définition, il s'ensuit que
- $A \cup B \equiv \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
- $A \cup C \equiv \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$;
- $A \cap B \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$;
- $A \cap C \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$;
- $B = C \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$.

La proposition (1) se réécrit alors

$$(((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \wedge ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))) \Rightarrow (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \tag{2}$$

On obtient la table de vérité suivante :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$
0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \wedge ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))$	$\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	(2)
1	1	1
0	0	1
0	0	1
1	1	1
1	1	1
0	0	1
0	0	1
1	1	1

La proposition (1) est donc d'une tautologie.

Exercice 2.3. Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Déterminer l'injectivité et la surjectivité de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Commençons par étudier f. Pour rappel f est injectif si, et seulement si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. On a

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y.$$

Donc f est injectif. Pour montrer qu'il est surjectif considérons $y \in \mathbb{N}$. On a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}.$$

Or, $\frac{y}{2}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathbb{N}$. En effet, par exemple, pour $y = 1$ on trouve $x = \frac{1}{2}$ qui n'est pas naturel donc 1 n'appartient pas à l'ensemble image de f. Autrement dit, f n'est pas surjectif.

Passons au cas de g. Remarquons que $g(0) = 0 = g(1)$. Or, $0 \neq 1$ donc g n'est pas injectif. Pour la surjectivité, soit $y \in \mathbb{N}$, on a

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{N}$, $y = g(2y)$. Puisque $2y \in \mathbb{N}$, on en déduit que g est surjectif.

Ensuite, $f \circ g$ n'est ni injectif ni surjectif. La première affirmation découle du fait que g n'est pas injectif tandis que la seconde provient du fait que f n'est pas surjectif.

Enfin, on remarque que $g \circ f$ est l'identité. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$, on a

$$g \circ f(x) = \left\lfloor \frac{2x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor = x.$$

La dernière égalité étant justifiée du fait que x est naturel. On a donc que $g \circ f = \mathrm{id}$. Il s'agit d'une bijection, autrement dit, d'une fonction injective et surjective.