Arithmétique

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un multiple de 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est un multiple de 120.

Exercice 2. Calculer le pgcd des nombres suivants:

1. 126,230,
2. 390, 720, 450.

Exercice 3. Calculer par l'algorithme d'Euclide : pgcd(18480,9828). En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 4. Notons $a = 1111111111$ et $b = 123456789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b,
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$,
3. Déterminer deux entiers u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 5. Résoudre, si possible, dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$37x + 27y = 1.$$

Exercice 6. Montrer que si les entiers a et b sont premiers entre eux, il en est de même pour $a + b$ et ab.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.

Exercice 8. Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que p s'écrit $4k + 1$ ou $4k + 3$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Posons

$$X = \{p \text{ un nombre premier} \mid \exists k \in \mathbb{N} : p = 4k + 3\}.$$

1. Montrer que X est non-vide,

2. Montrer que le produit de deux éléments de la forme $4k+3$ est encore de cette forme,

3. Montrer que si $p_1, ..., p_n \in X$ alors

$$a = 4p_1 \dots p_n - 1$$

admet un diviseur dans X.

4. En déduire que X est infini.