Cardinalité des ensembles infinis

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$$

est dénombrable en donnant une bijection de A dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 3. Donner une partition de $\mathbb{N}$ en:

1. deux ensembles infinis dénombrables,
2. trois ensembles infinis dénombrables,
3. un nombre infinis d'ensembles infinis dénombrables.

Exercice 4. Déterminer si l'ensemble

$$A = \{(n, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : r = \pi n\}$$

est dénombrable.

Exercice 5. Montrer que $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont équipotents.

Exercice 6. Montrer que les ensembles suivants sont équipotents :

1. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$,
2. $]0, 1[$ et $]a, b[$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
3. $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Montrer que les ensembles suivants sont équipotents :

1. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}_0$,
2. $[0, 1]$, $]0, 1]$, $[0, 1[$ et $]0, 1[$.

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles équipotents. Montrer que $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ sont aussi équipotents.

Exercice 9 (Théorème de Cantor-Bernstein)**.** Soient E et F deux ensembles quelconques. Montrer que si il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ et une injection $g : F \longrightarrow E$, alors il existe une bijection de E dans F (et donc une de F dans E).

Exercice 10. Soit A et B deux ensembles tels que $A \subseteq B$ et tels qu'il existe une injection $g : B \hookrightarrow A$. Montrer que $\#A = \#B$.

Exercice 11. Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'il existe des ensembles infinis avec un sous-ensemble propre de même cardinal.

Exercice 12. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice 13. Soit A un ensemble non-dénombrable quelconque. Déterminer si $\#A = \#\mathbb{R}$.

Exercice 14. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels est non-dénombrable.