Université de Liège Année académique 2023 – 2024

Algèbre linéaire

Bloc 1 – Sciences Mathématiques

Bloc 2 – Sciences Physiques

Solutions et indications pour les exercices en classe

Titulaire : Michel Rigo
m.rigo@uliege.be

Assistant : Antoine Renard
antoine.renard@uliege.be

1 Polynômes de $\mathbb{C}[z]$

Exercice 1.10. $3+3(z-2)+6(z-2)^2+2(z-2)^3$.

Exercice 1.11. Les zéros du polynôme sont -3, 2, i et $-i$.

Exercice 1.12. Les zéros du polynôme sont $3i$, $-2-i$ et $-1-2i$.

Exercice 1.13. Par la règle de Descartes, tous les zéros du polynôme doivent être de module inférieur ou égal à $1+\frac{5}{5}=2$.

Exercice 1.14. (a) Les triplets de paramètres de la forme $(a,5,a-2)$, avec $a\in\mathbb{C}$, conviennent.

(b) Seules les valeurs $(a,b,c)=(16,17,6)$ conviennent.

Exercice 1.15. $z^4+5z^3+12z^2+19z-7=(z^2+2z+7)(z^2+3z-1)$.

Exercice 1.16. Un pgcd de $z^6-7z^4+8z^3-7z+7$ et $3z^5-7z^3+3z^2-7$ est donné par $D=1+z^3$. On a alors

$$(z^6-7z^4+8z^3-7z+7)\left(\frac{1}{49}(-126z-189)\right)+(3z^5-7z^3+3z^2-7)\left(\frac{1}{49}(42z^2+63z-196)\right)=1+z^3.$$

Exercice 1.17. (a) Vrai : Théorème fondamental de l'Algèbre.

(b) Faux : $P(z)=(z+1)^2$ par exemple.

(c) Vrai : $j=\deg P$ convient toujours.

(d) Vrai : Vient de la propriété que si z_0 est zéro de P, alors $\overline{z_0}$ aussi.

Exercice 1.18. *Suggestion :* Utiliser la définition d'un zéro triple. Ce raisonnement est il valable pour tout $n\in\mathbb{N}_0\setminus\{1\}$?

Exercice 1.19. *Suggestion :* Pour $n\geq 2$, quel est le degré maximum du reste de la division ? Évaluer alors l'égalité résultant de la division en des valeurs adéquates pour trouver les coefficients du reste.
Solution : Soit R le reste de la division. Pour $n=1$,

$$R(z)=\sin(a)-z\cos(a).$$

Pour $n\geq 2$,

$$R(z)=\sin\left(n\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right)z+\cos\left(n\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Exercice 1.20. *Suggestion :* Pour la valeur du produit, utiliser les formules de Viète.
Solution : On a

$$z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\quad\text{et}\quad\prod_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=(-1)^{n+1}.$$

2 Fractions rationnelles

Exercice 2.5. (a) Vrai : Les pôles sont définis pour les fractions rationnelles, il faut donc simplifier la seconde fraction pour obtenir un numérateur et un dénominateur premiers entre eux. Après réduction, on garde les mêmes pôles, à savoir -1 et 2.

(b) Vrai : Les pôles sont -1 et 2, et sont donc tous réels.

(c) Faux : Les pôles sont $\pm 2i$ et 2. Sur $\mathbb{R}$, le dénominateur contient donc un facteur irréductible de degré 2, ce qui ne sera pas le cas sur $\mathbb{C}$.

(d) Faux : Si z_0 est un pôle d'ordre α de R, alors nécessairement c'est un pôle d'ordre $\alpha+1$ de $D_z R$.

Exercice 2.6. $R_1(z) = \dfrac{1}{2(z+1)} + \dfrac{1}{2(z-1)} - \dfrac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,1\}$ (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).

$$R_2(z) = 1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{z}{z^2+1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\} \text{ (sur } \mathbb{R}).$$

$$R_2(z) = 1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\} \text{ (sur } \mathbb{C}).$$

$$R_3(z) = -\frac{10}{z-1} - \frac{5}{(z-1)^2} + \frac{11}{z-2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \text{ (sur } \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{C}).$$

Exercice 2.7. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\sqrt{3}\}$,

$$\begin{aligned}\frac{4z^3+13z^2+14z+13}{z^4+2z^3+4z^2+6z+3} &= \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{3z+4}{z^2+3} && \text{(sur } \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(3+\frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)}{z+i\sqrt{3}} + \frac{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)}{z-i\sqrt{3}} && \text{(sur } \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Exercice 2.8. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1, \pm i\}$,

$$\begin{aligned}\frac{-x^3+7x^2-5x+7}{(x-1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x^2+1} && \text{(sur } \mathbb{R}) \\ &= -\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{i}{x+i} - \frac{i}{x-i} && \text{(sur } \mathbb{C})\end{aligned}$$

Exercice 2.9 (Examen Mai 2022)**.** Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}$,

$$\frac{3x^6-12x^5-5x^4+38x^3+15x^2-2x+27}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9} = 3x^2+1+\frac{6x^3-10x^2-14x+18}{(x-3)^2(x+1)^2},$$

avec

$$\frac{6x^3-10x^2-14x+18}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2},$$

où $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sont des constantes telles que

$$\begin{cases} A+C=6 \\ -A+B-5C+D=-10 \\ -5A+2B+3C-6D=-14 \\ -3A+B+9C+9D=18 \end{cases}.$$

Exercice 2.10. _Suggestion :_ Pour la première, écrire $z = (z-1)+1$ et utiliser le binôme de Newton. Pour la seconde, chercher les pôles du dénominateur, et évaluer en des valeurs adéquates pour trouver les constantes.

Solution : On a

$$R_{m,n}(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{(z-1)^{n-k}} & \text{si } m \leq n, \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \binom{m}{k}(z-1)^{k-n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{m}{k}}{(z-1)^{n-k}} & \text{si } m > n, \end{cases} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z-e^{\frac{2ik\pi}{n}}},$$

3 Opérateurs linéaires I

Exercice 3.9. (a) Non : $X = (0, 1)$ et $Y = (1, 2)$ sont tels que $T_1(X + Y) \neq T_1X + T_1Y$.

(b) Non : KO à cause de la dernière composante, $T_1X + T_1Y$ sera toujours de la forme $(\cdot, \cdot, 2)$, alors que $T_1(X + Y)$ sera de la forme $(\cdot, \cdot, 1)$

(c) Oui : démonstration classique.

Exercice 3.10. (a) Découle des propriétés des opérations sur les matrices.

(b) Des bases de $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$ sont données respectivement par

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3.11. On a

$$\operatorname{Ker} T = \rangle -3z^2 + 1 \langle \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} T = \rangle z^3, z, 1 \langle.$$

Exercice 3.12. Non. Si une telle application existait, le théorème de la dimension engendrerait une contradiction quant au rang de la matrice qui représente l'application dans une base donnée.

Exercice 3.13. (a) Faux : T est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Or, on peut très bien avoir $\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim(\operatorname{Im} T)$ sans pour autant avoir $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ (un exemple est donné dans l'Exercice 3.10).

(b) Vrai : Découle du théorème de la dimension pour l'application $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3 : x \mapsto Ax$.

Exercice 3.14. La matrice M est triangulaire supérieure, et ses éléments diagonaux sont nuls. On en tire que

$$Tu_1 = 0, \quad Tu_2 = a_1u_1, \quad Tu_3 = b_1u_1 + b_2u_2 \quad \text{et} \quad Tu_4 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3,$$

pour des scalaires $a_1, b_1, b_2, c_1c_2, c_3$. De plus, $M^4 = 0$, d'où $T^4x = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3.15. La matrice est diagonale par blocs, *i.e.* de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & *\\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

où les éléments $*$ sont potentiellement non nuls.

Exercice 3.16. (a) L'application T est bien définie, dans le sens où le reste de la division est un polynôme de degré strictement plus petit que $\deg B = n + 1$. Pour la linéarité, elle résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et de l'unicité du quotient et du reste obtenu lors de la division.

(b) Pour montrer que A et B sont premiers entre eux, utiliser le théorème de Bézout. Pour la réciproque, il suffit de montrer que T est injectif.

Exercice 3.17. (a) $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(b) $M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4)$.

(c) Des bases de $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$ sont données respectivement par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a donc bien $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = 1 + 3 = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T)$.

(d) Non, T n'est pas injectif puisque $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$.

Exercice 3.18. (a) $T(u_1 + u_2 + u_3) = 2u_1 + 6u_2 + 2u_3$.

(b) $M_U(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $M_W(T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(d) Une base de $\operatorname{Ker} T$ est donnée par

$$\{u_1 - u_2 + u_3\}.$$

En particulier, $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$.

Exercice 3.19. (a) Le vecteur $u_3 = (1, 0, 0)^\sim$ convient. Pour cette base, on a alors

$$\Phi_U(Tu_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_U(Tu_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$E = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\langle.$$

Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension 2.

(c) Il suffit de prendre un vecteur $w \in \mathbb{R}^3 \setminus E$. Par exemple, $w = (1, 1, 1)^\sim$ convient.

(d) On a

$$M_W(T) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Une base de $\operatorname{Ker} T$ est alors donnée par

$$\{3u_1 - u_2 - u_3\}.$$

4 Opérateurs linéaires II

Exercice 4.6. Condition nécessaire : démonstration classique de l'inclusion d'un ensemble dans un autre.
Condition suffisante : montrer que $(g \circ f)(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 4.7. Il suffit de trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^3_3$ telle que $A^2 = A \Leftrightarrow A^2 - A = 0$. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Il suffit alors de considérer $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$.

Exercice 4.8. Il suffit de trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^4_4$ de rang 2. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Il suffit alors de considérer $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$.

Exercice 4.9. Commencer par montrer que $\mathrm{Ker}\,(T)$ et $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{id})$ sont en somme directe. Montrer ensuite que $\mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{id})$ le sont également.
<u>*Suggestion :*</u> Pour la seconde partie, penser que si

$$x \in (\mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{id})) \cap \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{id}),$$

d'une part $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}\,(T)$ et $z \in \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{id})$, et d'autre part $Tx + x = 0$. Il reste alors à jongler avec ces différentes égalités, ainsi qu'avec les hypothèses sur y et z pour conclure que $x = 0$.

Exercice 4.10. <u>*Suggestion :*</u> La première égalité peut se montrer par double inclusion. Pour $\subseteq$, penser à décomposer x comme $\frac{x}{2} + \frac{x}{2}$.
Pour la seconde égalité, il faut montrer d'une part que $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{id})) \cap \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{id}) = \{0\}$, et d'autre part l'égalité des ensembles. Pour cette seconde étape, raisonner en termes de dimensions permet de conclure rapidement.
Enfin, la réciproque peut être démontrée par analyse-synthèse.

Exercice 4.11. (a) Découle de la dépendance linéaire.

(b) Si $y = \alpha x$, trouver une autre relation de la forme $y = \beta x$ et faisant intervenir λ_x et λ_y, puis conclure en comparant α et β.

(c) Procéder par l'absurde : que se passerait-il si $\lambda_x \neq \lambda_y$?
<u>*Suggestion :*</u> Regarder $T(x + y)$ de deux façons différentes, puis conclure par indépendance linéaire de x et y.

(d) Découle des deux points précédents.

5 Diagonalisation I

Exercice 5.7. La matrice est diagonalisable. On a

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(0,4,6,6), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il vient

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n - 4^{n-1} & -4^{n-1} & -4^{n-1} \\ 2^{n-1}\cdot 3^n - 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ -4^{n-1} & 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & -2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} \\ -4^{n-1} & 4^{n-1} & -2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} & 2^{n-1}\cdot 3^n + 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.8. La matrice A n'est pas diagonalisable, mais la matrice B oui. On a

$$S^{-1}BS = \mathrm{diag}(2,2,3,3), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.9.

(a) Vrai : Il suffit de vérifier que, si $a,b,c,d \in \mathbb{C}$,

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc),$$

ce qui correspond bien au résultat annoncé.

(b) Vrai : Si S diagonalise A et B, alors

$$AB = S(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)S^{-1} = S(S^{-1}BS)(S^{-1}AS)S^{-1} = BA,$$

car $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ commutent (puisque ce sont des matrices diagonales).

(c) Vrai : A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre, la dernière équivalence provenant du fait que $\det A$ est égal au produit des valeurs propres de A.

(d) Faux : Contre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dont les valeurs propres sont } 0, 1+i \text{ et } 1-i.$$

(e) Faux : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 5.10. Oui : ses valeurs propres sont $2, 1+i, 1-i, 3-i, 3+i$, car :

1. si z est valeur propre, $\overline{z}$ aussi puisque $A \in \mathbb{R}^5_5$,
2. A possède exactement 5 valeurs propres.

Exercice 5.11. La matrice M est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$. Dans ce cas, on a

$$S^{-1}MS = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.12. (a) On a $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-6)^2(\lambda-9)$. Donc, 6 et 9 sont les valeurs propres de A, de multiplicités algébriques 2 et 1 respectivement.

(b) A est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha = 0$.

(c) Pour $\alpha = 0$, on a

$$S^{-1}MS = \operatorname{diag}(6,6,9), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.13. Un complexe λ est valeur propre de B si et seulement si λ^2 est valeur propre de A. De plus, λ a la même multiplicité géométrique comme valeur propre de B que λ^2 comme valeur propre de A. Enfin, la matrice B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 5.14. (a) M n'a que des valeurs propres simples $\Leftrightarrow \phi \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

(b) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \phi \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

(c) x est vecteur propre pour $\phi = \frac{1}{2}$. Pour y, on tombe sur une contradiction quant à la valeur propre qui lui serait associée.

Exercice 5.15. (a) Il suffit de remarquer que les matrices correspondantes ont le même polynôme caractéristique.

(b) A possède une unique valeur propre $\Leftrightarrow \alpha = 1$. Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable.

(c) A est diagonalisable, et on a

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1,1,3,3), \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *Suggestion :* plusieurs méthodes de résolution sont possibles, il n'est pas nécessaire de réaliser un calcul du type S^{-1}, on peut aussi décomposer le vecteur colonne u dans une base formée de vecteurs propres.

(e) Découle des propriétés du polynôme minimum : ce dernier possède les même zéros que le polynôme caractéristique, et ne possède que des zéros simples si et seulement si A est diagonalisable, ce qui est le cas.

Exercice 5.16. (a) On a $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$. Pour démontrer la relation, il suffit d'utiliser la loi des mineurs de façon adéquate pour calculer $\det(xI_n - A_n)$ et conclure.

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Attention, il y a deux cas de bases à vérifier : P_1 et P_2.

(c) *Suggestion :* Utiliser le point précédent pour déterminer les zéros de P_n.
Solution : Vu le point précédent, on trouve les n zéros de P_n : ce sont les $x_{\alpha_k} = 2\cos\alpha_k$, avec $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, pour tout $k \in \{1 \ldots, n\}$. En particulier, A_n n'a que des valeurs propres simples, et est donc diagonalisable.

6 Diagonalisation II

Exercice 6.6. Vrai : si on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0$ tel que $D(ax^2+bx+c) = \lambda(ax^2+bx+c)$, alors on trouve que nécessairement, $a = b = c = 0$, *i.e.* λ n'est pas valeur propre de de D.

Exercice 6.7. L'ensemble des valeurs propres de S est

$$\left\{ \frac{1}{k} : 1 \leq k \leq n+1 \right\}.$$

Pour $n = 2$, une base de vecteurs propres qui convient est donnée par

$$\left\{1, 1-x, x^2-2x+1\right\}.$$

Exercice 6.8. Les valeurs propres de T sont ± 1. Pour les vecteurs propres, deux cas sont à distinguer :

— Si n est pair, *i.e.* $n = 2p$ pour un $p \in \mathbb{N}$, alors une base de vecteurs propres est donnée par

$$\{\underbrace{x^{2p}+1, x^{2p-1}+x, \ldots, x^{p+1}+x^{p-1}, x^p}_{\text{vecteurs propres de } 1}, \underbrace{x^{2p}-1, x^{2p-1}-x, \ldots, x^{p+1}-x^{p-1}}_{\text{vecteurs propres de } -1}\}.$$

— Si n est impair, *i.e.* $n = 2p+1$ pour un $p \in \mathbb{N}$, alors une base de vecteurs propres est donnée par

$$\{\underbrace{x^{2p+1}+1, x^{2p}+x, \ldots, x^{p+1}+x^{p}}_{\text{vecteurs propres de } 1}, \underbrace{x^{2p+1}-1, x^{2p}-x, \ldots, x^{p+1}-x^{p}}_{\text{vecteurs propres de } -1}\}.$$

Exercice 6.9. (a) $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(b) $M_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B}' = (e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_3)$.

(c) Les valeurs propres de T sont
- — 3, de multiplicité géométrique 1,
- — 2, de multiplicité géométrique 2,
- — 1, de multiplicité géométrique 1.

(d) On a $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^4$.

(e) Oui, vu le point précédent.

Exercice 6.10. (a) $M_U(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Les valeurs propres de T sont
- — 3, de multiplicité algébrique 2 et géométrique 1,
- — $1+\sqrt{2}$, de multiplicité algébrique et géométrique 1,
- — $1-\sqrt{2}$, de multiplicité algébrique et géométrique 1.

(c) $M_U(T^2 - \mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $T^2 - \mathrm{id}$ sont $8, 2+2\sqrt{2}$ et $2-2\sqrt{2}$.

(d) $M_V(T) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) On a $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et $\operatorname{Im} T = E$, donc T est une bijection.

7 Diagonalisation et polynômes d'endomorphisme

Exercice 7.8. Les polynômes sont respectivement

$$\mathcal{M}_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_B(\lambda) = (\lambda + 1)^2.$$

Exercice 7.9. (a) Les valeurs propres sont $-1, -2$ et 1. Les espaces propres associés sont

$$E_{-1}(T) = \Big\rangle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big\langle, \quad E_{-2}(T) = \Big\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Big\langle \quad \text{et} \quad E_1(T) = \Big\rangle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\langle.$$

(b) Oui.

(c) $\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1)$.

Exercice 7.10. Les polynômes caractéristique et minimum de D sont respectivement

$$\chi_D(\lambda) = (-\lambda)^{n+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_D(\lambda) = \lambda^{n+1}.$$

Exercice 7.11. *Suggestion :* Supposer que B est diagonalisable, et regarder les conditions que doit nécessairement satisfaire A. Trouver à quoi ressemble la matrice $P(B)$, où P est le polynôme minimum de B, et en tirer des infos sur $P(A)$. Utiliser le théorème de Bézout pour conclure.
Solution : Seule la matrice nulle convient.

Exercice 7.12. (a) Découle des propriétés des opérations sur les polynômes et de la linéarité de la dérivée. L'application est également bien définie ($T(P) \in \mathbb{C}_{\leq n}[z], \forall P \in \mathbb{C}_{\leq n}[z]$).

(b) $M = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B} = (1, z, z^2)$. Donc, $\chi_T(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2)$.

(c) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C}_0 \setminus \{1\}$.

(d) $\mathcal{M}_M(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2) & \text{si } \alpha \notin \{-1, 1\} \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) & \text{si } \alpha = -1 \\ (\lambda - 1)^3 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

(e) On a $\mathrm{rg} T = 3$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\, T \cap \mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, et conclure par égalité des dimensions.

(f) Les polynômes caractéristique et minimum de T sont respectivement

$$\chi_T(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(1 - \lambda)(\alpha - \lambda)(\alpha^2 - \lambda)$$
$$\text{et} \quad \mathcal{M}_T(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha^2) & \text{si } \alpha \notin \{-1, 1\} \\ \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) & \text{si } \alpha = -1 \\ \lambda(\lambda - 1)^3 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Exercice 7.13. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\, T \cap \mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, le théorème de la dimension permet alors de conclure. Pour la première partie, déduire la forme de P en fonction des conditions imposées par l'énoncé, et regarder ce que vaut $P(T)(x)$ pour un x "bien choisi".

Exercice 7.14. La condition nécessaire est évidente. Pour la réciproque, partir du fait que M^p annule un polynôme P ne possédant que des racines simples, et factoriser $P(z^p)$. L'égalité des noyaux s'obtient par l'intermédiaire de l'égalité des noyaux des matrices diagonales correspondantes.