Mathématiques élémentaires
Fascicule d'exercices

Chapitre 1

Logique et ensembles

1.1 Logique

Définition 1. On dit que “P ou exclusif Q” est vrai si P ou Q est vrai mais pas simultanément P et Q.

Exercice 1. Écrire la table de vérité du "ou exclusif".

Exercice 2. Ecrire la table de vérité des assertions suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données.

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ si P est faux
2. $P \wedge (P \vee Q)$ si Q est vrai
3. $P \vee (Q \Rightarrow R)$ si Q est faux

Définition 2. Une assertion $P(x, y, z, ...)$ est dite *réfutable* s'il existe une configuration de ses variables propositionnelles $x, y, z, ...$ dans laquelle P est fausse. Elle est dite *satisfaisable* s'il existe une configuration de ses variables propositionnelles $x, y, z, ...$ dans laquelle P est vraie.

Exercice 3. Évaluer les assertions suivantes en utilisant les tables de vérités. Indiquez alors lesquelles parmi ces assertions sont satisfaisables, réfutables, lesquelles sont des tautologies, des contradictions.

1. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$
2. $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \neg Q)$

Exercice 4. À l'aide de la méthode des tables de vérité, montrer que les assertions suivantes sont des tautologies.

1. $P \vee \neg P$ (Principe du tiers exclu)
2. $\neg(P \wedge \neg P)$ (principe de non-contradiction)
3. $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$ (commutativité de $\vee$)
4. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ (le vrai est impliqué par tout)
5. $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (le faux implique tout)
6. $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (preuve par l'absurde)
7. $((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow P$ (preuve par l'absurde)
8. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (transitivité de $\Rightarrow$)

Exercice 5. Démontrer que les assertions suivantes sont logiquement équivalentes.

1. $P \Rightarrow Q$
2. $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
3. $\neg P \vee Q$

Écrire ces assertions lorsque P est “J'ai la grippe” et Q est “J'ai de la fièvre”.

Exercice 6. Démontrer que si P, Q et R sont des assertions, alors on a

$$(P \Rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R).$$

Peut-on échanger les rôles de Q et R ?

Exercice 7. Soient P, Q, R des propositions logiques. Dans chacun des cas suivants, les assertions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ? Si non, donner la négation de chacune.

1. $(P \wedge Q)$; $(\neg P \wedge \neg Q)$
2. $(P \Rightarrow Q)$; $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$
3. $(P \Rightarrow (Q \wedge R))$; $(P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

Exercice 8. Quels sont les liens logiques entre les propositions suivantes ?

A "Tous les hommes sont mortels."

B "Tous les hommes sont immortels."

C "Aucun homme n'est mortel."

D "Aucun homme n'est immortel."

E "Il existe des hommes immortels."

F "Il existe des hommes mortels."

Exercice 9. En interprétant P par "je pars", Q par "tu restes" et R par "il n'y a personne", traduisez les assertions suivantes en phrases du langage naturel :

1. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$
2. $(\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg R$

Exercice 10. Soient P la proposition "les chiens aboient" et Q la proposition "la caravane passe". Traduisez les phrases suivantes en langage propositionnel.

1. Si les chiens aboient, alors la caravane passe.
2. Les chiens n'aboient pas.
3. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
4. Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 11. Considérons la phrase "Il a dit qu'il viendrait s'il ne pleut pas.". Peut-on affirmer la phrase "Il pleut, donc il ne viendra pas." ? Justifier.

Exercice 12. Déterminer la proposition équivalente à celle-ci : "Si un entier naturel est divisible par 10, alors il est divisible par 5 et il est divisible par 2."

1. "Si un entier naturel n'est pas divisible par 5 ou n'est pas divisible par 2, alors il n'est pas divisible par 10."
2. "Si un entier naturel n'est pas divisible par 5 et n'est pas divisible par 2, alors il n'est pas divisible par 10."
3. "Si un entier naturel est divisible par 5 ou n'est pas divisible par 2, alors il n'est pas divisible par 10."
4. "Si un entier naturel n'est pas divisible par 5 ou est divisible par 2, alors il n'est pas divisible par 10."

Exercice 13. Considérons les deux phrases
— "S'il ne lui dit pas, elle ne le découvrira pas."
— "Si elle ne demande pas, il ne lui dira pas."
Peut-on affirmer la phrase "Elle l'a découvert, donc elle a demandé." ? Justifier.

Exercice 14. Nier les propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rouges sont rapides.
2. Il existe un mouton écossais dont au moins un coté est noir.
3. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
4. Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.
5. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que pour tout entier z, la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.

Exercice 15. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 16. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants.

1. f est bornée.
2. f est paire.
3. f ne s'annule jamais.
4. f est périodique.
5. f est croissante.
6. f est strictement décroissante.
7. f n'est pas la fonction nulle.
8. f est injective.
9. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
10. f est inférieure à g.
11. f n'est pas inférieure à g.

Exercice 17. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier les énoncés suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$.
2. f est croissante.
3. f est strictement croissante et positive.
4. Il existe $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) \geq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 18. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Que signifie en mots les assertions suivantes ? Ne pas donner une traduction littérale des assertions, mais les traduire par une phrase simple compréhensible immédiatement.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{N} : q_n = l.$
2. $\exists l \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l.$
3. $\forall l \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : q_n = l.$
4. $\forall q \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |q_n| < q.$

Exercice 19. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 9 \ldots\ldots x = 3$
2. $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{z} = z \ldots\ldots z \in \mathbb{R}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \ldots\ldots e^{2ix} = 1$

Exercice 20. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Donner leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1 \wedge x > 0\}.$$

On note $d(P_1, P_2)$ la distance euclidienne entre deux points P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^2$. Évaluer les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont fausses, donner leur négation.

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists P_1 \in F_1, \exists P_2 \in F_2 : d(P_1, P_2) < \varepsilon$
2. $\exists P_1 \in F_1 : \exists P_2 \in F_2 : \forall \varepsilon > 0, d(P_1, P_2) < \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon > 0 : \forall P_1 \in F_1, \forall P_2 \in F_2, d(P_1, P_2) < \varepsilon$
4. $\forall P_1 \in F_1, \forall P_2 \in F_2, \exists \varepsilon > 0 : d(P_1, P_2) < \varepsilon$

1.2 Théorie des ensembles

Exercice 22. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. $A = \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \not\subset B$.
4. $A \subsetneq B$.

Définition 3. Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, i.e.,

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}.$$

Définition 4. Soient A et B deux ensembles. On note $A\Delta B$ la *différence symétrique* de A et B, i.e.,

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exercice 23. Soit E un ensemble. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$.
5. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $((A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)) \Rightarrow B = C$.
6. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta A)\Delta B$.
7. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $A = B \Leftrightarrow (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A) = \emptyset$.

Définition 5. Soit E un ensemble. Des parties A_j ($j \in J$) de E forment une *partition* de E si elles sont disjointes 2 à 2 et si leur union est égale à E.

Exercice 24. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E. On note $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Démontrer que les ensembles

$$B_1 = A_1 \qquad \text{et} \qquad B_j = A_j \cap \complement_A \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right), j = 2, \ldots, n,$$

forment une partition de A.

Définition 6. Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien* de E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(e, f) : e \in E \wedge f \in F\}.$$

Exercice 25. Démontrer que si A, B, C sont des ensembles non-vides tels que $A \subset C$, alors les ensembles

$$(C \setminus A) \times C, \quad A \times (C \setminus B) \quad \text{et} \quad A \times (C \cap B)$$

forment une partition de $C \times C$.

1.3 Relations, applications, injections, surjections

Exercice 26. Soit $\mathcal{R}$ la relation
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x| \geq y\}.$$
Représenter graphiquement (dans $\mathbb{R}^2$) la relation $\mathcal{R}$. Quels sont les éléments $(x, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, \frac{1}{2}) \in \mathcal{R}$?

Exercice 27. Considérons les relations
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}Z^2 : \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}Z\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}Z^2 : x \geq y\}.$$
Représenter dans $\mathbb{Z}Z^2$ les relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.

Exercice 28. Parmi les relations suivantes et leur relation réciproque respective, lesquelles sont de type fonctionel ? de type application ?

1. $\mathcal{R} \subset \{1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{N}$, où
   $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 5)\}$
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\mid x = y^2\}$
3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^3\}$
4. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y + 1\}$
5. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} \mid \cos(x) = y - 1\}$

Exercice 29. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $\forall A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(F \setminus A) = \complement_E f^{-1}(A)$

Exercice 30. Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z}Z \to \mathbb{Z}Z, n \mapsto 2n$
2. $f : \mathbb{Z}Z \to \mathbb{Z}Z, n \mapsto -n$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
3. Démontrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}_0 : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{Z}Z \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q} : (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 34. Soient A, B, C et D quatre ensembles et soient des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Démontrer les assertions suivantes.

1. Si $g \circ f$ est injectif, alors f est injectif.
2. Si $g \circ f$ est surjectif, alors g est surjectif.
3. les applications $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si les applications f, g et h le sont.

Exercice 35. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.

A-t-on l'égalité en général ?

Exercice 36. Soient E et f deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Démontrer que f est injective si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 37. Soient X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une application.

1. Démontrer que f est injective si et seulement si pour tout ensemble Z et pour toutes applications $g : Z \to X$ et $h : Z \to X$, on a
$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour tout ensemble Z et pour toutes applications $g : Y \to Z$ et $h : Y \to Z$, on a
$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Exercice 38. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application. Démontrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(\complement_E(A)) = \complement_F(f(A))$.

Exercice 39. Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. On définit l'application
$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B).$$

1. Démontrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une bijection. Donner dans ce cas l'application inverse. de f

Exercice 40. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. on définit les applications
$$\begin{aligned} g &: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), \quad g(A) = f(A) \\ h &: \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), \quad h(A) = f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Démontrer que

1. g est injective si et seulement si f est injective.
2. h est injective si et seulement si f est surjective.

Chapitre 2

Nombres comlexes

Exercice 41. Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = i$, $z_4 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_5 = 2 - 3i$.

(a) Donner les parties réelles et imaginaires de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_4}$ et z_3^2 ;

(b) Donner la forme trigonométrique de z_4, en déduire celle de z_4^6 ;

(c) Donner la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$, en déduire $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$;

(d) Donner la forme trigonométrique de z_5 ;

(e) Donner la forme trigonométrique de $\frac{z_1^{20}}{z_2^{11}}$;

(f) Calculer $|z_1|$, $|z_1 z_2|$, $|\frac{z_1}{z_4}|$ et $|z_3^3|$.

Exercice 42. On dit qu'un entier n satisfait la propriété P s'il exsite deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$. Démontrer que si m et n satisfont la propriété P, alors mn aussi. Donner une décomposition de mn en somme de carrés en fonction de celles de m et de n.

Exercice 43. Représenter graphiquement le lieu des point $z \in \mathbb{C}$ tels que

(a) $z + \bar{z} = 1$

(b) $z - \bar{z} = i$

(c) $|z + i - 2| \geq 2$

(d) $|z - 1| = |z + 1|$

(e) $z + \bar{z} = |z|^2$

(f) $z + \bar{z} = |z|$

Exercice 44. Soient a, b, c des nombres comlexes.

(a) Démontrer que $|1 + a| + |a + b| + |b| \geq 1$;

(b) Démontrer que si a et b sont de module 1 et tels que $ab \neq -1$, alors $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$;

(c) Démontrer que si $a\bar{b} \neq 1$ et si $z = \frac{a-b}{1-a\bar{b}}$, alors

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1;$$

(d) Démontrer que si a et b sont non nuls, alors $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$;

(e) Démontrer que si a, b et c sont de module 1, alors $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

(f) Démontrer que si a, b et c sont de module 1 et si $ac \neq -1$, alors $\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur ;

(g) Démontrer que $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$;

(h) Démontrer que $|1 - a\bar{b}|^2 - |a - b|^2 = (1 - |ab|)^2 - (|a| - |b|)^2$;

(i) Démontrer que si a et b sont distincts et de module 1, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{b-a}$ est un imaginaire pur.

Exercice 45. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.

(a) $z^3 = -2$;

(b) $z^2 = 5 + 12i$;

(c) $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$;

(d) $z^4 + z^2 - 12 = 0$;

(e) $z^3 = \bar{z}$;
(f) $(1+i)z^2 + (1-5i)z - (4-2i) = 0$;
(g) $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$;
(h) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$;
(i) $(z^2+3z-2)^2 + (2z^2-3z+2)^2 = 0$;
(j) $(1+i)z^2 - 2i\sqrt{2}z + (1-i) = 0$.

Exercice 46. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) $(z-i)^n = 1$;
(b) $(z-1)^n = (z+1)^n$;
(c) $(z-i)^n = z^n$;
(d) $(z^2+1)^n = (z-i)^{2n}$.

Exercice 47. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.
(a) $z^3 + 3z^2 + (9-4i)z + 15 = 0$, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure ;
(b) $z^3 + z^2 + (-1+3i)z + 44 + 12i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle ;
(c) $z^4 + (7-i)z^3 + (12-15i)z^2 + (4+4i)z + 16 + 192i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle et une solution imaginaire pure de même module.

Exercice 48. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et ω une racine cubique de l'unité différente de 1. Démontrer que

$$|a+b|^2 + |a+\omega b|^2 + |a+\omega^2 b|^2 = 3(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 49. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$;
(b) $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$;
(c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx)$;
(d) $\sum_{k=0}^n \cos^k(x)\cos(kx)$;
(e) $\sum_{k=0}^n \cos^k(x)\sin(kx)$;
(f) $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 50. Soit $x \in \mathbb{R}$.
(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right);$$

(b) Démontrer que si $z \in \mathbb{C}_0$ est tel que

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos(x),$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(nx).$$

Exercice 51. Déterminer le lieu des points $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que
(a) α, α^2 et $\frac{1}{\alpha}$ sont alignés ;
(b) 1, α et $1+\alpha^2$ sont alignés ;
(c) α, α^2 et α^3 forment un triangle équilatéral ;
(d) α et ses racines cubiques forment un parallélogramme
(e) $\frac{i}{2}$ et les solutions de l'équation $z^2 + (1-i)z + \alpha = 0$ forment un triangle rectangle en $\frac{i}{2}$.

Exercice 52. Soit $D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}\right\}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z(1-z)$. Démontrer que D est stable par f, i.e., $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$.

Exercice 53. Soit z un complexe de module 1 tel que $|1 + z + z^2 + \cdots + z^9| = 1$. Démontrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.

Exercice 54. Soient $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de 1. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$|a| + |b| \le \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|.$$

Chapitre 3

Nombres naturels

Exercice 55 (Identités combinatoires)**.**

(a) Calculer $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots C_n^n$

(b) Montrer que $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$ et calculer la valeur commune de ces deux sommes.

(c) Calculer les sommes $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots$ et $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \cdots$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

(e) Montrer que $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

(f) Calculer les sommes $0C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots nC_n^n$ et $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \cdots \frac{C_n^n}{n+1}$.

(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$.

Exercice 56. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$?

Exercice 57. Soit E un ensemble à n éléments.

(a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.

(b) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

(c) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$.

(d) Calculer $\sum\limits_{A \subset E} \mathrm{Card}(A)$, $\sum\limits_{\substack{A \subset E \\ B \subset E}} \mathrm{Card}(A \cap B)$ et $\sum\limits_{\substack{A \subset E \\ B \subset E}} \mathrm{Card}(A \cup B)$

Exercice 58. Pour $n, p \in \mathbb{N}_0$, $S(n, p)$ est le nombre de surjections de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\{1, \ldots, p\}$.

(a) Quelques cas particuliers :

1. Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$.
2. Calculer $S(n, n)$.
3. Calculer $S(n, 1)$.
4. Calculer $S(n, 2)$.

(b) Calculer $S(n + 1, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Démontrer que, pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a la relation

$$S(n, p) = p(S(n - 1, p) + S(n - 1, p - 1)).$$

Exercice 59. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Démontrer que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut 2^{n-1}.

Exercice 60. Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

Exercice 61. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E.

(a) Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.

(b) Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.

(c) On suppose n quelconque, et on écrit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k.$$

(d) En déduire $D_3,\ D_4,\ D_5$.

Exercice 62. Soient $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On note F_n^p l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs. On note K_n^p le cardinal de F_n^p.

(a) Déterminer K_n^p quand $p > (n+1)/2$.

(b) Soit $\{a_1, \ldots, a_p\}$ une partie de F_n^p écrite de sorte que $a_i < a_{i+1}$. On pose $b_k = a_k + 1 - k$. Prouver que $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_p \leq n + 1 - p$.

(c) Soit G_n^p l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \ldots, n+1-p\}$. Construire une bijection de F_n^p sur G_n^p.

(d) En déduire la valeur de K_n^p.

Exercice 63. Calculer $(1+i)^{4n}$. En déduire les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p C_{4n}^{2p} \text{ et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p C_{4n}^{2p+1}.$$

Exercice 64. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

Exercice 65. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 66. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ n'est pas un entier.

(Indication : montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ est le quotient d'un entier impair par un entier pair).

Exercice 67. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(a) $4^n + 2$ est divisible par 3 ;

(b) $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 68. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice 69. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 70. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + 3^n$.

Chapitre 4

Relations d'ordre et d'équivalence

Exercice 71. Parmi les relations binaires sur E suivantes, indiquer lesquelles sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

1. $E = \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \equiv x = -y$
2. $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \equiv \cos^2 x + \sin^2 y = 1$
3. $E = \mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \equiv \exists p, q \geq 1 : y = px^q$

Exercice 72. Soit $\mathcal{R}$ une relation symétrique et transitive sur un ensemble E. Que penser du raisonnement suivant ?

$$\begin{gathered} x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \ \textit{car } \mathcal{R} \textit{ est symétrique} \\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x \ \textit{car } \mathcal{R} \textit{ est transitive} \\ \textit{Donc } \mathcal{R} \textit{ est réflexive.} \end{gathered}$$

Exercice 73. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}_0$ par

$$x\mathcal{R}y \equiv \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = kx.$$

1. S'agit-il d'une relation d'ordre ? Si oui, l'ordre est-il total ?
2. L'ensemble $\mathbb{N}_0$ admet-il un minimum ? un maximum ?
3. L'ensemble $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ admet-il un minimum ? un maximum ?

Qu'en est-il si la relation $\mathcal{R}$ est définie par

$$x\mathcal{R}y \equiv \exists n \in \mathbb{N}_0 : y = x^n$$

et si A est l'ensemble $\{2, 4, 8\}$?

Exercice 74. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$X\mathcal{R}Y \equiv (X = Y) \vee (\forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y),$$

où $\leq$ est l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$.
S'agit-il d'une relation d'ordre ?

Exercice 75. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \equiv (x \leq x') \wedge (y \leq y'),$$

où $\leq$ est l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

1. S'agit-il d'une relation d'ordre ? Si oui, l'ordre est-il total ?
2. Soit (a, b) un élément de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des minorants de $\{(a, b)\}$.
3. Soient (a, b) et (c, d) deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Que valent $\sup\{(a, b), (c, d)\}$ et $\inf\{(a, b), (c, d)\}$?

Qu'en est-il si $\mathcal{R}$ est défini par

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \equiv (x < x') \vee ((x = x') \wedge (y \leq y')?$$

Exercice 76. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux ordres totaux sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{T}$ par

$$x\mathcal{T}y \equiv (x\mathcal{R}y) \wedge (x\mathcal{S}y).$$

La relation $\mathcal{T}$ est-elle un ordre ? Si oui, l'ordre est-il total ?
Qu'en est-il si pour la relation $\mathcal{U}$ définie par

$$x\mathcal{U}y \equiv (x\mathcal{R}y) \vee (x\mathcal{S}y)?$$

Définition 7. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux partitions d'un ensemble E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est *plus fine* que $(B_j)_{j\in J}$ si pour tout $j \in J$, il existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ et $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in I$ tels que

$$B_j = \bigcup_{k=1}^{\ell} A_{i_k}.$$

Exercice 77. Soit E un ensemble. Démontrer que la relation

$$\mathcal{A}\mathcal{R}\mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \text{ est plus fine que } \mathcal{A}$$

est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des partitions de E.
L'ensemble $\mathbb{P}(E)$ est-il bien ordonné par cet ordre ? Admet-il un minimum ? Un maximum ?

Exercice 78. Soient E et F deux ensembles ordonnés par $\mathcal{R}_E$ et $\mathcal{R}_F$ respectivement, l'ordre $\mathcal{R}_E$ étant total. Soit $f : E \to F$ une application croissante.
Démontrer que f est injective si et seulement si elle est strictement croissante.
Démontrer que le résultat est faux si l'ordre sur E n'est pas total.
Indication pour la deuxième partie : considérer l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinalité 2, muni de l'inclusion.

Exercice 79. Soient E et F deux ensembles ordonnés. Soit A une partie non vide de E et soit $f : E \to F$ une application croissante.
Démontrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.

Exercice 80. Soit E un ensemble. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$A\mathcal{R}B \equiv (A = B) \vee (A = \complement_E(B)).$$

Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Exercice 81. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$x\mathcal{R}y \equiv x + y \text{ est pair.}$$

1. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Quelles sont les classes d'équivalence pour cette relation ?

Exercice 82. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \equiv x^2 - y^2 = x - y$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
Décrire la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{R}$. Combien y a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 83. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \equiv xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
Préciser, pour x fixé, le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence de x.
Indication pour la cardinalité : étudier l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

Exercice 84. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$x\mathcal{R}y \equiv f(x) = f(y).$$

1. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence
2. Pour tout $x \in E$, décrire la classe d'équivalence de x.
3. Pourquoi l'application $g : E/_{\mathcal{R}} \to F$ définie par, pour tout $x \in E$, $g([x]_{\mathcal{R}}) = f(x)$ est-elle bien définie ? Démontrer qu'elle est injective.

Exercice 85. Soient E un ensemble et soit A une partie non vide de E. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$X\mathcal{R}Y \equiv X \cap A = Y \cap A.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Expliciter les classes d'équivalence de $\emptyset$, E, A et $\complement_E(A)$.
3. Expliciter une bijection entre $E/_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 86. Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive sur E.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{S}$ définie sur E par
$$x\mathcal{S}y \equiv x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$$
est une relation d'équivalence.
2. Soit Q l'ensemble quotient $E/_{\mathcal{S}}$. On définit la relation $\mathcal{T}$ sur Q par
$$A\mathcal{T}B \equiv \exists a \in A, \exists b \in B : a\mathcal{R}b.$$
Démontrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre sur Q.

Exercice 87. Soit $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}[x]$ par

$$p\mathcal{R}q \equiv p(0) = q(0).$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer une bijection de $\mathbb{R}[x]/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 88. Soit $E = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par

$$f\mathcal{R}g \equiv \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ est fini.}$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $f_0(n) = 0$ pour tout n. Démontrer qu'il existe une application injective $F : \mathbb{Z} \to [f_0]_{\mathcal{R}}$.

Exercice 89. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par

$$f\mathcal{R}g \equiv \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, (|x| > NN \Rightarrow f(x) = g(x)).$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 90. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ par

$$A\mathcal{R}B \equiv \exists f : A \to B \text{ injective.}$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Chapitre 5

Arithmétique modulaire

Exercice 91. Soit $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8, x \mapsto [3]_8 x$. Compléter le tableau suivant.

x	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$f(x)$								

Exercice 92. Soit $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8, x \mapsto x^{55}$. Compléter le tableau suivant.

x	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$f(x)$								

Exercice 93. En se servant de la table de multiplication dans $\mathbb{Z}_6$:

1. Quelles sont les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}_6$?
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}_6$:
   (a) $[2]_6 x = [3]_6$
   (b) $[4]_6 x = [4]_6$
   (c) $[3]_6 x = [0]_6$

Exercice 94. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $35x = 7 \mod 4$

b) $22x = 33 \mod 5$

c) $10x = 6 \mod 14$

d) $24x = 14 \mod 15$

Exercice 95. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 vaut 0, 1 ou 4. En déduire qu'aucun entier congru à 7 modulo 8 n'est somme de trois carrés d'entiers.

Exercice 96. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Exercice 97. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si $a^2 + b^2$ est divisible par 7, alors a et b sont divisibles par 7.

Exercice 98. Soit S l'ensemble $\{0, \ldots, 25\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 25\}$. On fixe a, b deux éléments de S et on considère la fonction $C_{a,b} : S \to S$ définie par

$$C_{a,b}(x) = ax + b \mod 26.$$

1. Montrer que $C_{a,b}$ est une bijection si et seulement si a est premier avec 26.
2. Trouver $a', b' \in S$ tels que $C_{a',b'}$ soit l'application réciproque de $C_{5,18}$.

Exercice 99. Démontrer que pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 100. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors il en est de même pour $a + b$ et ab.

Exercice 101. Pour quelles valeurs de n l'entier $4^n + 2^n + 1$ est-il divisible par 7 ?

Exercice 102. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si $a^2 = b^2 + c^2$, alors

(1) au moins un de b et c est multiple de 3 ;

(2) au moins un de a, b et c est multiple de 5.

Exercice 103. Soit $n = \sum_{k=0}^{\ell} c_k 10^k$, où $c_0, c_1, \ldots, c_\ell \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Montrer que

(1) n est divisible par 7 si et seulement si $\sum_{k=0}^{\ell-1} c_{k+1} 10^k - 2c_0$ l'est ;

(2) n est divisible par 13 si et seulement si $\sum_{k=0}^{\ell-1} c_{k+1} 10^k + 4c_0$ l'est ;