Université de Liège 2021-2022

Mathématiques Élémentaires : Correctif examen Juin 2022

Consignes générales :

— Notez votre NOM, prénom et matricule sur chacune de vos feuilles ;

— Répondre aux différentes questions sur feuilles séparées ;

— Justifiez toutes vos réponses.

Théorie

Question 1. Donner les définitions suivantes.

1. Si $R : A \to B$ et $S : B \to C$ sont des relations, définir la relation composée $S \circ R$.
2. Définir ce qu'est un anneau *intègre* (uniquement l'intégrité, pas la définition d'anneau).

Question 2. Répondre par vrai ou faux et justifier.

1. $\arccos(\cos(5\pi/4)) = 5\pi/4$
2. L'ensemble des entiers impairs est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Question 3. Énoncer et démontrer le théorème de Cantor (concernant la cardinalité d'un ensemble de suites).

Exercices

Question 4. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ suivant

$$P(z) = z^2 - z + i + 1.$$

Déterminer toutes les racines de P.

Solution.

Trouver les racines de P consiste à déterminer l'ensemble de $z \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = 0$. Puisqu'il s'agit d'une équation complexe du second degré, on commence naturellement par en déterminer le discriminant. On trouve

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (i + 1) = -3 - 4i.$$

Il reste à déterminer les racines carrées de Δ. Autrement dit, on cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Puisque $\delta \in \mathbb{C}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\delta = x + iy$. Il faut donc résoudre

$$\delta^2 = (x + iy)^2 = \Delta.$$

On trouve successivement

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = -3 - 4i &\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = -3 - 4i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4 = -3x^2 \\ xy = -2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

La seconde équation du système permet d'affirmer que x et y sont de signes opposés. Il reste à résoudre la première équation du système en posant $X = x^2$. Une autre possibilité est d'utiliser l'équation supplémentaire $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 = 5.$$

On en déduit que les racines carrées de Δ sont $-1 + 2i$ et $1 - 2i$. On en conclut que les racines de P sont les complexes $1 - i$ et i.

Question 5.

1. Soit β un naturel plus grand ou égal à 2. Démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ et une unique suite de coefficients $d_0, \ldots, d_m \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$, avec $d_m \geq 1$, tels que
$$n = \sum_{k=0}^{m} d_k \beta^k.$$
2. La liste des éléments $d_m, \ldots, d_0$ du point précédent s'appelle la *représentation* de n dans la base β. On note $(d_m \ldots d_0)_\beta$ cette représentation. Fournir la représentation de 29 (ici écrit en base 10) en base 2.

Solution.

1. On montre d'abord l'existence par récurrence sur n. Le résultat est trivialement vrai pour $n \in \{1, \ldots, \beta - 1\}$ en prenant $m = 0$ et $d_0 = n$.
Supposons maintenant $n \geq \beta$ et supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq n' < n$. Par division Euclidienne de n par β, on trouve
$$n = n'\beta + r,$$
où n', r sont des entiers tels que $1 \leq n' < n$ et $0 \leq r < \beta$. Par hypothèse de récurrence, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ et $d'_0, d'_1, \ldots, d'_m \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$ tels que $d_m \geq 1$ et
$$n' = \sum_{k=0}^{m} d'_k \beta^k.$$
On en déduit que
$$n = \sum_{k=0}^{m+1} d_k \beta^k,$$
avec $d_0 = r$ et pour tout $1 \leq k \leq m + 1$, $d_k = d'_{k-1}$.
On conclut par récurrence (forte) que l'existence d'une telle représentation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.
Montrons à présent l'unicité de la représentation. Supposons avoir l'égalité
$$\sum_{k=0}^{m} d_k \beta^k = \sum_{k=0}^{m'} d'_k \beta^k,$$
où $m, m' \in \mathbb{N}_0$ et $d_0, \ldots, d_m, d'_0, \ldots, d'_{m'} \in \{0, \ldots, \beta - 1\}$. On suppose sans perte de généralité que $m \geq m'$ et on pose $d'_k = 0$ pour tout $k \in \{m' + 1, \ldots, m\}$. On procède par l'absurde en supposant que les deux représentation ne sont pas égales. Alors il existe un plus grand $K \leq m$ tel que $d_K \neq d'_K$. On obtient alors l'égalité
$$(d_K - d'_K)\beta^K = \sum_{k=0}^{K-1} (d'_k - d_k)\beta^k,$$

ce qui mène à une contradiction car $|d_k - d'_K|\beta^K \geq \beta^K$ et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{K-1}(d'_k - d_k)\beta^k\right| &\leq \sum_{k=0}^{K-1}|d'_k - d_k|\,\beta^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{K-1}(\beta-1)\beta^k = \beta^K - 1.\end{aligned}$$

2. On remarque que

$$29 = 2\cdot 14+1 = 2\cdot(2\cdot 7)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 3+1))+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2+1))+1))+1 = 2^4+2^3+2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0.$$

D'où

$$(29)_{10} = (11101)_2.$$

Question 6. Soient X et I des ensembles non-vides. Soit $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille de relations d'équivalences sur X.

1. Montrer que $\cap_{i\in I}\mathcal{R}_i$ est une relation d'équivalence sur X ;
2. Qu'en est-il pour la relation $\cup_{i\in I}\mathcal{R}_i$? Justifier.

Solution.

1. Notons $\mathcal{R}$ la relation $\cap_{i\in I}\mathcal{R}_i$. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, il faut montrer que $\mathcal{R}$ est réflexif, symétrique et transitif. S'il satisfait ces trois conditions la conclusion s'ensuivra aussitôt.
   — *Reflexivité :* Soit $x \in X$, a-t-on $x\mathcal{R}x$? Il est clair que pour tout $i \in I$, on a $x\mathcal{R}_ix$ puisque quel que soit $i \in I$, $\mathcal{R}_i$ est une relation d'équivalence par hypothèse. En particulier, c'est une relation réflexive. Donc $x\mathcal{R}x$.
   — *Symétrie :* Soient $x, y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$. A-t-on $y\mathcal{R}x$? Par hypothèse, pour tout $i \in I$, on a $y\mathcal{R}_ix$ puisque quel que soit $i \in I$, $\mathcal{R}_i$ est une relation d'équivalence et donc une relation symétrique en particulier. D'où $y\mathcal{R}x$.
   — *Transitivité :* Soient $x, y, z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. A-t-on $y\mathcal{R}z$? À nouveau par hypothèse on sait que pour tout $i \in I$, $\mathcal{R}_i$ est une relation d'équivalence. En particulier c'est donc une relation transitive. Il s'ensuit donc que, pour tout $i \in I$, $x\mathcal{R}_iy$ et $y\mathcal{R}_iz$ implique $x\mathcal{R}_iz$. Autrement dit, $x\mathcal{R}z$.
2. La relation $\cup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ n'est pas une relation d'équivalence. En effet, celle-ci n'est pas transitive. Voici un contre-exemple. On considère $I = \{1, 2\}$ et $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ des relations définies par

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

   et

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$$

   On vérifie directement que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des relations d'équivalences. Ensuite, on a

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$$

Or, $(1,2) \in \mathcal{R}_1$ et $(2,3) \in \mathcal{R}_2$ mais $(1,3) \notin \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. La transitivité n'étant pas préservée pour l'union de relations d'équivalences, ce n'est pas une relation d'équivalence.

Question 7. 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante

$$103x = 612 \bmod 676.$$

2. Déterminer 41^{183} dans $\mathbb{Z}_7$.

Solution.

1. On cherche l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{103x = 612 \bmod 676}_{(\star)}\}.$$

Afin de résoudre cette équation, il faut déterminer si 103 est inversible dans $\mathbb{Z}_{676}$. On détermine donc $\text{pgcd}(103, 676)$ en appliquant l'algorithme d'Euclide. On trouve successivement

$$\begin{aligned} 676 &= 6 \cdot 103 + 58 \\ 103 &= 1 \cdot 58 + 45 \\ 58 &= 1 \cdot 45 + 13 \\ 45 &= 3 \cdot 13 + 6 \\ 13 &= 2 \cdot 6 + 1 \\ 6 &= 6 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul de cet algorithme est $\text{pgcd}(103, 676)$. Puisqu'il vaut 1, on en déduit que 103 est inversible dans $\mathbb{Z}_{676}$. Déterminons cet inverse au moyen de l'algorithme de Bezout. On obtient

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 13 - 2 \cdot 6 \\ &= 1 \cdot 13 - 2 \cdot (45 - 3 \cdot 13) \\ &= 7 \cdot 13 - 2 \cdot 45 \\ &= 7 \cdot (58 - 45) - 2 \cdot 45 \\ &= 7 \cdot 58 - 9 \cdot 45 \\ &= 7 \cdot 58 - 9 \cdot (103 - 58) \\ &= 16 \cdot 58 - 9 \cdot 103 \\ &= 16 \cdot (676 - 6 \cdot 103) - 9 \cdot 103 \\ &= 16 \cdot 676 - 105 \cdot 103. \end{aligned}$$

Donc

$$1 = 16 \cdot 676 - 105 \cdot 103.$$

On en conclut que dans $\mathbb{Z}_{676}$ l'inverse de 103 est -105.
On résout alors l'équation $(\star)$ comme suit.

$$\begin{aligned} &103x = 612 \bmod 676 \\ &\Leftrightarrow -105 \cdot 103x = -105 \cdot 612 \bmod 676 \\ &\Leftrightarrow x = -64260 \bmod 676 \end{aligned}$$

Or, $-64260 = -95 \cdot 676 - 40$. D'où

$$103x = 612 \bmod 676 \Leftrightarrow \text{x} = -40 \bmod 676.$$

On en conclut que l'ensemble des solutions de $(\star)$ dans $\mathbb{Z}$ est l'ensemble

$$\{-40 + 676 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Par définition des puissances, on a

$$[41^{183}]_7 = [\underbrace{41 \ldots 41}_{183 \text{ fois}}]_7.$$

De plus, en arithmétique modulaire, on sait que la classe d'un produit est le produit des classes. Il s'ensuit que

$$[\underbrace{41\ldots41}_{183\text{ fois}}]_7 = \underbrace{[41]_7\ldots[41]_7}_{183\text{ fois}}.$$

Ensuite, puisque $[41]_7 = [-1]_7$, on conclut que

$$[41^{183}]_7 = \underbrace{[-1]_7\ldots[-1]_7}_{183\text{ fois}} = [(-1)^{183}]_7 = [-1]_7.$$