

# THÉORIE DES GRAPHES

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2006–2007



## PLAN DU COURS

- ▶ Premier contact avec les graphes
  - ▶ Définitions, exemples, connexité, ...
  - ▶ Tri topologique, chemin (le plus court), parcours, ...
  - ▶ Graphes eulériens et hamiltoniens.
- ▶ Théorie algébrique des graphes
- ▶ Planarité : formule d'Euler, ...
- ▶ Coloriage : nombre chromatique, thm. des 5 couleurs, thm. de Ramsey
- ▶ Flots et réseaux de transport
- ▶ Implémentation en C

Pas (ou peu) de complexité, NP-complétude etc... (3e bac.)



## QUELQUES REPÈRES

- ▶ sept ponts de Königsberg étudié (Euler, 1736)
- ▶ “*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*” (König, 1936)
- ▶ milieu du vingtième siècle  
N. Biggs, C. Berge, W.T. Tutte, ...



### DÉFINITION

Soient  $V$  un ensemble (fini ou infini) et  $E$  une partie de  $V \times V$  (i.e., une **relation** sur  $V$ ).

Le **graphe**  $G = (V, E)$  est la donnée du couple  $(V, E)$ .

Les éléments de  $V$  sont appelés les **sommets** ou **noeuds** de  $G$ .

Les éléments de  $E$  sont appelés les **arcs** ou **arêtes** de  $G$ .

Si  $V$  est fini, on parlera de **graphe fini** (en particulier,  $E$  est alors fini et contient au plus  $(\#V)^2$  arcs).



ordre au sein des couples appartenant à  $E$   
 couple  $(x, y) \neq$  paire  $\{x, y\}$

### GRAPHE ORIENTÉ OU GRAPHE DIRIGÉ

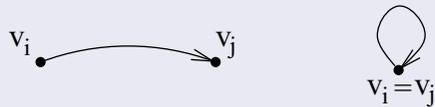
Soient  $V = \{v_i \mid i \in I\}$  et  $a = (v_i, v_j), i, j \in I$

l'**origine**  $v_i$  et la **destination**  $v_j$  de l'arc  $a$ .

$v_i$  et  $v_j$  sont les **extrémités** de l'arc  $a$  —  $a$  **relie**  $v_i$  à  $v_j$ .

Si  $b = (v_i, v_i)$  :  $b$  est une **boucle**.

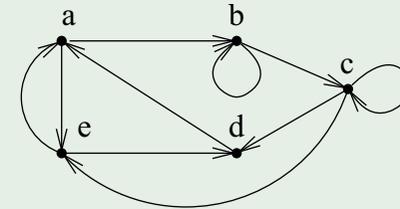
Deux arcs sont **adjacents** si au moins une extrémité en commun.



### UN GRAPHE ORIENTÉ

Soit le graphe  $G = (V, E)$  où  $V = \{a, b, c, d, e\}$  et

$$E = \{(a, b), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}.$$



### DÉFINITION

Soit  $a = (v_i, v_j) \in E$ .



$a$  est un **arc sortant** de  $v_i$  ou **arc incident** à  $v_i$  **vers l'extérieur**

$a$  est un arc **entrant** dans  $v_j$  ou **arc incident** à  $v_j$  **vers l'intérieur**

ensemble des arcs sortant de  $v_i = \omega^+(v_i)$

ensemble des arcs entrant dans  $v_j = \omega^-(v_j)$

ensemble des arcs incidents =  $\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$

**demi-degré sortant** (resp. **demi-degré entrant**) d'un sommet  $v$

$$d^+(v) = \#(\omega^+(v)) \quad d^-(v) = \#(\omega^-(v)).$$

### HANDSHAKING FORMULA

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

## DÉFINITION (SUITE...)

**degré** de  $v$  :  $\deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$

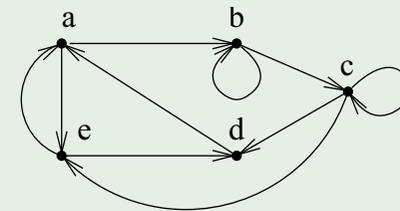
ensemble des **successeurs** de  $v$  :  $\text{succ}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$   
sommets  $s_i$  tels que  $(v, s_i) \in \omega^+(v)$ , i.e.,  $(v, s_i) \in E$ .

ensemble des **prédécesseurs** de  $v$  :  $\text{pred}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$   
sommets  $s_i$  tels que  $(s_i, v) \in \omega^-(v)$ , i.e.,  $(s_i, v) \in E$ .

ensemble des voisins de  $v$  :  $\nu(v) = \text{pred}(v) \cup \text{succ}(v)$

Si  $u$  appartient à  $\nu(v)$ ,  $u$  et  $v$  sont des sommets **voisins**

## EXEMPLE (SUITE...)



$$\omega^+(a) = \{(a, b), (a, e)\}, \quad \omega^-(d) = \{(c, d), (e, d)\},$$

$$\text{succ}(a) = \{b, e\}, \quad \text{succ}(b) = \{b, c\}, \quad \text{pred}(d) = \{c, e\},$$

$$\nu(a) = \{b, d, e\},$$

les arcs  $(e, a)$  et  $(d, a)$  sont adjacents,

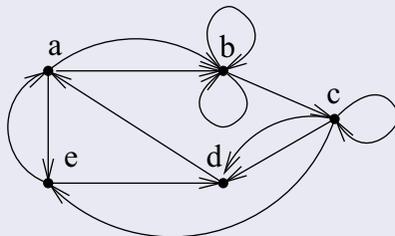
$$d^+(c) = 3$$

## DÉFINITION NAÏVE

Un multi-ensemble :  $\{1, 1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$  et  $\{1, 2, 2, 3\}$   
 $\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3\}$

## DÉFINITION

Un **multi-graphe**  $G = (V, E)$  est un graphe pour lequel l'ensemble  $E$  des arcs est un multi-ensemble.



Un multi-graphe  $G = (V, E)$  est **fini** si  $V$  et  $E$  sont finis  
( $V$  fini n'implique pas  $E$  fini.)

## DÉFINITION (SUITE...)

Soit  $p \geq 1$ . Un  **$p$ -graphe** est un multi-graphe  $G = (V, E)$  pour lequel tout arc de  $E$  est répété au plus  $p$  fois.

En particulier, un **1-graphe** est un graphe.

## POUR LES MULTI-GRAPHEs

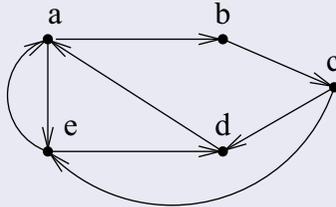
“handshaking formula” OK

on adapte  $\omega^+(v)$ ,  $d^+(v)$ ,  $\text{succ}(v)$  et  $\omega^-(v)$ ,  $d^-(v)$ ,  $\text{pred}(v)$ .

En particulier,  $\omega^+(v)$  et  $\omega^-(v)$  sont en général des multi-ensembles.

## DÉFINITION

Un graphe  $G = (V, E)$  est **simple** (ou **strict**) s'il ne s'agit pas d'un multi-graphe et si  $E$  est irreflexif :  $\forall v \in V, (v, v) \notin E$

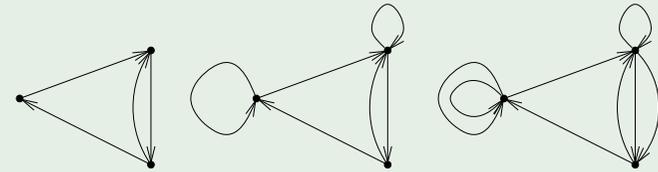


pas d'arête multiple, pas de boucle



## EN RÉSUMÉ

Un graphe (dirigé) simple, un graphe et un multi-graphe



## LE CAS NON ORIENTÉ

### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un graphe (resp. un multi-graphe). Si  $E$  est une relation symétrique sur  $V$ , on dira que  $G$  est un graphe (resp. un multi-graphe) **non dirigé** ou **non orienté**, i.e.,

$$\forall v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

On identifie les arcs  $(v_i, v_j)$  et  $(v_j, v_i)$  avec une unique "arête non orientée" donnée par la paire  $\{v_i, v_j\}$ .



Soient  $G = (V, E)$  multi-graphe non orienté,  $a = \{v_i, v_j\} \in E$ .

$a$  est **incident** à  $v_i$  et  $v_j$ .

**degré** de  $v_i$ ,  $\deg(v_i) = \#$  arêtes incidentes à  $v_i$ .

les **boucles** apportent une **double** contribution au degré.

ensemble des arêtes incidentes à  $v_i$  :  $\omega(v_i)$ .

Si  $G$  est simple,  $\deg(v_i) = \#(\omega(v_i))$ .

Notations compatibles avec le cas orienté.

Deux arêtes sont **adjacentes** si au moins une extrémité en commun.

Deux sommets  $v_i, v_j \in V$  sont **adjacents** si l'arête  $\{v_i, v_j\} \in E$ .

On dit aussi qu'ils sont **voisins**

ensemble des voisins de  $v$  :  $\nu(v)$

$p$ -graphe : analogue avec cas cas orienté.



## HANDSHAKING FORMULA (BIS)

Si  $G = (V, E)$  est un multi-graphe non orienté, alors

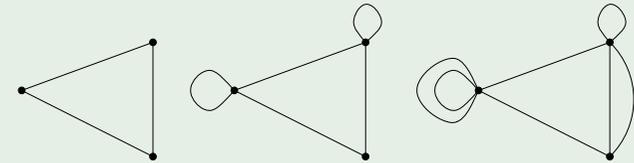
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \#E.$$

On comprend mieux la double contribution des boucles pour le degré d'un sommet. . .



## EN RÉSUMÉ

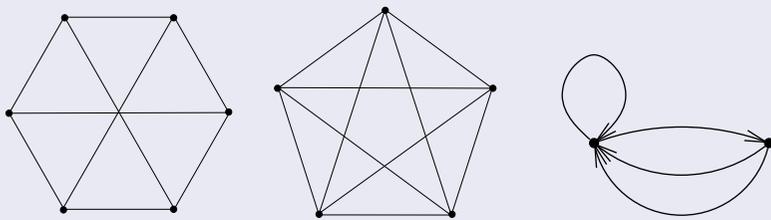
Un graphe (non dirigé) simple, un graphe et un multi-graphe



## DÉFINITION

Soit  $k \geq 1$ . Un multi-graphe orienté (resp. non orienté)  $G = (V, E)$  est  **$k$ -régulier** si

$$\forall v \in V, d^+(v) = k \quad (\text{resp. } \deg(v) = k).$$



## DÉFINITION (SUITE. . .)

Un graphe  $G = (V, E)$  est **complet** si  $E = V \times V$ .

$K_n$  : graphe simple non orienté complet à  $n$  sommets.

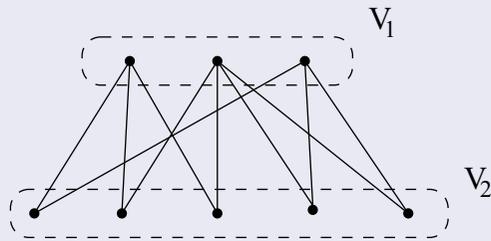
sous-entendu : graphe **simple** et **non orienté**, i.e.,

$$E = V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$$



## DÉFINITION

Un graphe  $G = (V, E)$  est **biparti** si  $V$  partitionné en  $V_1$  et  $V_2$  t.q.  $E \subseteq V_1 \times V_2$ .



Si  $\#V_1 = m$ ,  $\#V_2 = n$  et  $E = V_1 \times V_2$ ,  
alors graphe biparti **complet** :  $K_{m,n}$

graphes  **$n$ -partis**,  $n \geq 2$ ,

$V$  partitionné en  $n$  sous-ensembles  $V_1, \dots, V_n$  t.q.

$$E \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j.$$



## DÉFINITION

Un multi-graphe  $G = (V, E)$  (orienté ou non) est **étiqueté** (par  $f$ ) s'il existe une fonction

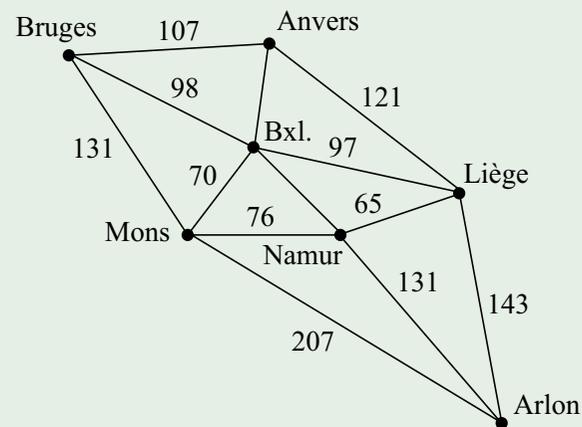
$$f : E \rightarrow \Sigma$$

Si  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ , on parle de multi-graphe **pondéré**,  $f$  est une **fonction de poids**.

Idem avec  $g : V \rightarrow \Sigma$ .



## EXEMPLE, AUTOROUTES BELGES



## UNE DERNIÈRE GÉNÉRALISATION

### DÉFINITION

Un **hyper-graphe**  $H = (V, E)$ .

$V$  = ensemble des sommets de  $H$

$E$  est une partie de  $\mathcal{P}(V)$ .

Un élément de  $E$  est appelé **hyper-arête**.

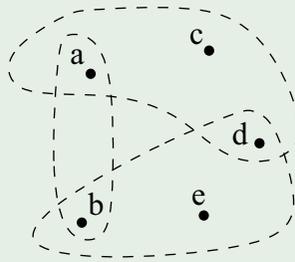
Un hyper-graphe  $H = (V, E)$  est **fini** si  $V$  est fini.



## EXEMPLE D'HYPER-GRAPHE

Soient  $V = \{a, b, c, d, e\}$  et

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, d, e\}\}.$$



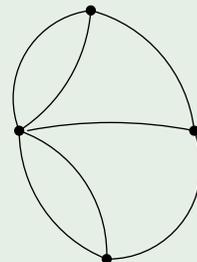
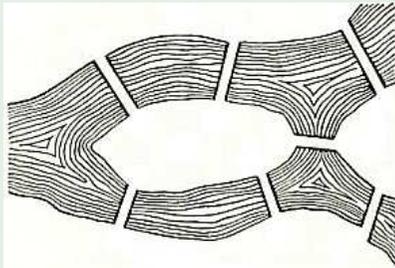
# ENFIN DES EXEMPLES!



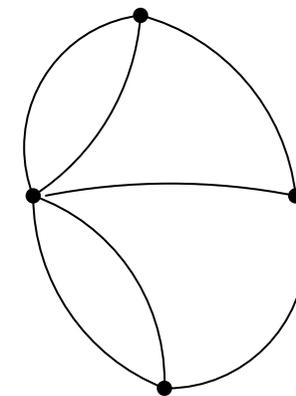
## L'ARCHI-CLASSIQUE

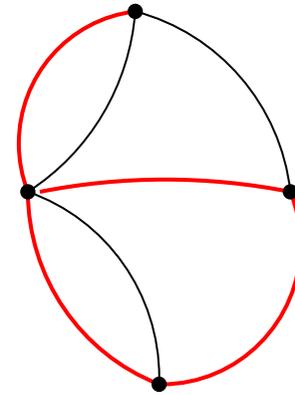
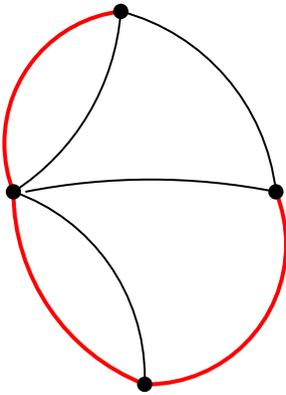
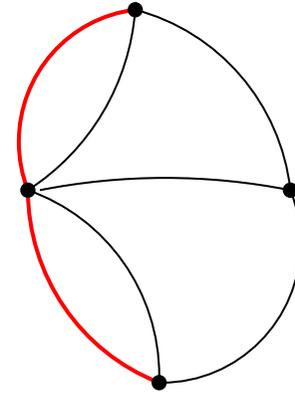
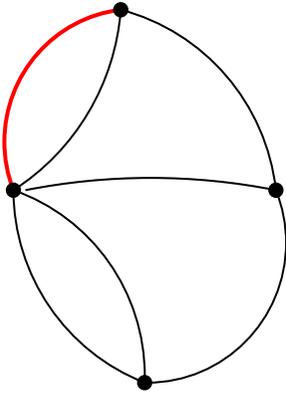
### LES SEPT PONTS DE KÖNIGSBERG / CIRCUIT EULÉRIEN

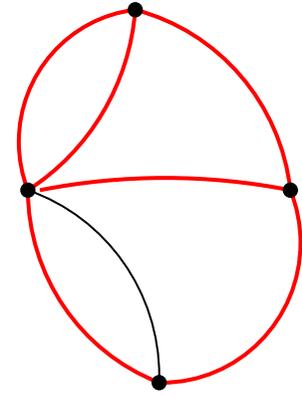
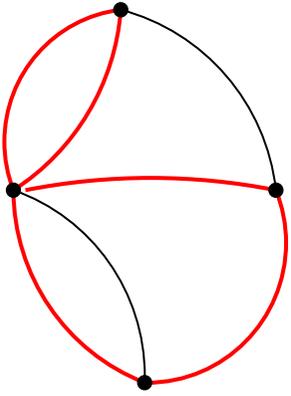
Actuel Kaliningrad, ville de Russie proche de la Lituanie et de la Pologne où coule la rivière Pregel



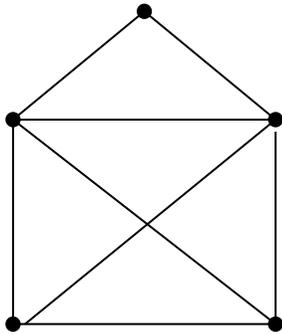
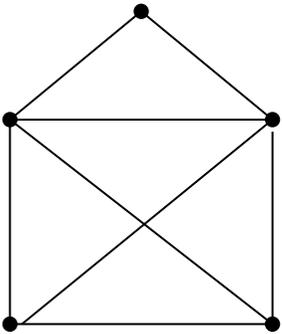
déterminer pour un multi-graphe donné (éventuellement orienté) s'il existe un circuit, i.e., un chemin fermé, passant une et une seule fois par chaque arête.



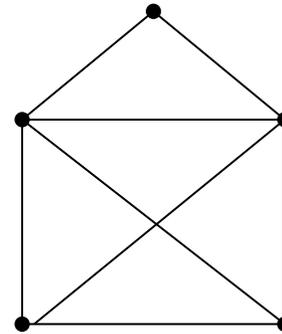
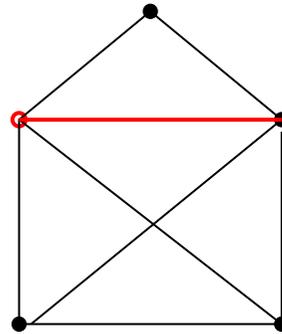




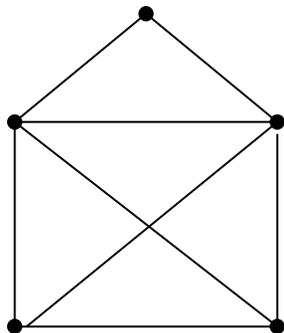
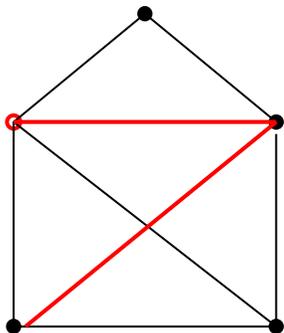
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



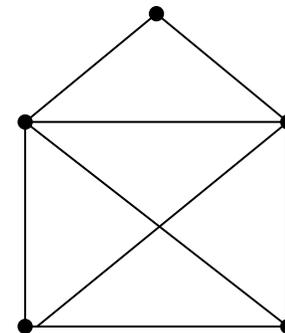
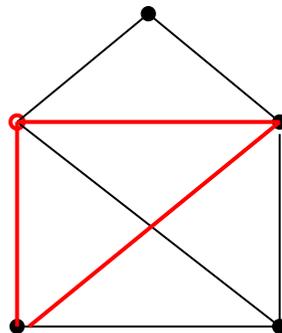
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



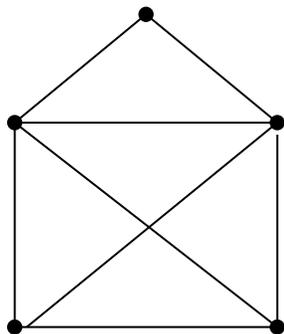
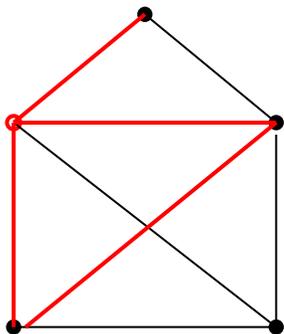
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



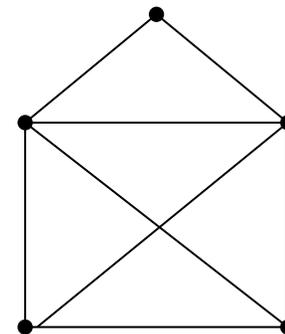
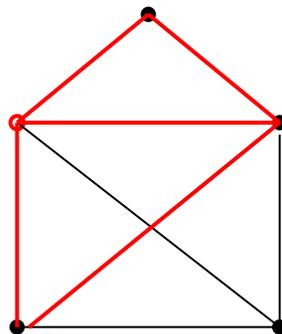
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



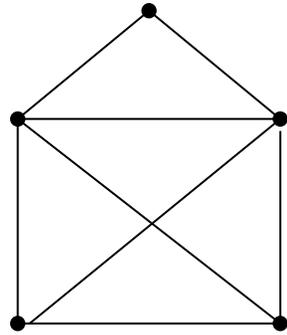
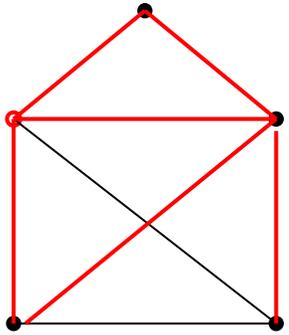
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



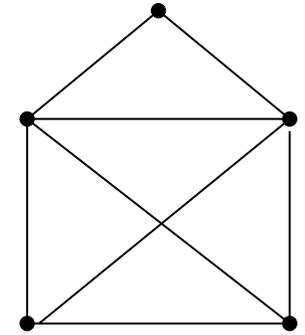
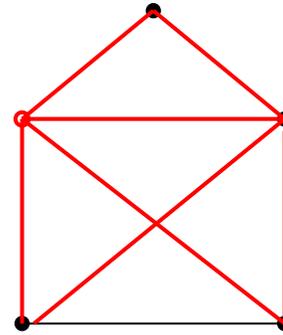
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



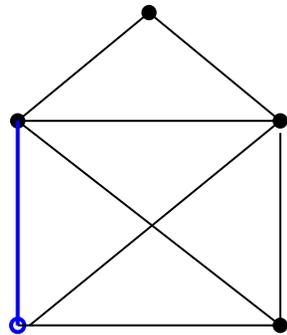
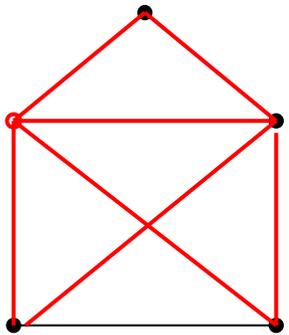
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



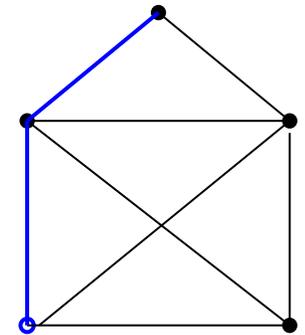
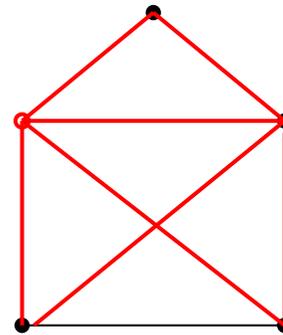
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



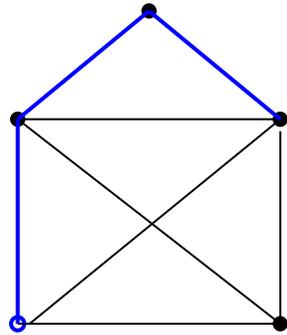
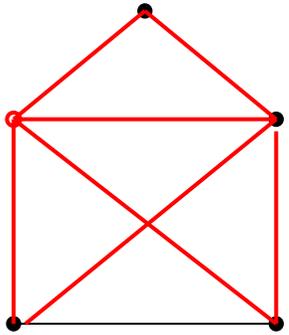
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



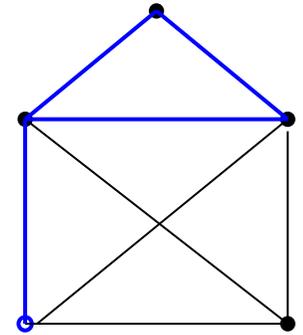
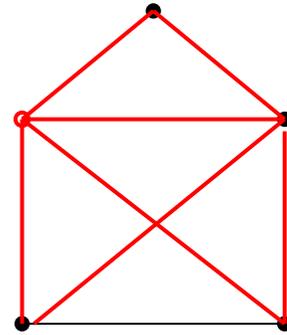
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



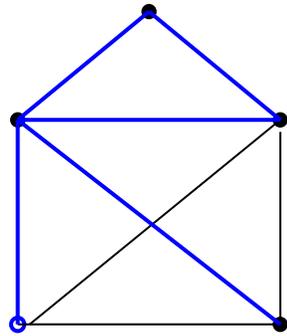
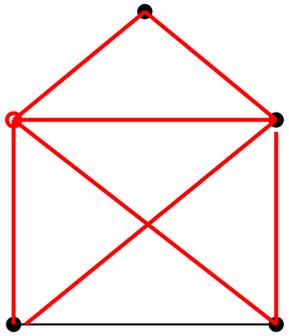
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



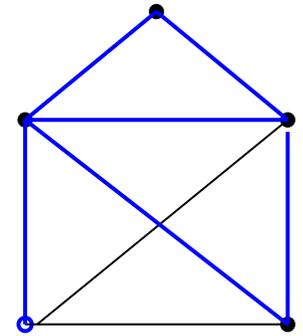
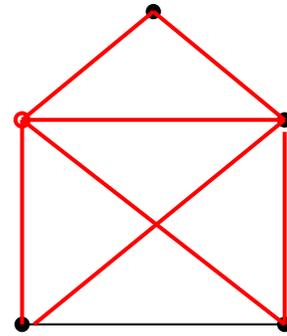
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



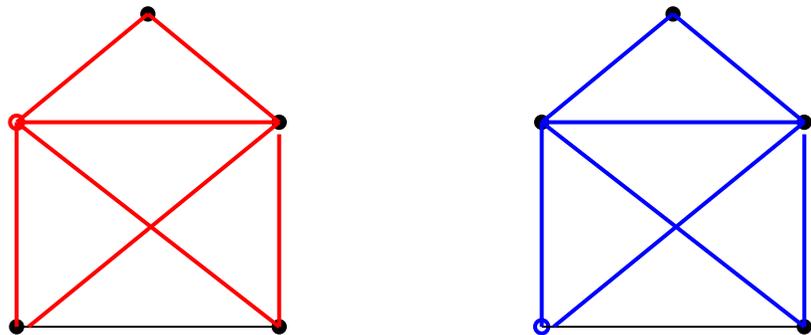
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



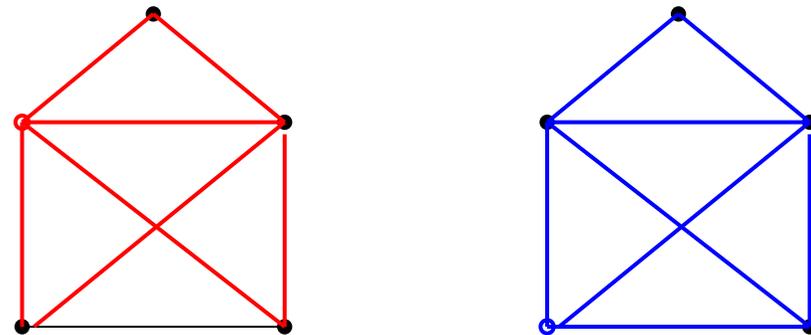
Chemin eulérien ? Tracer d'un trait. . .



Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...



Chemin eulérien ? Tracer d'un trait...

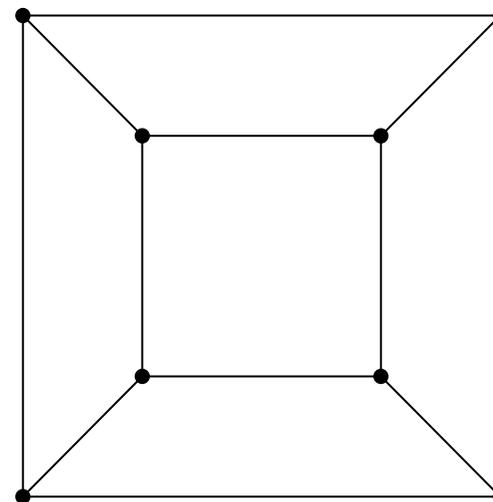


## COLORIAGE



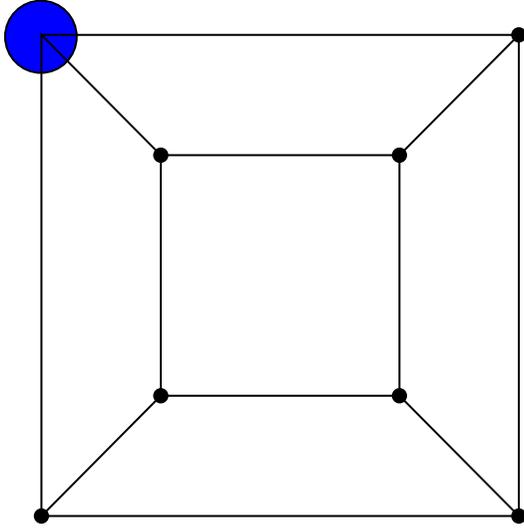
## COLORIAGE

Colorier les sommets d'un cube...



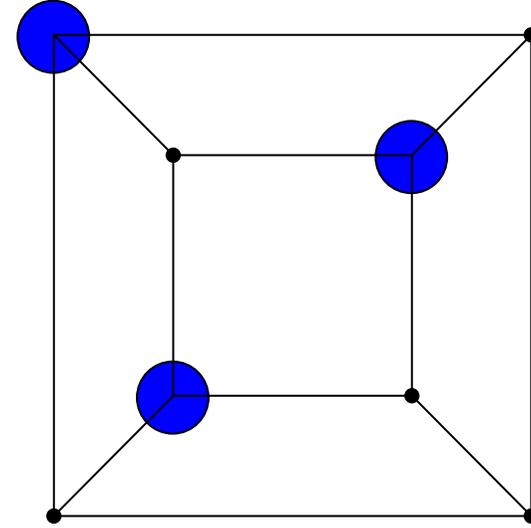
# COLORIAGE

Colorier les sommets d'un cube...



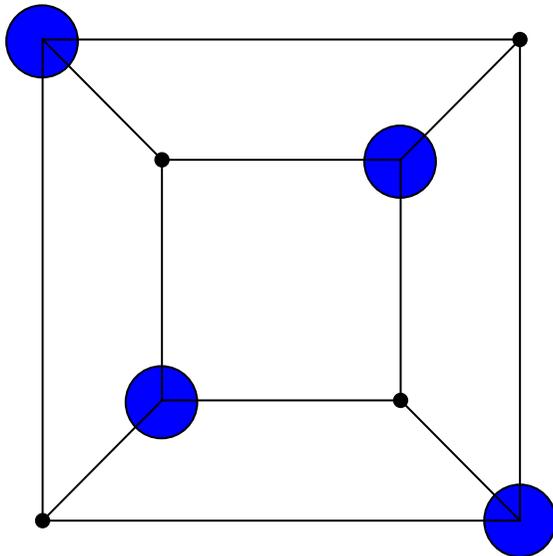
# COLORIAGE

Colorier les sommets d'un cube...



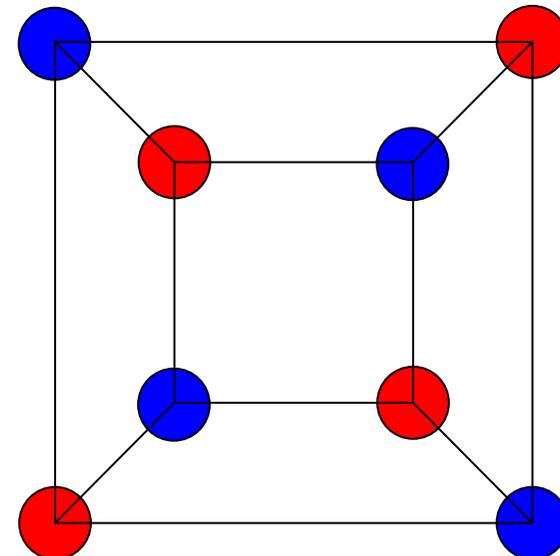
# COLORIAGE

Colorier les sommets d'un cube...



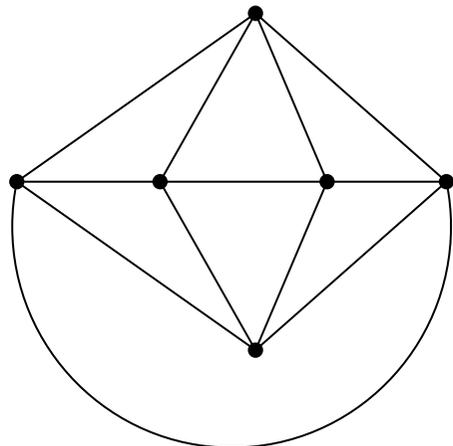
# COLORIAGE

Colorier les sommets d'un cube...



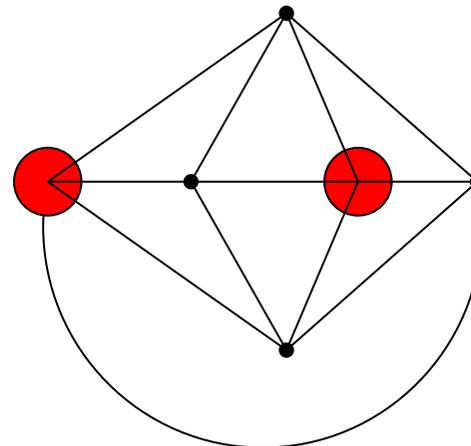
# COLORIAGE

Colorier les faces d'un cube...



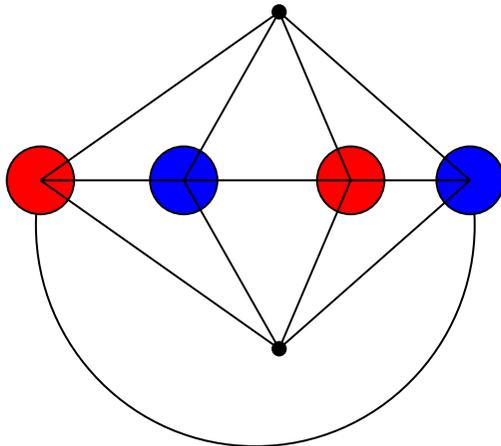
# COLORIAGE

Colorier les faces d'un cube...



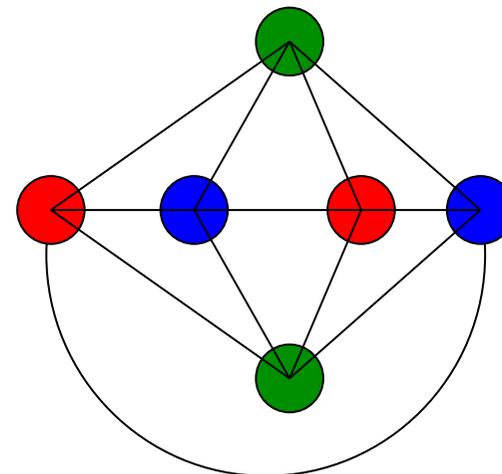
# COLORIAGE

Colorier les faces d'un cube...

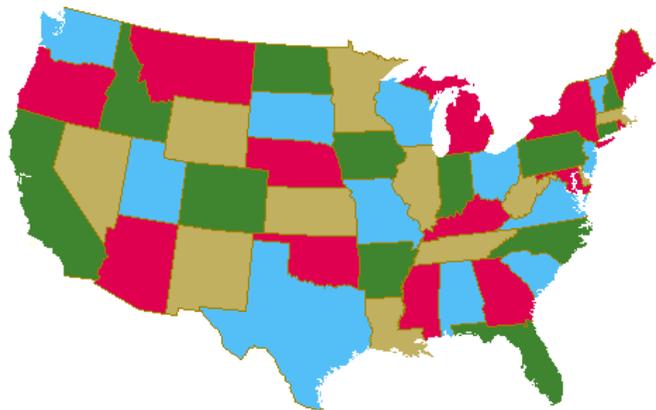


# COLORIAGE

Colorier les faces d'un cube...

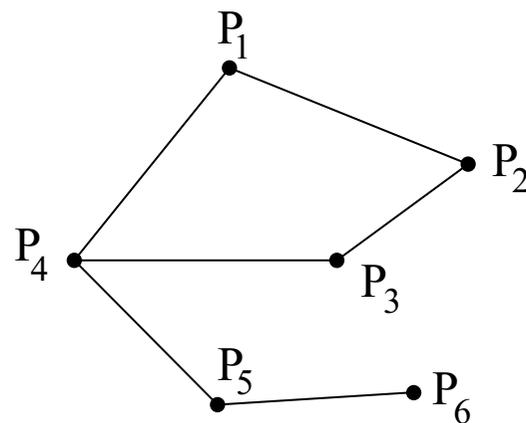


## COLORIAGE



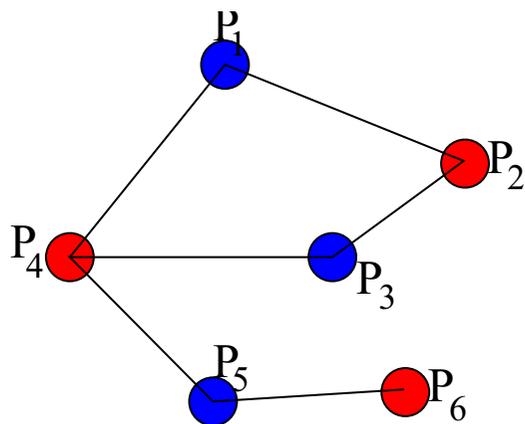
## COLORIAGE

Graphe d'incompatibilité, transport de produits chimiques par wagon



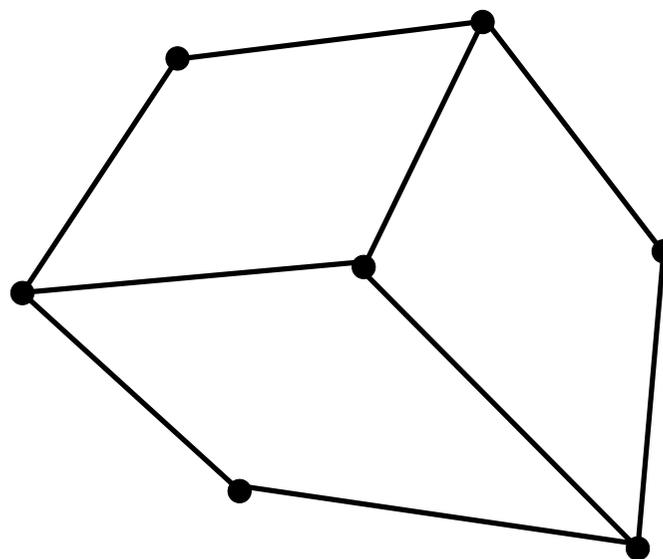
## COLORIAGE

Graphe d'incompatibilité, transport de produits chimiques par wagon



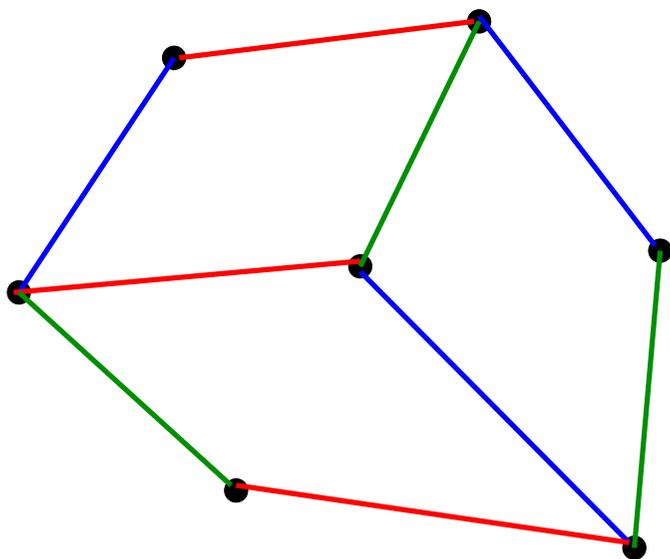
## COLORIAGE

Coloriage d'arêtes...



## COLORIAGE

Coloriage d'arêtes...



## GRAPHE DE CAYLEY

### DÉFINITION

Soit  $G$  un groupe et  $S$  un ensemble de générateurs de  $G$ .

Tout élément de  $G$  s'obtient comme produit d'un nombre fini d'éléments de  $S$  ou d'inverses d'éléments de  $S$ .

Le **graphe de Cayley** du groupe  $G$  (par rapport à  $S$ ) est un graphe orienté  $\mathcal{C}_S(G)$  ayant pour sommets les éléments de  $G$ .

Pour tous  $g \in G, s \in S$ , l'arc  $(g, gs)$  est un arc de label  $s$ .



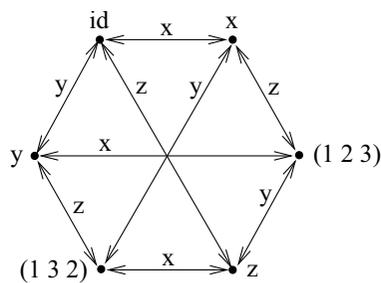
## GRAPHE DE CAYLEY

$$S_3, S = \{x = (1\ 2), y = (1\ 3), z = (2\ 3)\}$$

$$xx = yy = zz = id, \quad xy = (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2),$$

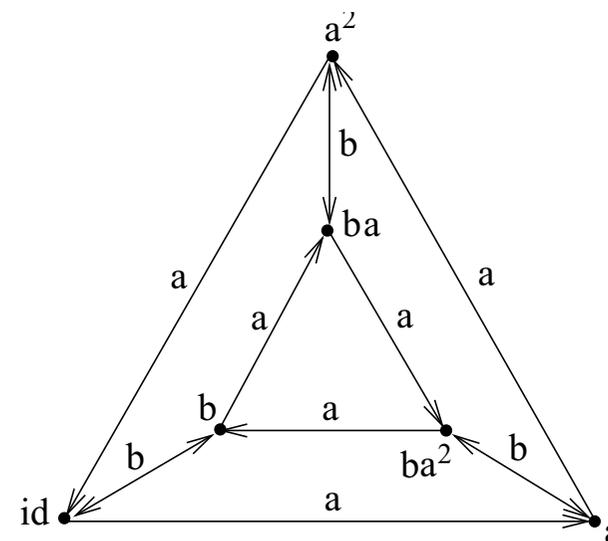
$$xz = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3), \quad yz = (1\ 3)(2\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

$$yx = (1\ 2\ 3), \quad zx = (1\ 3\ 2), \quad zy = (1\ 2\ 3).$$



## GRAPHE DE CAYLEY

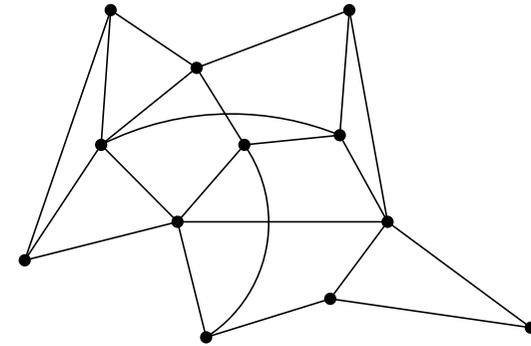
$$S_3, S = \{a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 2)\}$$



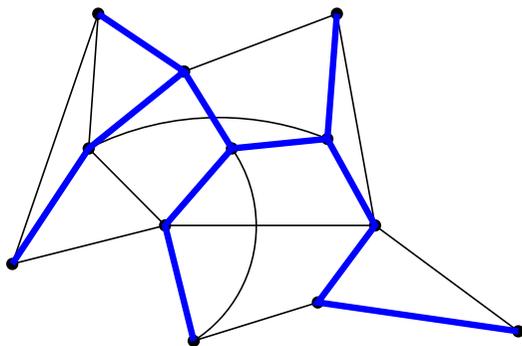
# ARBRE COUVRANT (DE POIDS MINIMAL)



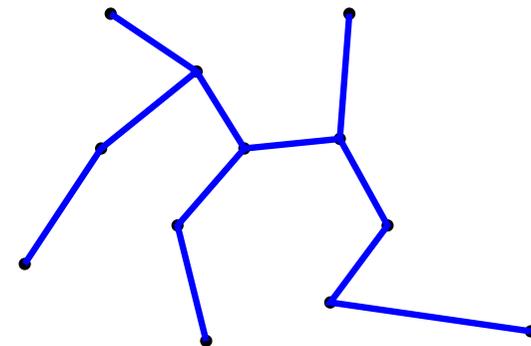
# ARBRE COUVRANT (DE POIDS MINIMAL)



# ARBRE COUVRANT (DE POIDS MINIMAL)



# ARBRE COUVRANT (DE POIDS MINIMAL)

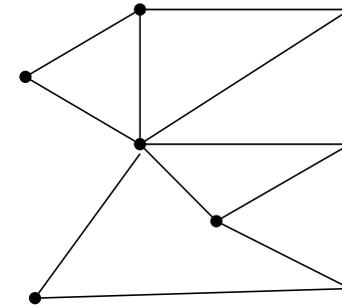


## FORTE CONNEXITÉ



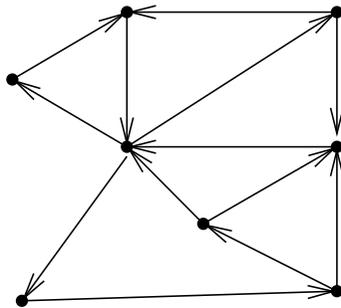
## FORTE CONNEXITÉ

orienter les arcs d'un graphe non orienté de manière telle qu'il existe un chemin orienté entre toute paire de sommets ?



## FORTE CONNEXITÉ

orienter les arcs d'un graphe non orienté de manière telle qu'il existe un chemin orienté entre toute paire de sommets ?



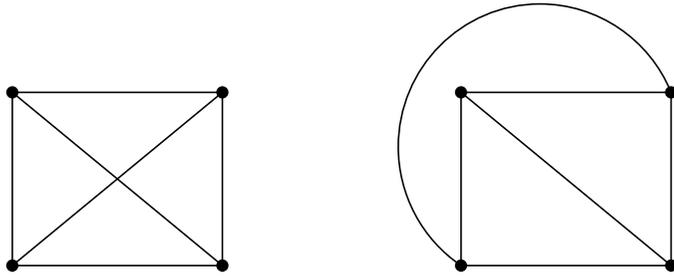
## DISTANCE

Minimiser le nombre de "hops"

```
> traceroute www.google.be
traceroute to www.google.be (66.249.85.99), 30 hops
max, 40 byte packets
 1 mont3-0014.gw.ulg.ac.be (139.165.159.1)
 2 segi3-0813-mont3.gw.ulg.ac.be (193.190.228.125)
 3 inet3-3031.gw.ulg.ac.be (139.165.192.49)
 4 fe.m20.access.liege.belnet.net (193.191.10.17)
 5 oc48.m160.core.science.belnet.net (193.191.1.185)
 6 oc192.m160.ext.science.belnet.net (193.191.1.2)
 7 216.239.43.88
 8 64.233.175.249
 9 216.239.46.49
10 66.249.85.99
```



## PLANARITÉ



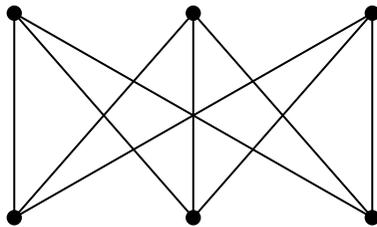
## PLANARITÉ



## PLANARITÉ

Le problème des 3 villas, eau, gaz, électricité,...

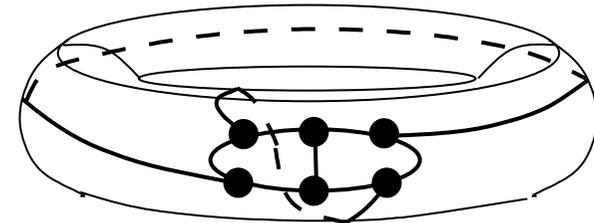
$K_{3,3}$



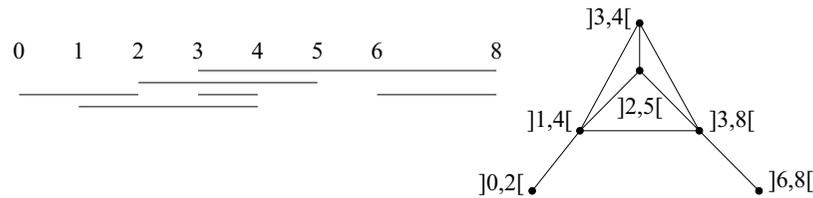
Démonstration ?



## PLANARITÉ



## GRAPHES D'INTERVALLES



caractéristiques communes d'une période de l'histoire ou des mutations génétiques au sein du génome,...

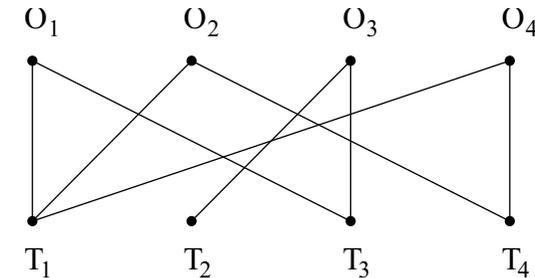
## PROBLÈMES D'AFFECTATION

ouvriers :  $O_1, \dots, O_k$

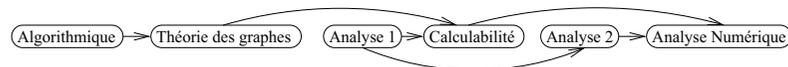
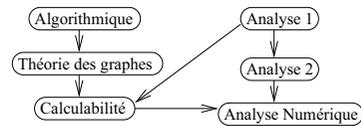
postes de travail :  $T_1, \dots, T_t$

Chaque ouvrier  $O_i$  possède certaines qualifications lui permettant de travailler sur certains postes  $T_{i,1}, \dots, T_{i,d_i}$ .

Comment répartir les ouvriers pour que chaque poste de travail soit occupé par au moins un ouvrier ?



## TRI TOPOLOGIQUE



déterminer une indexation des sommets d'un graphe orienté sans cycle de manière telle que s'il existe un arc de  $v_i$  à  $v_j$ , alors  $i < j$ .

## TOURNOI

### POSITION DU PROBLÈME

On imagine un ensemble d'équipes ou de joueurs et une compétition où chaque joueur affronte tout autre joueur exactement une fois. Le seul résultat possible est la victoire ou la défaite. On peut alors considérer un graphe dont les sommets sont les joueurs et un arc relie le joueur  $i$  au joueur  $j$  si  $i$  a battu  $j$  lors de leur confrontation directe. La question naturelle qui se pose est alors d'essayer de déterminer un vainqueur pour la compétition.

## GRAPHE DE DE BRUIJN

### COMBINATOIRE DES MOTS

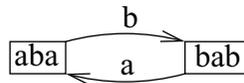
**mots infini** = suite infinie  $w : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$

$$w = abbabaabbaababba \dots$$

### DÉFINITION

Le **graphe de De Bruijn** d'ordre  $k$  du mot  $w$ , sommets les facteurs de longueur  $k$  de  $w$  ( $w_i \dots w_{i+k-1}$ ) arc de label  $\sigma \in \Sigma$  entre les sommets  $\tau X$  et  $X\sigma$  SSI  $\tau X\sigma$  est un facteur de  $w$  de longueur  $k + 1$ .

*abababab...*



## GRAPHE DE DE BRUIJN

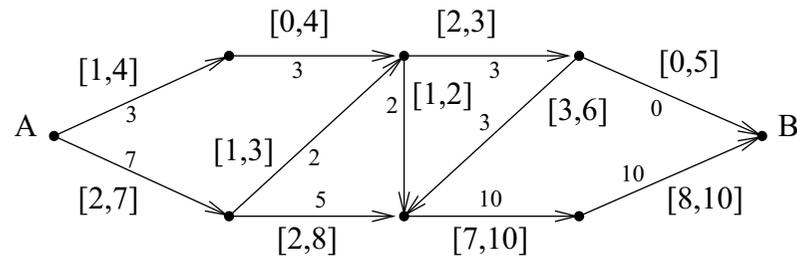
### THÉORÈME

$w$  est ultimement périodique ( $w = uvvv \dots$ ) SSI, pour tout  $k$  suffisamment grand, son graphe de De Bruijn d'ordre  $k$  contient un unique cycle dont tous les sommets ont un demi-degré sortant égal à 1.



## FLOT

Société hydro-électrique, flot maximum, coût minimum,...

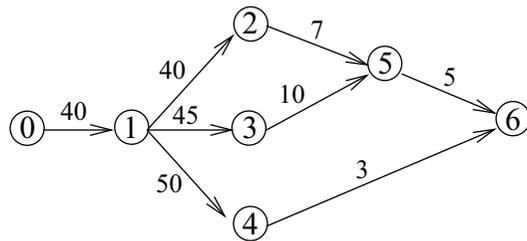


## CHEMIN CRITIQUE



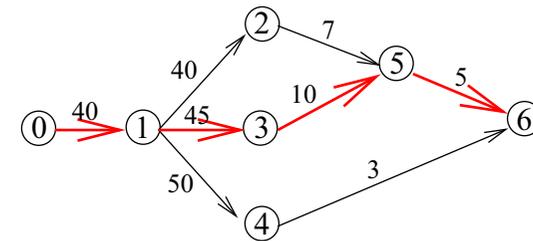
## CHEMIN CRITIQUE

- A : Creusage des fondations
- B : Construction du gros-oeuvre
- C : Installation électrique
- D : Installation du chauffage central
- E : Réalisation des peintures extérieures
- F : Réalisation des peintures intérieures



## CHEMIN CRITIQUE

- A : Creusage des fondations
- B : Construction du gros-oeuvre
- C : Installation électrique
- D : Installation du chauffage central
- E : Réalisation des peintures extérieures
- F : Réalisation des peintures intérieures



## THÉORIE DES GRAPHES (2)

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2007–2008



## CHEMINS

### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté.

Un **chemin** de longueur  $k \geq 1$  est une suite ordonnée  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $k$  arêtes adjacentes  $e_i = \{e_{i,1}, e_{i,2}\}$ ,

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad e_{i,2} = e_{i+1,1}.$$

Ce chemin de longueur  $k$  **joint** les sommets  $e_{1,1}$  et  $e_{k,2}$ , **passé** par les arêtes  $e_1, \dots, e_k$ , les sommets  $e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{k,1}, e_{k,2}$ .

Un chemin de longueur 0 joint toujours un sommet à lui-même.

Si  $e_{1,1} = e_{k,2}$  : **cycle**, **circuit**, **chemin fermé**



# CHEMINS

## DÉFINITIONS (SUITE)

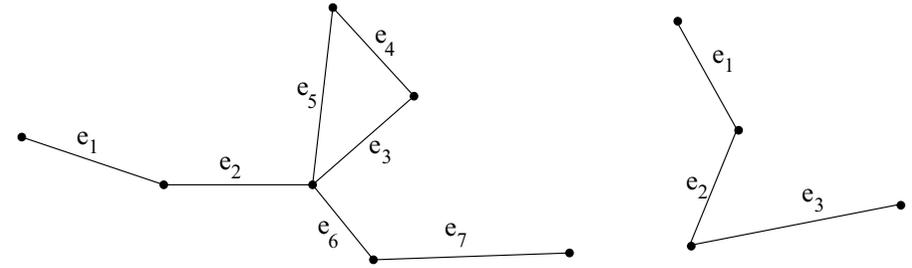
arêtes d'un chemin toutes distinctes : **piste** ou **chemin élémentaire**

arêtes d'un chemin toutes distinctes et si le chemin ne passe pas deux fois par un même sommet : **chemin simple**

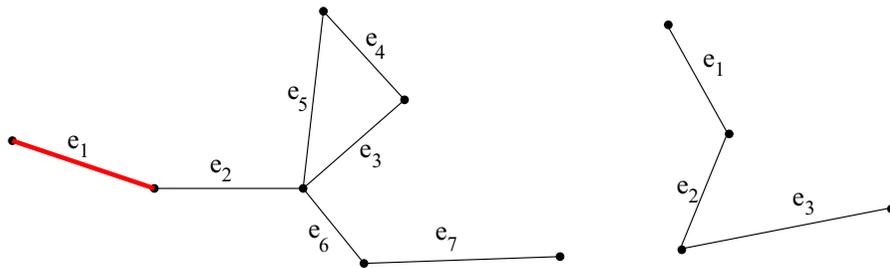
idem, circuit élémentaire / simple



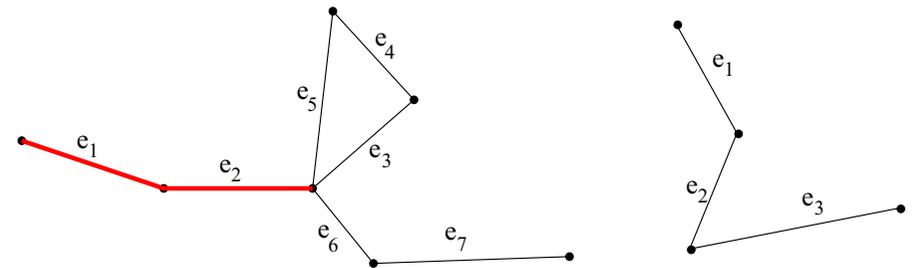
# PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



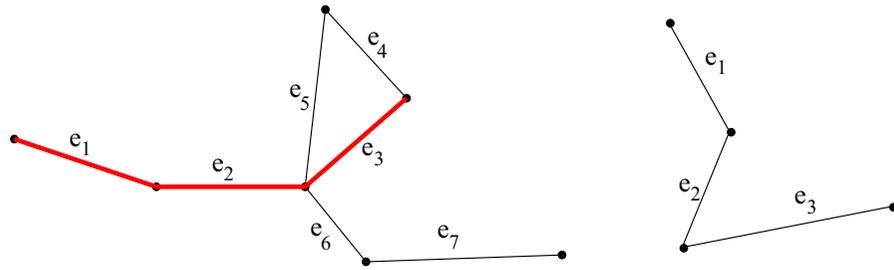
# PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



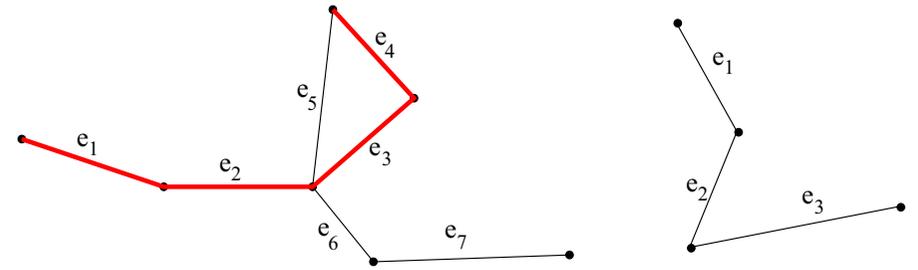
# PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



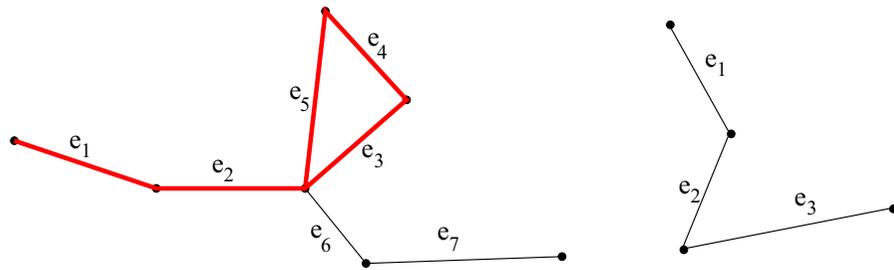
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



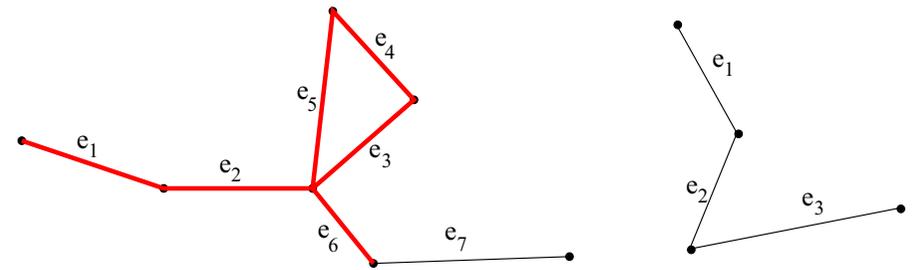
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



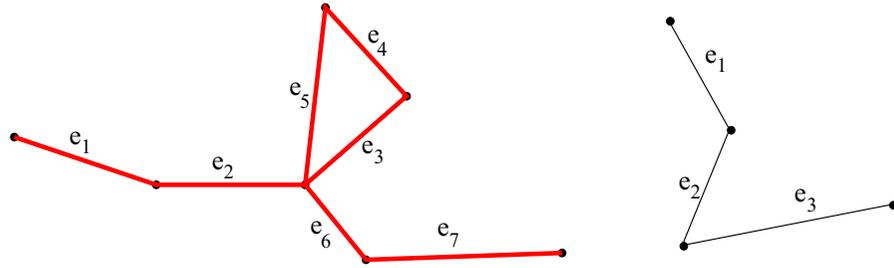
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



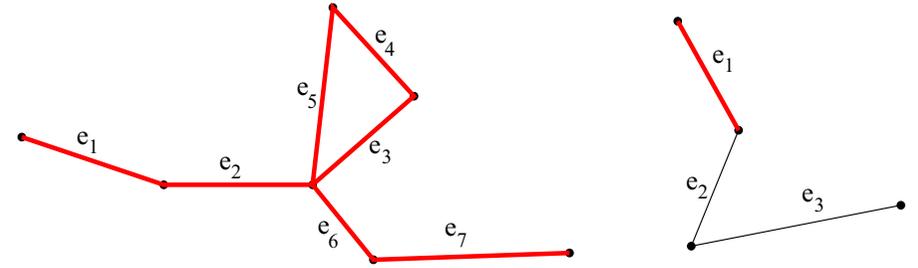
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



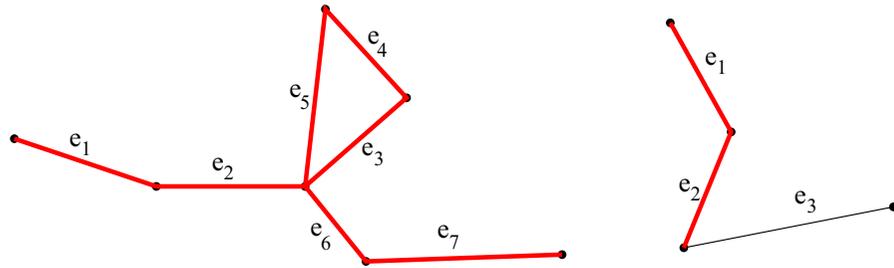
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



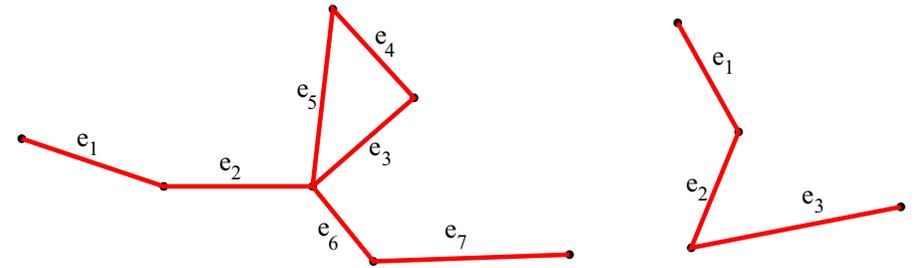
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



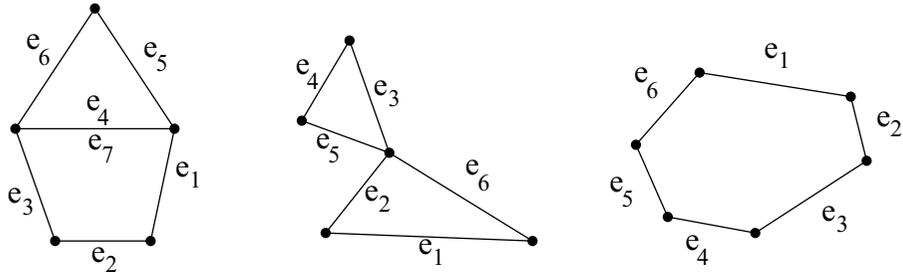
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



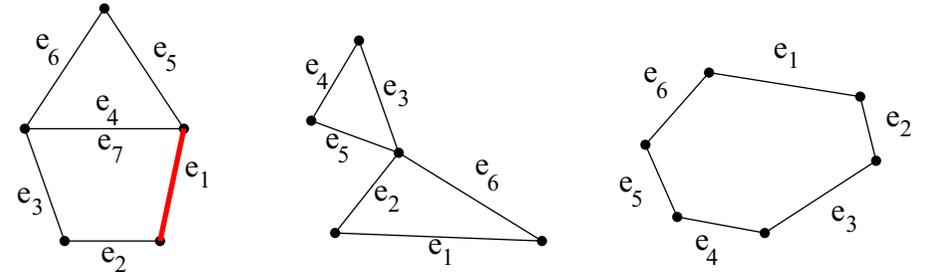
PISTE (OU CHEMIN ÉLÉMENTAIRE) — CHEMIN SIMPLE



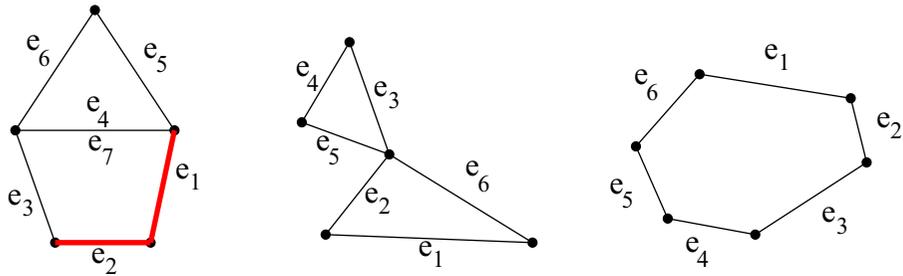
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



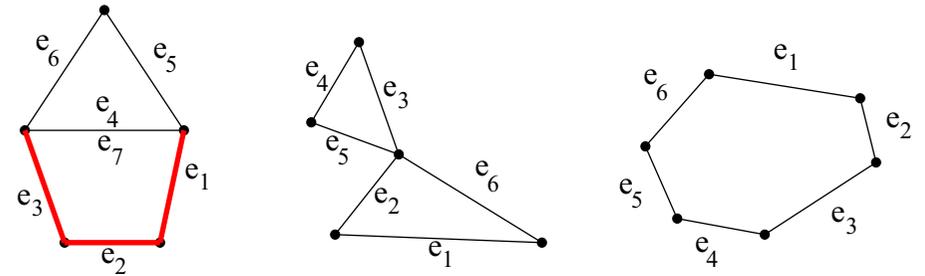
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



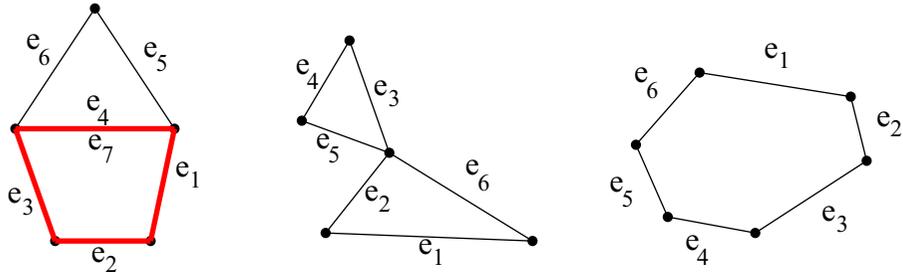
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



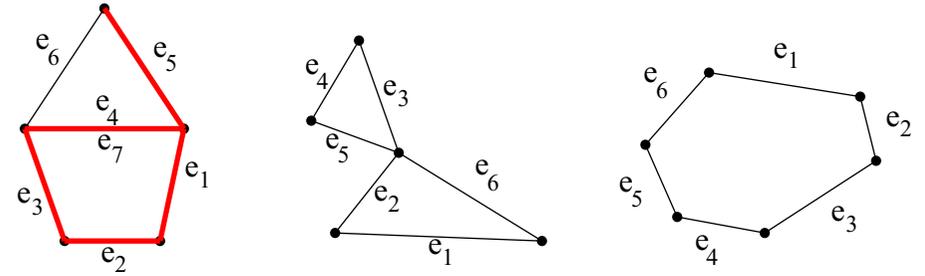
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



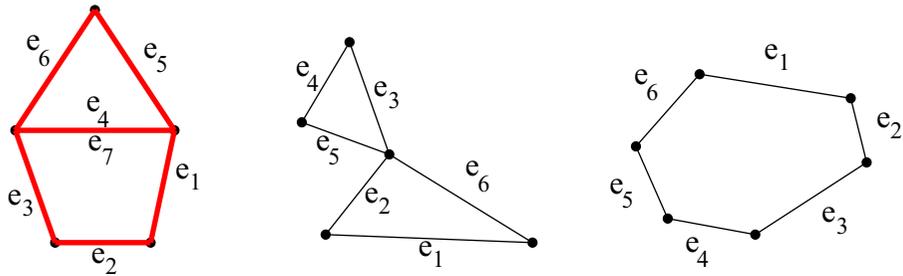
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



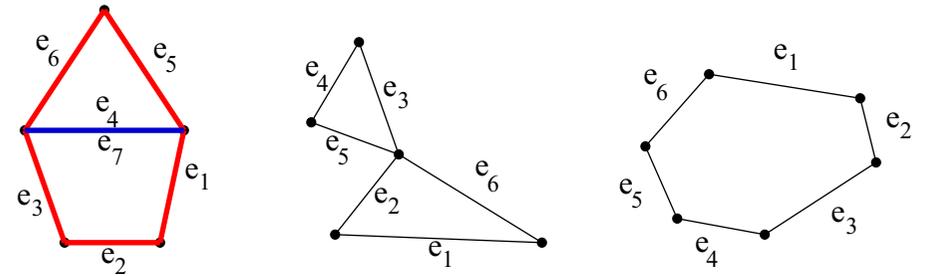
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



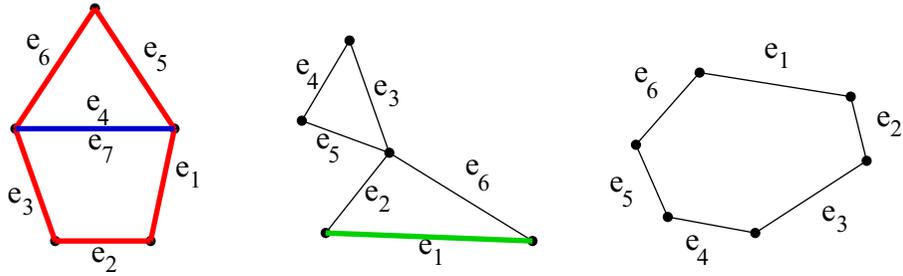
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



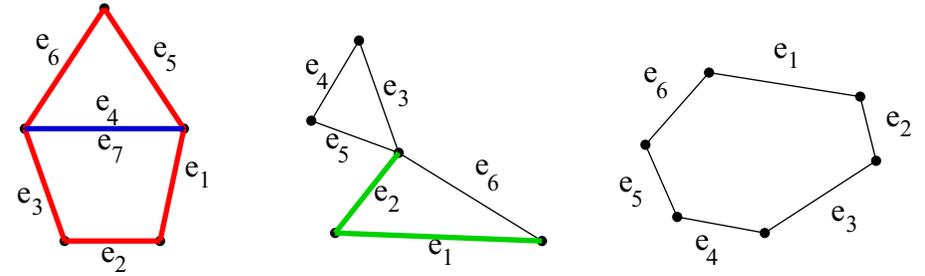
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



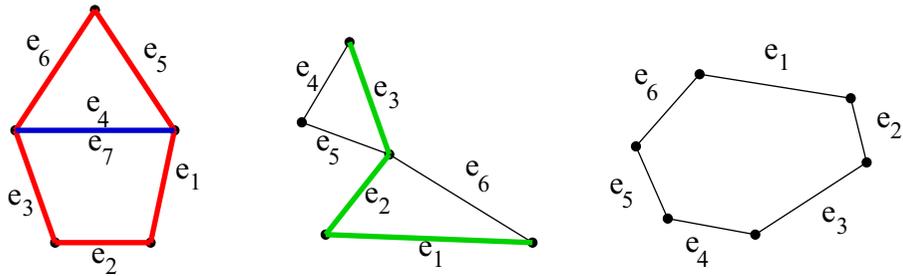
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



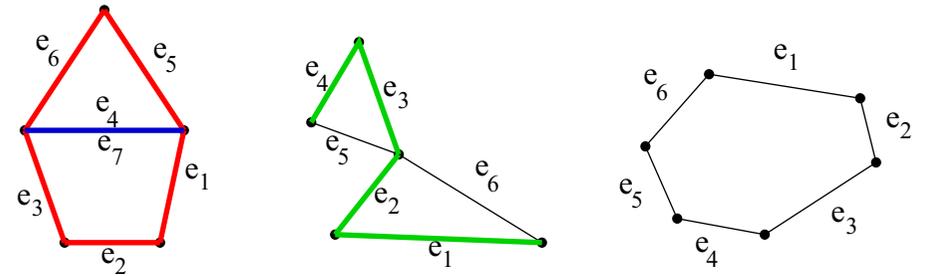
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



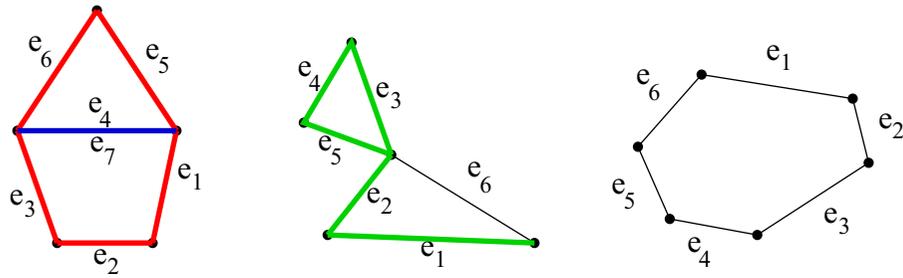
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



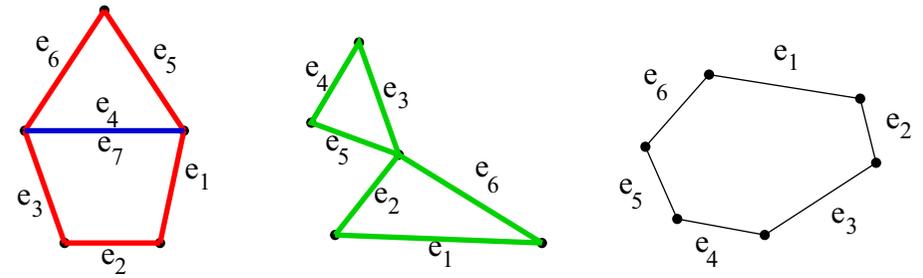
CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



## CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



## CIRCUIT, CIRCUIT ÉLÉMENTAIRE (OU PISTE FERMÉE) ET CIRCUIT SIMPLE



### REMARQUE

Dans le cas d'un graphe (qui n'est pas un multi-graphe), un chemin est aussi univoquement déterminé par une suite de sommets  $(v_1, \dots, v_k)$  de manière telle que  $\{v_i, v_{i+1}\}$  est une arête du graphe.



## RELATION D'ÉQUIVALENCE

### DÉFINITION

Deux sommets  $a$  et  $b$  sont **connectés** s'il existe un chemin les joignant :  $a \sim b$

classe d'équivalence pour  $\sim =$  **composante connexe**

Un multi-graphe non orienté est **connexe** si  $V/\sim$  contient une seule composante connexe.

On supposera que  $G = (\{v\}, \emptyset)$  est connexe



## DISTANCE

### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe (pour avoir une fonction totale). La distance  $d(a, b)$  entre  $a$  et  $b \in V$  est la longueur du plus court chemin joignant  $a$  et  $b$ .

$$\text{diam}(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b).$$

Si  $G$  est pondéré par  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , la distance entre les sommets  $a$  et  $b$  est égale au poids minimal des chemins joignant  $a$  et  $b$ , i.e.,

$$d(a, b) = \min_{\substack{\text{chemin } (e_1, \dots, e_t) \\ \text{joignant } a \text{ et } b}} \sum_{i=1}^t f(e_i).$$



## CHEMINS DANS LE CAS ORIENTÉ

### DÉFINITIONS

$G = (V, E)$  multi-graphe orienté.

**chemin** de longueur  $k \geq 1$  : suite ordonnée

$$(v_1, \dots, v_k)$$

de  $k$  arcs  $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2})$  t.q.  $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, v_{i,2} = v_{i+1,1}$ .

Ce chemin de longueur  $k$  **joint** les sommets  $v_{1,1}$  et  $v_{k,2}$ .

S'il existe un chemin joignant deux sommets  $a$  et  $b$  :  $a \rightarrow b$ .

Si  $a \rightarrow b$  et  $b \rightarrow a$  :  $a$  et  $b$  sont **fortement connectés** :  $a \leftrightarrow b$ .

On impose  $\leftrightarrow$  réflexif ( $a \leftrightarrow a$ ), "être fortement connecté" est une relation d'équivalence sur  $V$ .



## FORTE CONNEXITÉ

### REMARQUE

Une classe d'équivalence pour  $\leftrightarrow$  est une **composante fortement connexe** (ou **f. connexe**) de  $G$ .

Si  $V/\leftrightarrow$  contient une seule classe, on dira que  $G$  est **fortement connexe** (ou **f. connexe**).

Les sommets appartenant à un cycle maximal constituent une composante f. connexe.

Un multi-graphe orienté  $G$  est f. connexe SSI il existe un cycle passant par chaque sommet de celui-ci.

### SIMPLE CONNEXITÉ

Si on supprime l'orientation des arcs de  $G$  et si le multi-graphe non orienté obtenu de cette manière est connexe, alors on dira que  $G$  est **simplement connexe** (ou **s. connexe**).

$\Rightarrow$  **composantes simplement connexes** (ou **s. connexes** de  $G$ ).



### DÉFINITION . . .

**distance** et **diamètre** définis dans le cas non orienté s'adaptent au cas d'un multi-graphe orienté fortement connexe. On remarquera cependant qu'ici, la fonction

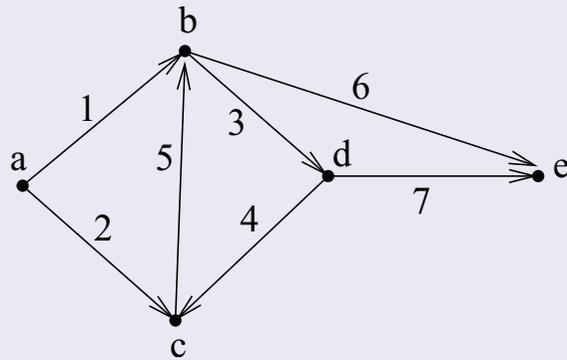
$$d(\cdot, \cdot)$$

n'est en général **pas symétrique**.



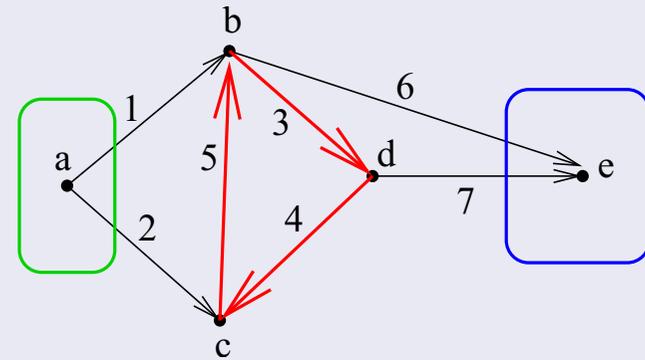
## CONNEXITÉ

EXEMPLE, S. CONNEXE ? F. CONNEXE ?



## CONNEXITÉ

EXEMPLE, S. CONNEXE ? F. CONNEXE ?



## RECHERCHE DU PLUS COURT CHEMIN

Soit  $G = (V, E)$  un **digraphe pondéré** par  $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .  
(L'algorithme s'applique aussi à un graphe non orienté.)

plus court chemin = chemin de poids minimal

se restreindre à un digraphe **simple**

### REMARQUE

On suppose  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , on étend  $p$  de  $E$  à  $V \times V$  en posant  $p(x, x) = 0$ , pour tout  $x \in V$  et  $p(x, y) = +\infty$ , si  $(x, y) \notin E$ .

## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Intuitivement,  $u$  est fixé, pour tout sommet  $v$ ,

- ▶  $T(v)$  initialisé à  $p(u, v)$
- ▶ liste de sommets  $C(v)$  censée correspondre à un chemin de  $u$  à  $v$

Lorsque l'algorithme s'achève,  $T(v)$  contient le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$  et  $C(v)$  réalise un tel chemin (ou alors,  $T(v) = +\infty$  si  $u \not\rightarrow v$ ).

Idée : construire de proche en proche  $X \subseteq V$  t.q. un chemin de poids minimal de  $u$  à  $v \in X$  passe uniquement par des sommets de  $X$ .

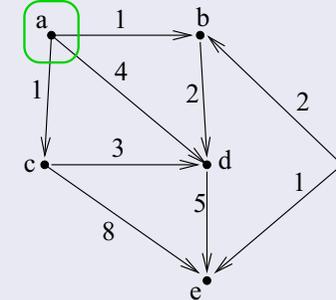
$X$  est initialisé à  $\{u\}$  et à chaque étape, on ajoute un sommet à l'ensemble.

## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Pour tout  $v \in V$ ,  $T(v) := p(u, v)$ ,  $C(v) := (u, v)$   
 $X := \{u\}$   
 Tant que  $X \neq V$ , répéter  
   Choisir  $v \in V \setminus X$  t.q.  $\forall y \in V \setminus X$ ,  $T(v) \leq T(y)$   
    $X := X \cup \{v\}$   
   Pour tout  $y \in V \setminus X$   
     Si  $T(y) > T(v) + p(v, y)$ ,  
       alors  $T(y) := T(v) + p(v, y)$  et  $C(y) := [C(v), y]$

## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### EXEMPLE

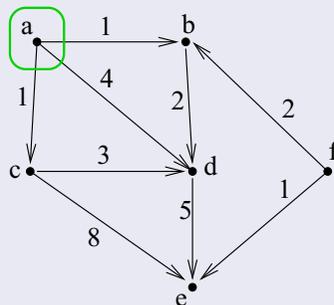


$X = \{a\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	4	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### EXEMPLE

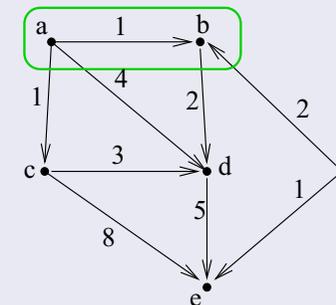


$X = \{a\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	4	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### EXEMPLE

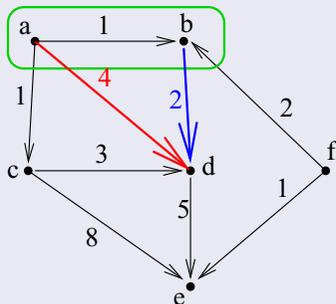


$X = \{a, b\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	4	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE

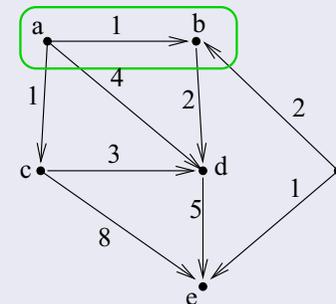


$X = \{a, b\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	4	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE

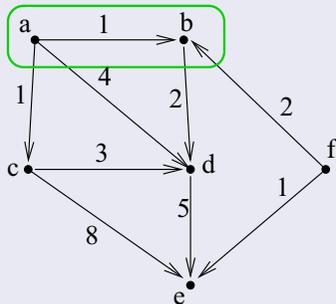


$X = \{a, b\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE

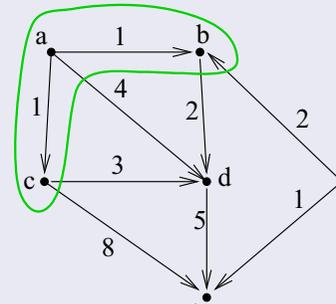


$X = \{a, b\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE

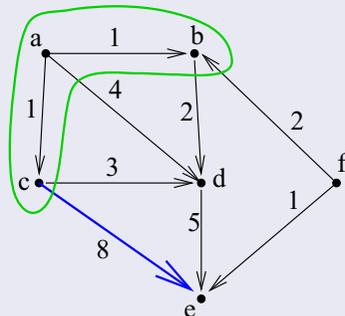


$X = \{a, b, c\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$

# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



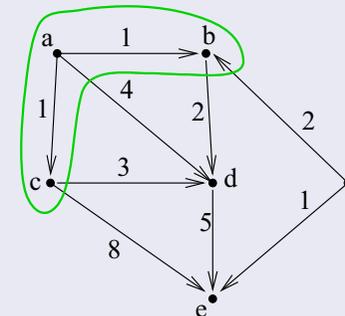
$X = \{a, b, c\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	$+\infty$	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



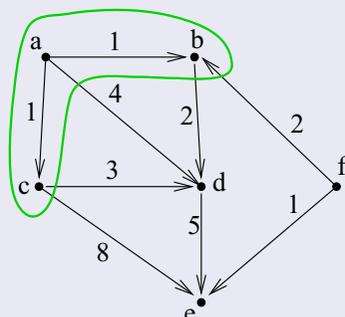
$X = \{a, b, c\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	9	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, c, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



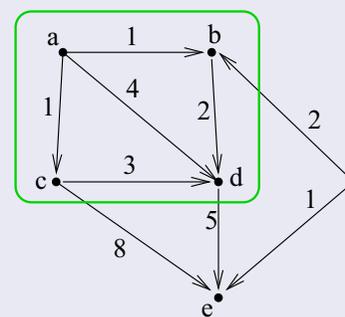
$X = \{a, b, c\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	9	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, c, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



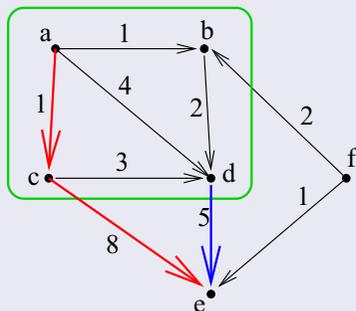
$X = \{a, b, c, d\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	9	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, c, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



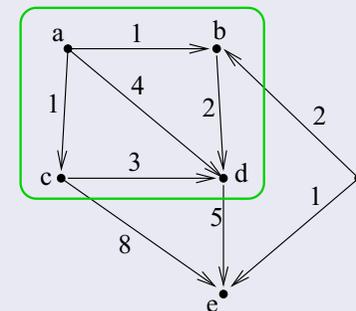
$X = \{a, b, c, d\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	9	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, c, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



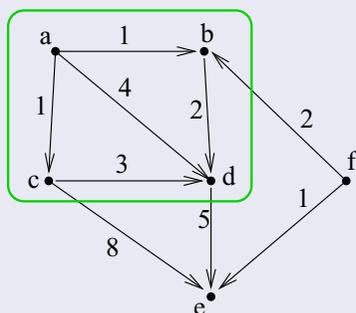
$X = \{a, b, c, d\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	8	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, b, d, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



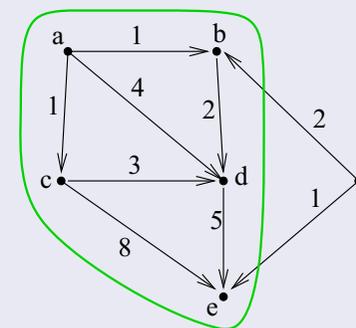
$X = \{a, b, c, d\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	8	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, b, d, e)$	$(a, f)$



# ALGORITHME DE DIJKSTRA

## EXEMPLE



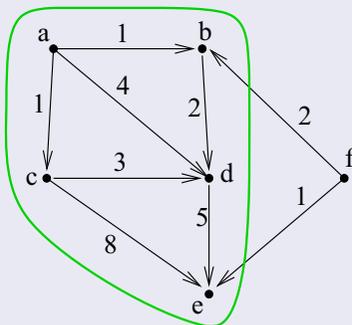
$X = \{a, b, c, d, e\}$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	8	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, b, d, e)$	$(a, f)$



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### EXEMPLE



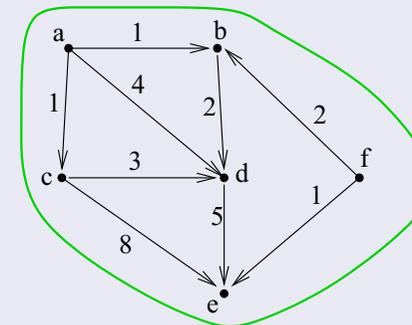
$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	8	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, b, d, e)$	$(a, f)$



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### EXEMPLE



$$X = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$v$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$T(v)$	0	1	1	3	8	$+\infty$
$C(v)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(a, c)$	$(a, b, d)$	$(a, b, d, e)$	$(a, f)$



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Pour tout  $v \in V$ ,  $T(v) := p(u, v)$ ,  $C(v) := (u, v)$

$X := \{u\}$

Tant que  $X \neq V$ , répéter

Choisir  $v \in V \setminus X$  t.q.  $\forall y \in V \setminus X$ ,  $T(v) \leq T(y)$

$X := X \cup \{v\}$

Pour tout  $y \in V \setminus X$

Si  $T(y) > T(v) + p(v, y)$ ,

alors  $T(y) := T(v) + p(v, y)$  et  $C(y) := [C(v), y]$



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

L'algorithme s'achève : à chaque itération de la boucle, un nouvel état est ajouté à  $X$ .

Thèse : Il s'achève avec le résultat attendu.

Récurrence sur  $\#X$ , on vérifie I) et II) pour toutes les valeurs de  $\#X$ , d'où le résultat pour  $X = V$ .

- I)  $\forall v \in X$ ,  $T(v)$  est le poids minimal de tous les chemins joignant  $u$  à  $v$ .
- II)  $\forall v \notin X$ ,  $T(v)$  est le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$  qui, à l'exception de  $v$ , passent uniquement par des sommets de  $X$ .

Pour  $\#X = 1$ , c'est immédiat car  $X = \{u\}$  et l'initialisation effectuée dans l'algorithme correspond aux assertions.

OK pour  $\#X = n$  et ? OK? pour  $\#X = n + 1$ ,  $1 \leq n < \#V$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Si  $\#X = n$ , Dijkstra : ajouter un sommet  $v$  ayant une valeur  $T(v)$  minimale parmi les sommets n'appartenant pas à  $X$ ,

Choisir  $v \in V \setminus X$  t.q.  $\forall y \in V \setminus X, T(v) \leq T(y)$

Par l'hypothèse de récurrence II) :

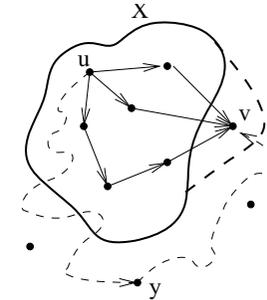
II)  $\forall v \notin X, T(v)$  est le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$  qui, à l'exception de  $v$ , passent uniquement par des sommets de  $X$ .

A ce stade  $\#X = n$  et  $v \notin X$ , donc

$T(v)$  est le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$  qui, à l'exception de  $v$ , passent uniquement par des sommets de  $X$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA



Ajoutons  $v$  à  $X$  pour obtenir un ensemble de taille  $n + 1$ .

**P.A.** Supposons I) non vérifié. Supposons que  $T(v)$  n'est pas le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$ .

Alors,  $\exists y \notin X$  et un chemin de  $u$  à  $v$  p.p.  $y$  de poids  $< T(v)$ .

Donc  $T(y) < T(v)$  Impossible ! vu choix du sommet  $v$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Démontrons II) de la même manière.

On passe d'un ensemble  $X$  à  $n$  sommets à un ensemble  $X'$  à  $n + 1$  sommets en ajoutant un sommet  $v$ .

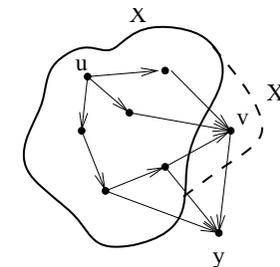
**P.A.** Supposons que II) n'est plus satisfait pour  $X'$ ,

II)  $\forall v \notin X, T(v)$  est le poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $v$  qui, à l'exception de  $v$ , passent uniquement par des sommets de  $X$ .

Supposons qu'il existe un sommet  $y \notin X'$  tel que  $T(y)$  est  $>$  au poids minimal des chemins joignant  $u$  à  $y$  qui, à l'exception de  $y$ , passent uniquement par des sommets de  $X'$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA



Or, par hypothèse de récurrence, II) est satisfait pour  $\#X = n$ .

Autrement dit, avant d'ajouter le sommet  $v$ ,  $T(y)$  était minimal pour les chemins joignant  $u$  à  $y$  qui, à l'exception de  $y$ , passent uniquement par des sommets de  $X$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

Ainsi, en ajoutant le sommet  $v$  à  $X$ , on aurait remplacé  $T(y)$  par une valeur supérieure, ce qui est en contradiction avec les prescriptions de l'algorithme :

Si  $T(y) > T(v) + p(v, y)$ , alors  $T(y) := T(v) + p(v, y)$  et  
 $C(y) := [C(v), y]$



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### COMPLEXITÉ

l'algorithme de Dijkstra a une complexité temporelle en  $\mathcal{O}(\#V)^2$ .

Avec une implémentation minutieuse, utilisant les listes d'adjacence et les files de priorité, on obtient même une complexité en  $\mathcal{O}(\#E + \#V \log \#V)$ .



## ALGORITHME DE DIJKSTRA

### APPLICATION

**Routage de paquets sur Internet.** Lorsque chaque paquet passe par une passerelle, un **routeur** étudie où le paquet doit se rendre et décide alors de la passerelle suivante où l'envoyer. Le but de chaque routeur est de propager un paquet vers un point de plus en plus près de sa destination finale.

Un des types de routage : **routage SPF (Shortest Path First)** chaque routeur gère sa propre carte de l'internet afin de mettre à jour sa table de routage en calculant les plus courts chemins entre lui et les autres destinations. Sa carte est un **graphe orienté et pondéré**, dont les sommets sont les passerelles et les arcs les connexions entre celles-ci. Chaque arc est pondéré par les dernières performances constatées sur la connexion.



## GRAPHES EULÉRIENS

**graphe connexe** : pathologies de graphes possédant des sommets isolés.

### DÉFINITION

Un chemin (resp. un circuit) d'un multi-graphe  $G$  est **eulérien** s'il passe une et une seule fois par chaque arête/arc de  $G$ .

Un tel chemin peut passer plus d'une fois par un **même sommet**.

Un chemin (resp. un circuit) eulérien est une **piste** (resp. une piste fermée) passant par chaque arête/arc de  $G$ .

Un **multi-graphe eulérien** est un graphe qui possède un circuit eulérien.

### REMARQUE

Déterminer si un graphe  $G$  possède ou non un chemin eulérien, les **boucles** de  $G$  n'ont aucune importance.



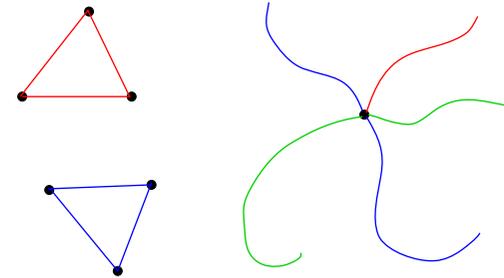
## GRAPHES EULÉRIENS



## GRAPHES EULÉRIENS

### CONDITION NÉCESSAIRE

Pour que  $G$  possède un circuit eulérien, i.e., pour que  $G$  soit eulérien, il est **nécessaire** que  $G$  soit connexe et que le degré de chaque sommet soit pair.



## GRAPHES EULÉRIENS

Condition suffisante (propriété **locale**)

### THÉORÈME

Un multi-graphe fini non orienté connexe  $G = (V, E)$  possède un circuit eulérien SSI le degré de chaque sommet est pair.

⇒ **Hyp.** : chaque sommet est de degré pair.

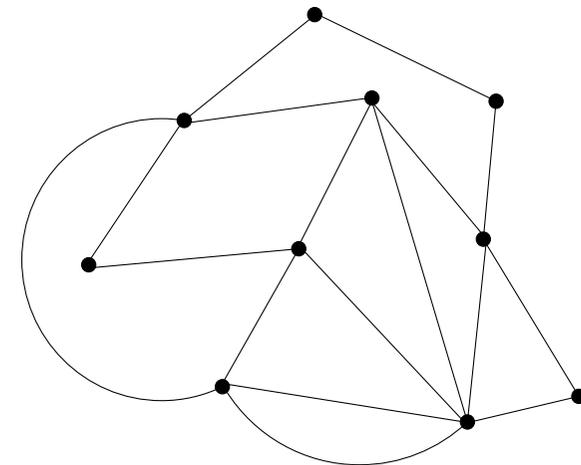
**Construction d'une piste** à partir d'un sommet  $a_1$  de  $G$ .

A chaque étape  $i \geq 1$ , choix d'un sommet  $a_{i+1}$  t.q. une arête  $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$  est sélectionnée parmi les  $\#E - i + 1$  arêtes non déjà sélectionnées.

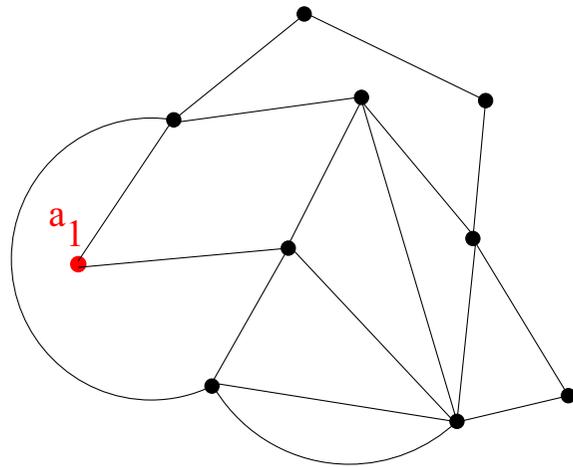
- sélection toujours possible : chaque sommet est de degré pair, "lorsqu'on aboutit dans un sommet, on peut toujours en repartir".
- la procédure s'achève : le graphe est fini.



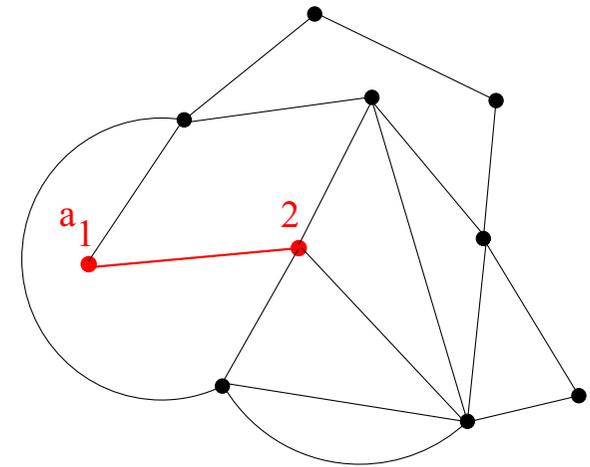
## GRAPHES EULÉRIENS



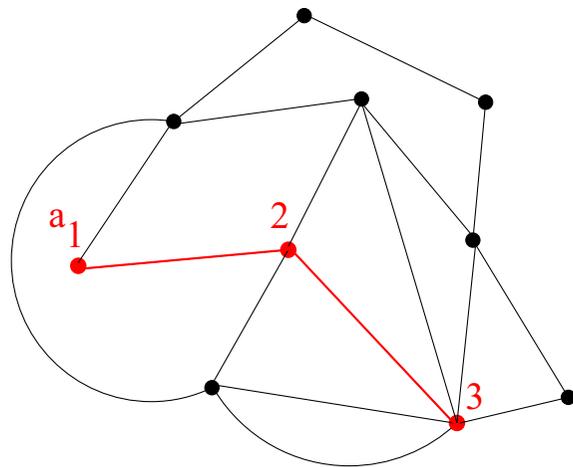
# GRAPHES EULÉRIENS



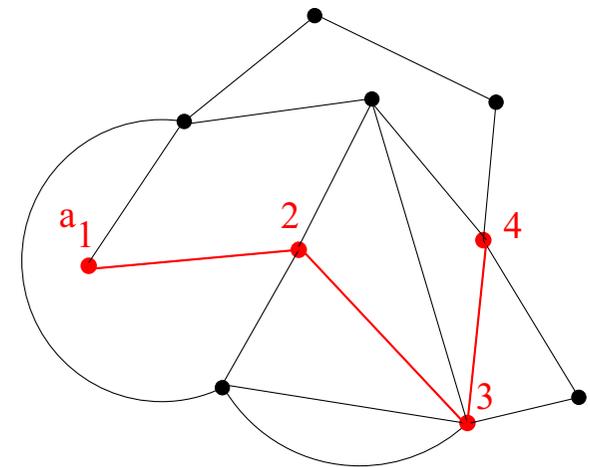
# GRAPHES EULÉRIENS



# GRAPHES EULÉRIENS



# GRAPHES EULÉRIENS



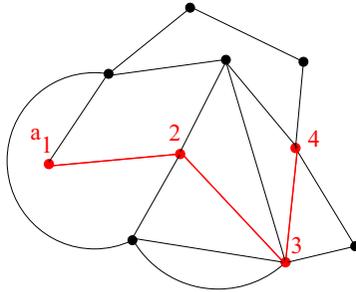
## GRAPHES EULÉRIENS

On dispose d'une piste  $P$  joignant  $a_1$  à un certain  $a_\ell$ .

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e.,  $a_\ell = a_1$ .

Si  $a_\ell$  diffère de  $a_1$ , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête  $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$ .

En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en  $a_1$ .



Si la piste fermée  $P$  est un circuit eulérien, le théorème est démontré.



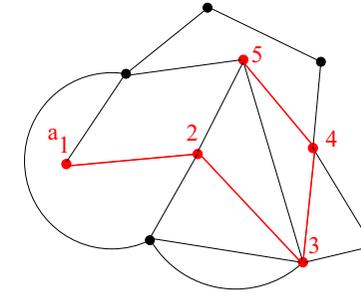
## GRAPHES EULÉRIENS

On dispose d'une piste  $P$  joignant  $a_1$  à un certain  $a_\ell$ .

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e.,  $a_\ell = a_1$ .

Si  $a_\ell$  diffère de  $a_1$ , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête  $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$ .

En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en  $a_1$ .



Si la piste fermée  $P$  est un circuit eulérien, le théorème est démontré.



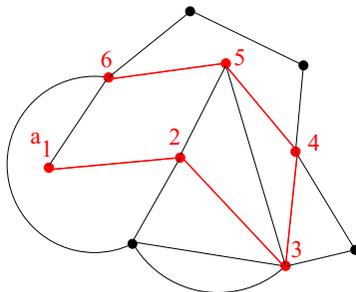
## GRAPHES EULÉRIENS

On dispose d'une piste  $P$  joignant  $a_1$  à un certain  $a_\ell$ .

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e.,  $a_\ell = a_1$ .

Si  $a_\ell$  diffère de  $a_1$ , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête  $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$ .

En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en  $a_1$ .



Si la piste fermée  $P$  est un circuit eulérien, le théorème est démontré.



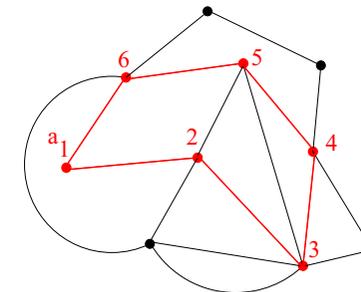
## GRAPHES EULÉRIENS

On dispose d'une piste  $P$  joignant  $a_1$  à un certain  $a_\ell$ .

On peut supposer que cette piste est fermée, i.e.,  $a_\ell = a_1$ .

Si  $a_\ell$  diffère de  $a_1$ , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête  $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$ .

En continuant de la sorte, on épuise les sommets jusqu'à revenir en  $a_1$ .

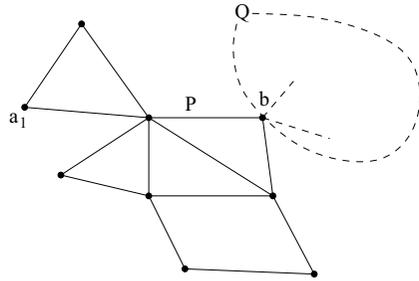


Si la piste fermée  $P$  est un circuit eulérien, le théorème est démontré.



## GRAPHES EULÉRIENS

Sinon, il existe un sommet  $b$  de  $P$  qui est l'extrémité d'un nombre pair d'arêtes n'apparaissant pas dans  $P$ .



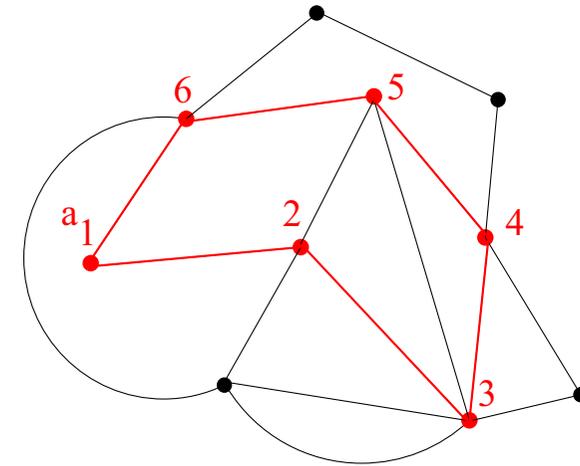
Depuis  $b$ , il est possible de construire une piste fermée  $Q$  formée uniquement d'arêtes n'apparaissant pas dans  $P$ . (même procédure, le degré de chaque sommet est encore pair.)

→ on étend la piste  $P$  en une piste plus longue  $P \cup Q$

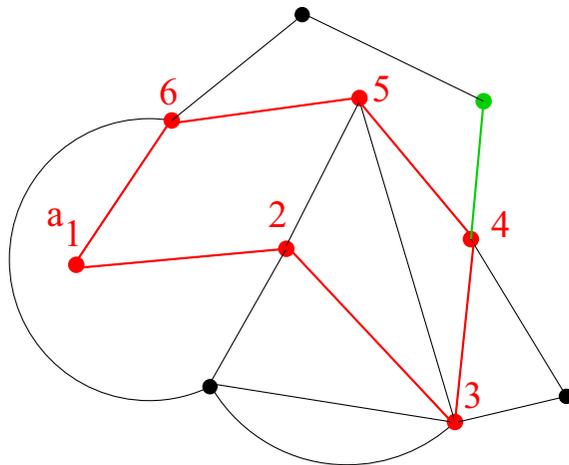
→ répéter cette étape un nombre fini de fois.



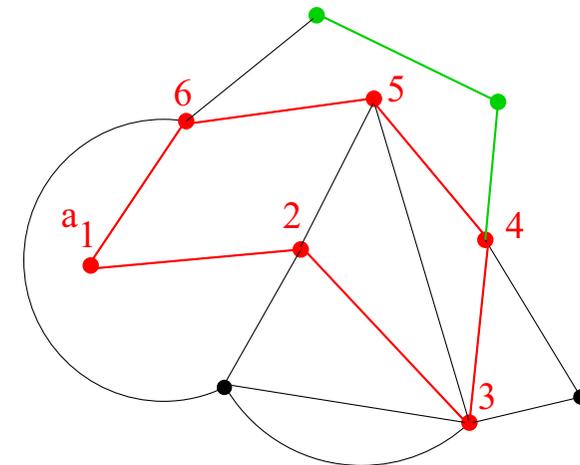
## GRAPHES EULÉRIENS



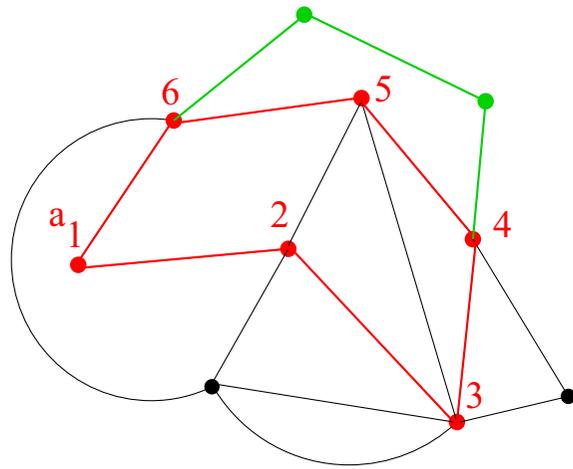
## GRAPHES EULÉRIENS



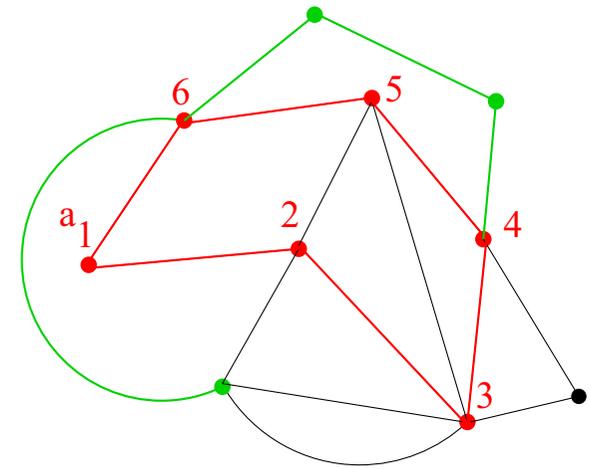
## GRAPHES EULÉRIENS



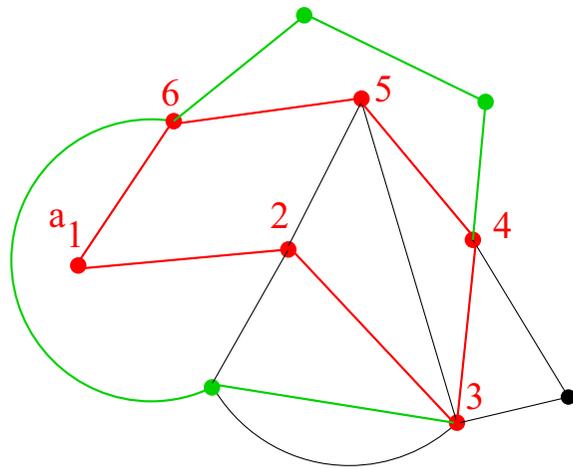
# GRAPHES EULÉRIENS



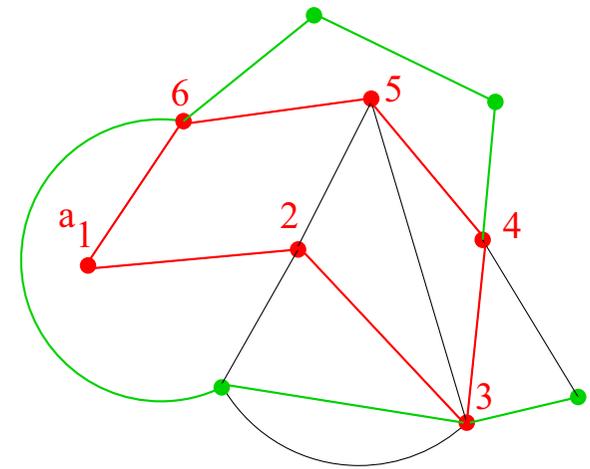
# GRAPHES EULÉRIENS



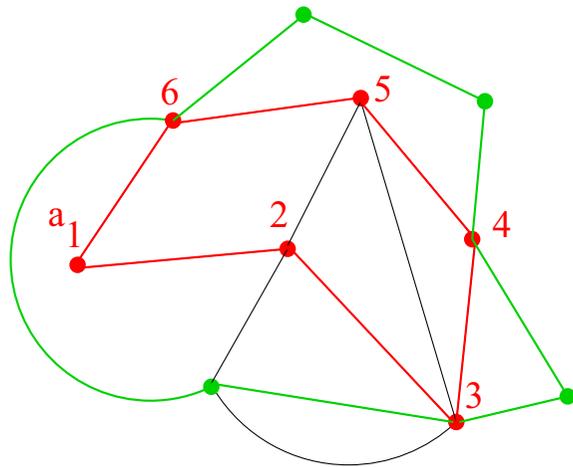
# GRAPHES EULÉRIENS



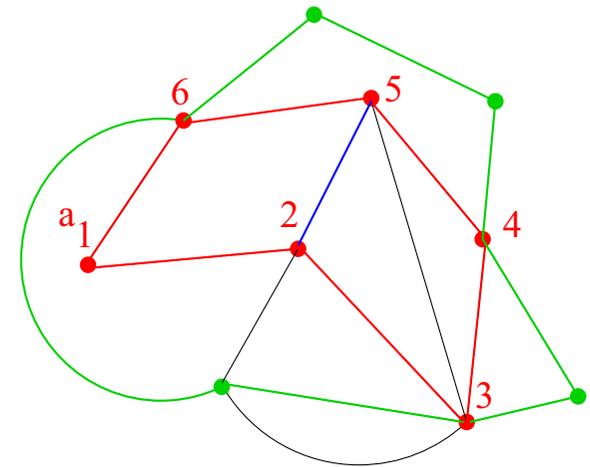
# GRAPHES EULÉRIENS



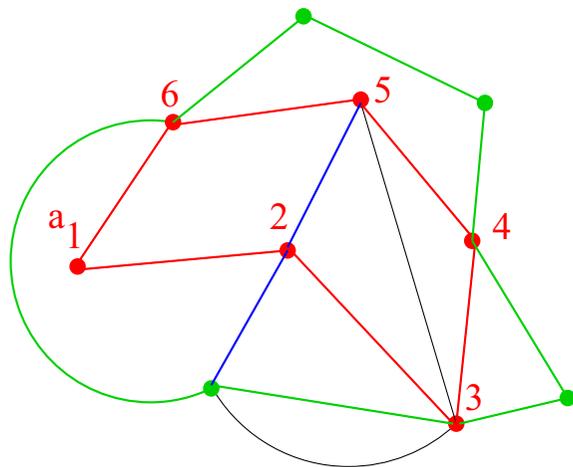
# GRAPHES EULÉRIENS



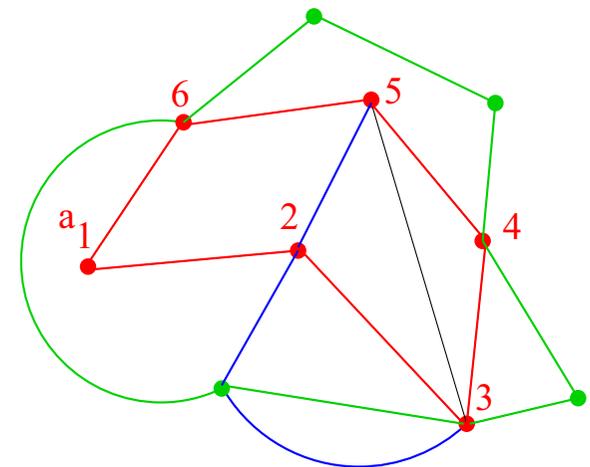
# GRAPHES EULÉRIENS



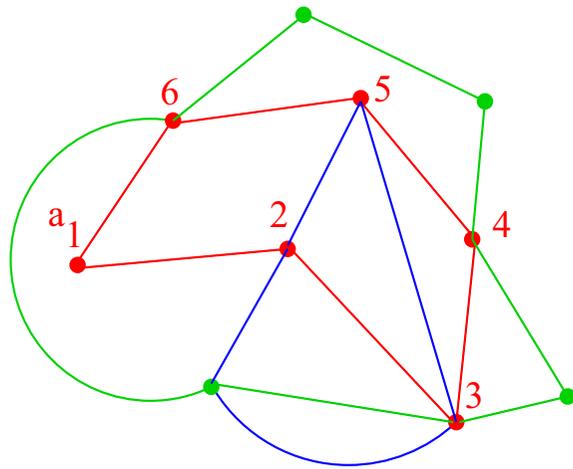
# GRAPHES EULÉRIENS



# GRAPHES EULÉRIENS



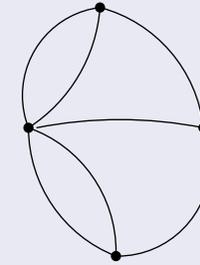
## GRAPHES EULÉRIENS



## GRAPHES EULÉRIENS

### COROLLAIRE

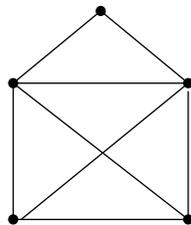
Le problème des sept ponts de Königsberg n'admet pas de solution.



## GRAPHES EULÉRIENS

### COROLLAIRE

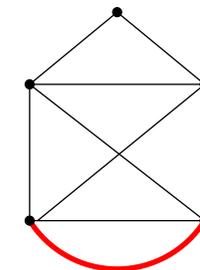
Un multi-graphe non orienté connexe possède un **chemin eulérien** joignant deux sommets  $a$  et  $b$  SSI  $a$  et  $b$  sont les deux seuls sommets de degré impair.



## GRAPHES EULÉRIENS

### COROLLAIRE

Un multi-graphe non orienté connexe possède un **chemin eulérien** joignant deux sommets  $a$  et  $b$  SSI  $a$  et  $b$  sont les deux seuls sommets de degré impair.



## GRAPHES EULÉRIENS

### THÉORÈME

Un multi-graphe fini **orienté** s.connexe  $G = (V, E)$  possède un circuit eulérien SSI  $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v)$ .

### COROLLAIRE

Un multi-graphe fini **orienté** connexe  $G = (V, E)$  possède un chemin eulérien SSI il existe deux sommets  $v_0$  et  $v_1$  tel que

- ▶ pour tout  $v \in V \setminus \{v_0, v_1\}, d^-(v) = d^+(v)$ ,
- ▶  $d^+(v_0) = d^-(v_0) + 1$ ,
- ▶  $d^-(v_1) = d^+(v_1) + 1$ .



## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS

Connexité : graphe **simple** suffit.

Algorithme naïf permettant de décider si un graphe non orienté est connexe.

Choisir au hasard un sommet  $v_0 \in V$

Composante :=  $\{v_0\}$ , New :=  $\{v_0\}$

Tant que New  $\neq \emptyset$

Voisins :=  $\emptyset$

pour tout sommet  $v$  appartenant à New

Voisins := Voisins  $\cup v(v)$

New := Voisins  $\setminus$  Composante

Composante := Composante  $\cup$  New

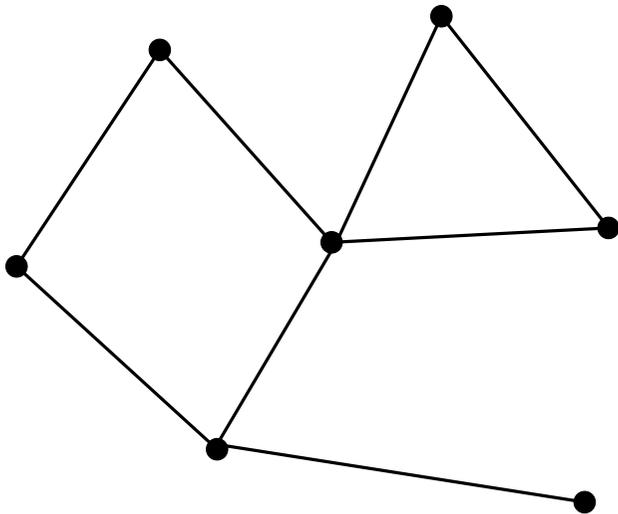
Si Composante =  $V$

alors sortie : "oui, G connexe"

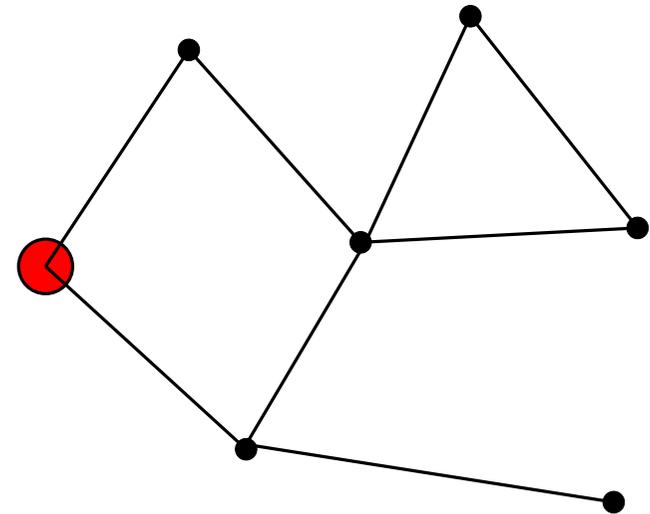
sinon sortie : "non, G non connexe"



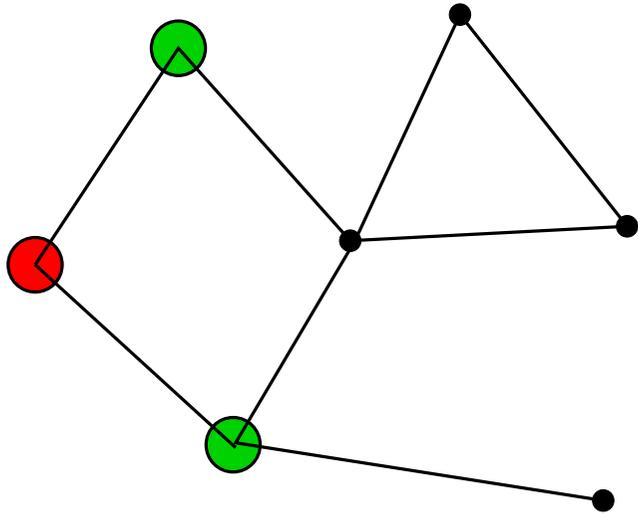
## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



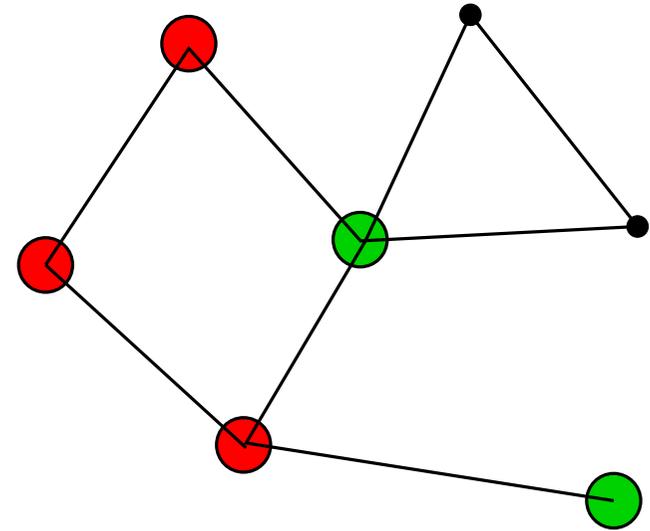
## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



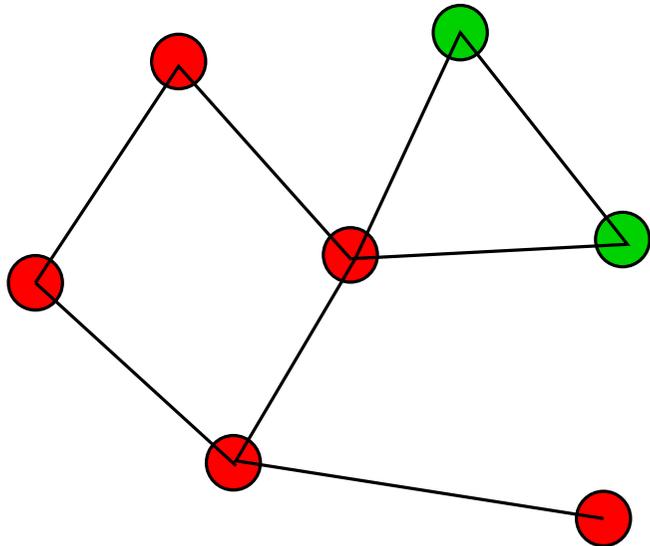
## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



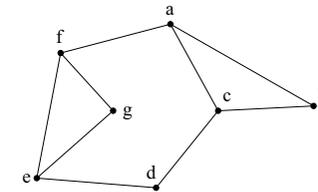
## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS



le dictionnaire des voisins

$v$	$\nu(v)$
$a$	$\{b, c, f\}$
$b$	$\{a, c\}$
$c$	$\{a, b, d\}$
$d$	$\{c, e\}$
$e$	$\{d, f, g\}$
$f$	$\{a, e, g\}$
$g$	$\{e, f\}$



## CONNEXITÉ DES GRAPHES NON ORIENTÉS

$V_0 = c.$

Composante	New	Voisins
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$ $\nu(c) = \{a, b, d\}$
$\{c\} \cup \{a, b, d\}$ $= \{a, b, c, d\}$	$\{a, b, d\} \setminus \{c\}$ $= \{a, b, d\}$	$\emptyset$ $\nu(a) \cup \nu(b) \cup \nu(d)$ $= \{a, b, c, e, f\}$
$\{a, b, c, d\} \cup \{e, f\}$ $= \{a, b, c, d, e, f\}$	$\{a, b, c, e, f\} \setminus \{a, b, c, d\}$ $= \{e, f\}$	$\emptyset$ $\nu(e) \cup \nu(f)$ $= \{a, d, e, f, g\}$
$\{a, b, c, d, e, f\} \cup \{g\}$ $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{a, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, c, d, e, f\}$ $= \{g\}$	$\emptyset$ $\nu(g) = \{e, f\}$
$\{a, b, c, d, e, f, g\} \cup \{e, f\}$ $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{e, f\} \setminus \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $= \emptyset$	

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## DÉCOMPOSITION EN COMPOSANTES F. CONNEXES

### CLÔTURE RÉFLEXIVE ET TRANSITIVE DE succ

$$\text{succ}^*(v) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{succ}^j(v) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{succ}^0(v) = v \\ \text{succ}^{j+1}(v) = \text{succ}(\text{succ}^j(v)) \end{cases}$$

$$\text{Si } G \text{ est fini, } \text{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^{\#E} \text{succ}^j(v).$$

S'il existe  $k < \#E$  tel que  $\text{succ}^k(v) = \text{succ}^{k+1}(v)$ , alors

$$\text{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^k \text{succ}^j(v).$$

$$\forall a, b \in V, \quad a \rightarrow b \Leftrightarrow b \in \text{succ}^*(a).$$

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## DÉCOMPOSITION EN COMPOSANTES F. CONNEXES

### CLÔTURE RÉFLEXIVE ET TRANSITIVE DE pred

Idem avec  $\text{pred}^*$ .

$$\forall a, b \in V, \quad b \rightarrow a \Leftrightarrow b \in \text{pred}^*(a).$$

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \in \text{succ}^*(a) \cap \text{pred}^*(a).$$

### ALGORITHME

L'algorithme précédent peut facilement être adapté pour calculer  $\text{succ}^*(a)$  (resp.  $\text{pred}^*(a)$ ). Il suffit principalement d'initialiser les variables Composante et New à  $\{a\}$  et de remplacer  $\nu(v)$  par  $\text{succ}(v)$  (resp.  $\text{pred}(v)$ ).

En recherchant l'intersection des deux ensembles, on détermine la composante f. connexe du sommet  $a$ .

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

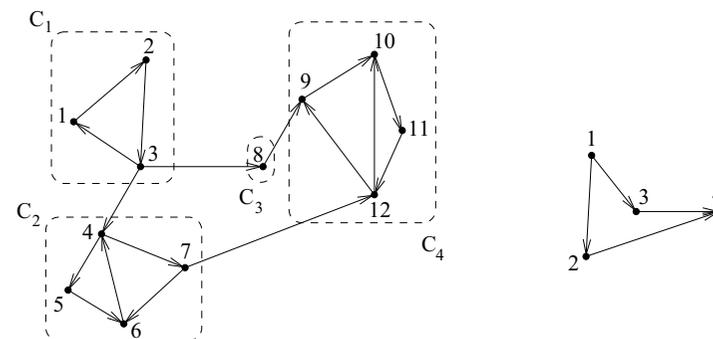
## DÉCOMPOSITION EN COMPOSANTES F. CONNEXES

### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté.

**graphe acyclique des composantes** ou **condensé** de  $G$ ,  
**sommets** = les composantes f. connexes de  $G$ .

**arc** entre deux composantes f. connexes  $A$  et  $B$ , s'il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $a \rightarrow b$ .



◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍 ↻

## DÉCOMPOSITION EN COMPOSANTES F. CONNEXES

### REMARQUE

S'il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $a \rightarrow b$ , alors il n'existe aucun  $a' \in A$  ni aucun  $b' \in B$  tels que  $b' \rightarrow a'$ .

Sinon  $A \cup B$  serait alors une composante f. connexe de  $G$ . Impossible vu la maximalité des composantes connexes.

le graphe des composantes **ne contient pas de cycle**.



## DÉCOMPOSITION EN COMPOSANTES F. CONNEXES

### THÉORÈME

Soit  $G$  un digraphe (simple) t.q.  $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v)$ . Alors,  $G$  est **f. connexe** SSI il est **s. connexe**.

f. connexe  $\Rightarrow$  s. connexe.

$\Leftarrow G$  s.connexe et  $\forall v \in V, d^+(v) = d^-(v)$   
 $G$  possède un **circuit eulérien** :  $G$  est f. connexe.



## SOUS-GRAPHE

### DÉFINITION

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes (orientés ou non). Le graphe  $G'$  est un **sous-graphe** de  $G$  si

- ▶  $V' \subseteq V$ ,
- ▶  $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ .

### REMARQUE

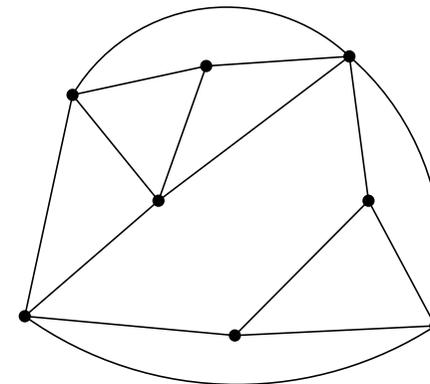
Si on enlève un sommet  $v$  de  $G$ , il faut enlever tous les arcs (ou arêtes) incidents à  $v$ .

### DÉFINITION

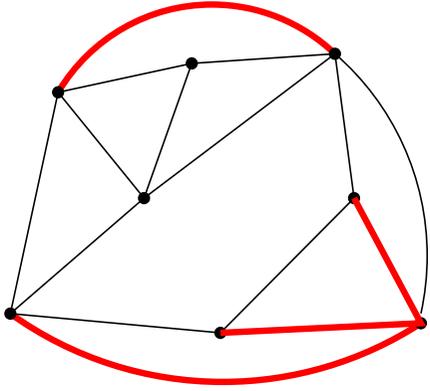
$G'$  est un **sous-graphe propre** de  $G$  si  $E' \subsetneq E$  ou  $V' \subsetneq V$ .



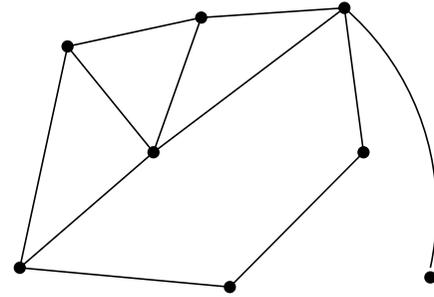
## SOUS-GRAPHE



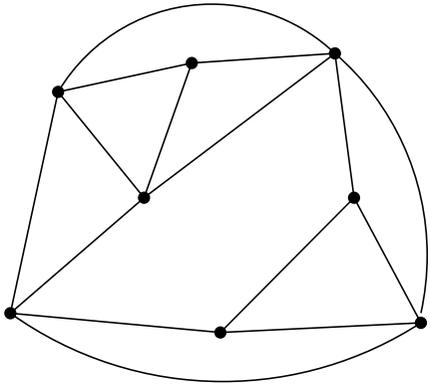
# SOUS-GRAPHE



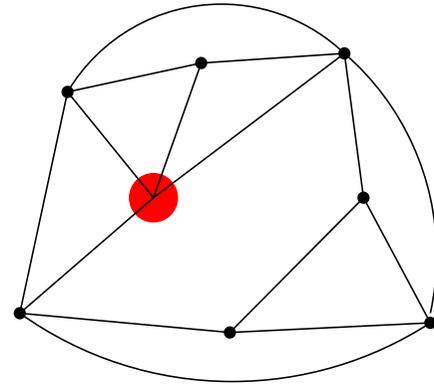
# SOUS-GRAPHE



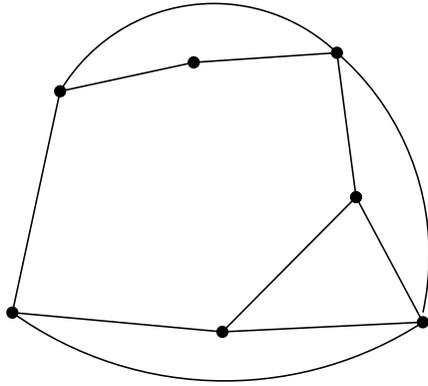
# SOUS-GRAPHE



# SOUS-GRAPHE



## SOUS-GRAPHE



## SOUS-GRAPHE

### NOTATION

$G - e$  (resp.  $G - v$ ) le sous-graphe  $G'$  de  $G$  obtenu en supprimant l'arc (ou l'arête)  $e$  (resp. le sous-graphe  $G'$  obtenu en supprimant le sommet  $v$  et les arcs (ou les arêtes) adjacents).

$G = G' + e$  (resp.  $G = G' + v$ ) : le graphe obtenu par adjonction à  $G'$  d'une arête, d'un sommet.

Si  $W = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ , alors  $G - W$  est le sous-graphe

$$(\dots((G - v_1) - v_2) \dots - v_{k-1}) - v_k := G - v_1 - \dots - v_k.$$

On procède de même pour un ensemble fini d'arcs (ou d'arêtes) et on introduit une notation  $G - F$  pour  $F \subseteq E$ .



## SOUS-GRAPHE

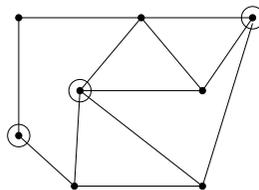
### DÉFINITION

$W \subseteq V$ . Le **sous-graphe** de  $G$  **induit** par  $W$  est le sous-graphe  $G' = (W, E')$  avec  $E' = E \cap (W \times W)$ .

### DÉFINITION

Si  $W \subseteq V$  est tel que le sous-graphe induit par  $W$  ne contient aucune arête, alors les sommets de  $W$  sont dits **indépendants**.

Le nombre maximal de sommets indépendants de  $G$  :  $\alpha(G)$



## SOUS-GRAPHE

### DÉFINITION

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $G' = (V', E')$  un de ses sous-graphes.

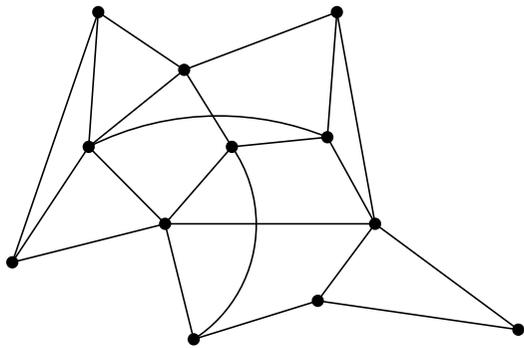
$G'$  est un **sous-graphe couvrant**  $G$ , si  $V' = V$  et si

$$\forall v \in V, \exists z \in V : \{z, v\} \in E'.$$

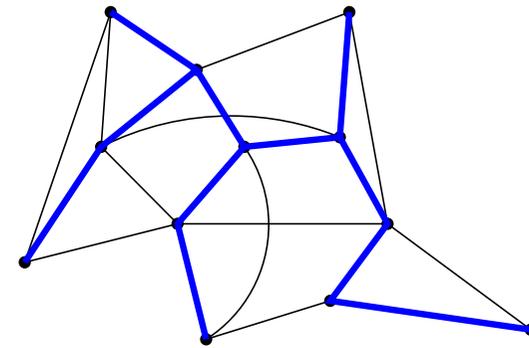
On dira que  $E'$  est une **couverture** (des sommets) de  $G$ . Autrement dit, tout sommet de  $G$  est une extrémité d'une arête de  $E'$ .



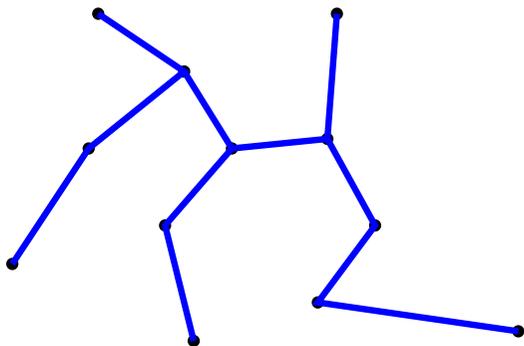
## SOUS-GRAPHE



## SOUS-GRAPHE



## SOUS-GRAPHE



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### DÉFINITION

Soit  $H = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe).

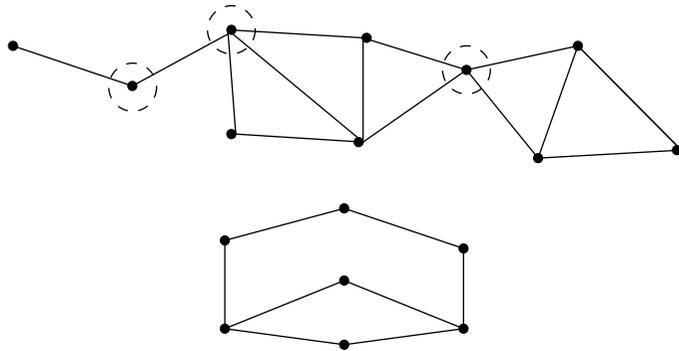
$v$  est un **point d'articulation**, si  $H - v$  n'est plus connexe (ou réduit à un point).

$\#$  comp. connexes de  $H - v > \#$  comp. connexes de  $H$ .

Si  $H$  connexe et aucun point d'articulation, alors  $H$  est **au moins 2-connexe**.



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### DÉFINITION

$W \subset V$  **ensemble d'articulation** du multi-graphe connexe  $H = (V, E)$  si  $H - W$  n'est plus connexe (ou réduit à un sommet).

Pour un multi-graphe  $H$  quelconque,  $W$  est un **ensemble d'articulation** si  $H - W$  a plus de composantes connexes que  $H$ .

### DÉFINITION

Pour un graphe connexe  $H$ ,

$\kappa(H)$  = taille minimale d'un ensemble d'articulation de  $H$ ,

$$\kappa(H) = \min\{\#W \mid W \subseteq V : H - W \text{ disconnecté ou réduit à un sommet}\}.$$

$\kappa(K_n) = n - 1$ . Si  $G$  **non connexe**, on pose  $\kappa(G) = 0$ .



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### TERMINOLOGIE

Si  $\kappa(H) = k \geq 1$ ,  $H$  est  **$k$ -connexe**.

$\kappa(G) = k$  : quels que soient les  $k - 1$  sommets supprimés,  $G$  reste connexe mais il est possible de supprimer  $k$  sommets "bien choisis" pour disconnecter  $G$  (ou le rendre trivial).

graphe "**au moins 2-connexe**" :  $\kappa(G) \geq 2$

$G$  est **au moins  $k$ -connexe** :  $\kappa(G) \geq k$ .

### REMARQUE

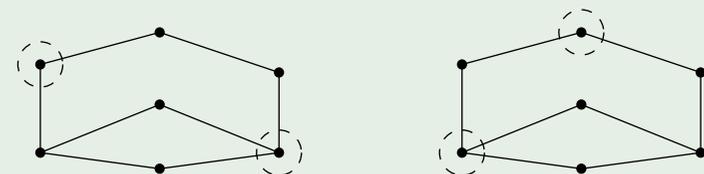
$\kappa(G) = k + 1 \Rightarrow \kappa(G) \neq k$  mais  $\kappa(G) \geq k + 1 \Rightarrow \kappa(G) \geq k$

Si  $G$  est **au moins  $(k + 1)$ -connexe**, alors il est **au moins  $k$ -connexe**



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### UN GRAPHE 2-CONNEXE



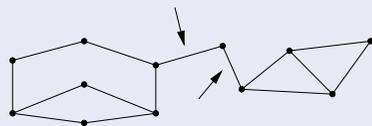
## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### DÉFINITION

Soit  $H = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté).

$e$  est une **arête de coupure** si  $H - e$  n'est plus connexe.

Au moins une extrémité d'une arête de coupure est évidemment un point d'articulation de  $H$ .



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

Algorithme de Fleury permettant de construire un circuit eulérien (à supposer qu'un tel circuit existe).

Choisir un sommet  $v_0 \in V$

$i := 1$

Répéter tant que possible

Choisir une arête  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in V$  telle que

▶  $e_i \neq$  arêtes déjà choisies  $e_1, \dots, e_{i-1}$

▶ autant que possible,  $e_i$  ne doit pas être

une **arête de coupure** de  $G_i = G - \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$

$i := i + 1$

Cet algorithme fournit une suite d'arêtes  $e_1, e_2, \dots$  qui constituent un circuit eulérien.



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### PROPOSITION

Une arête  $e$  est une arête de coupure du graphe  $H = (V, E)$  SSI  $e$  n'appartient à aucune piste fermée de  $H$ .

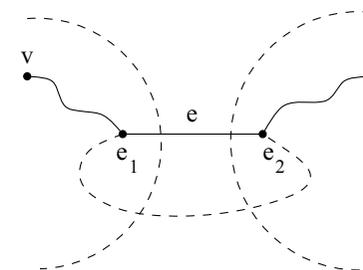
⇒ Si  $e$  est une arête de coupure

∃ sommets  $u$  et  $v$  connectés dans  $H$  mais qui ne sont plus connectés dans  $H - e$ .



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

Il existe un chemin appelons-le joignant  $u$  et  $v$  qui passe par  $e$ .



Dans  $H - e$ ,

une partie de ce chemin joint  $u$  à une extrémité de  $e$  :  $e_2$

l'autre partie du chemin joint  $v$  à l'autre extrémité de  $e$  :  $e_1$ .

**P.A.** Si  $e$  appartient à une piste fermée, il existe un chemin joignant  $e_1$  à  $e_2$  et ne passant pas par  $e$ .

$u$  et  $v$  sont encore connectés dans  $H - e$ , impossible !



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

Réciproque. Supposons que  $e = \{e_1, e_2\}$  n'est pas une arête de coupe.

Si  $H$  est connexe,  $H - e$  l'est encore.

Ainsi, il existe dans  $H - e$  une piste joignant  $e_1$  et  $e_2$ .

Dans  $H$ ,  $e$  appartient à une piste fermée.



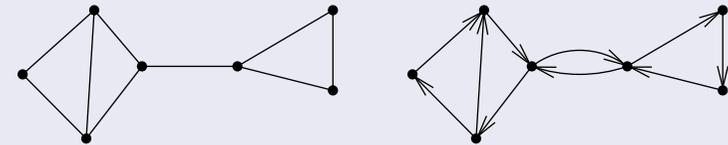
## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### PROBLÈME DES SENS UNIQUES

Grphe non orienté connexe. On désire orienter ses arêtes pour obtenir un graphe f. connexe.

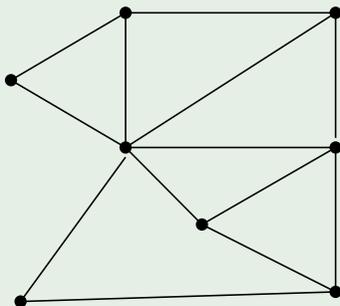
Les arêtes de coupe doivent nécessairement être remplacées par deux arcs (pas de sens unique).

Les autres arêtes appartiennent toutes à une piste fermée qu'il est aisé d'orienter (création de sens uniques).



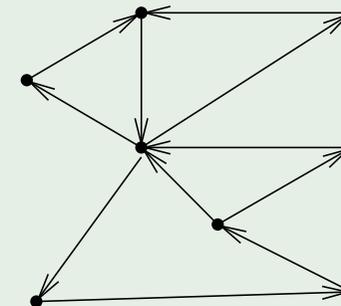
## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### UN AUTRE EXEMPLE



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### UN AUTRE EXEMPLE

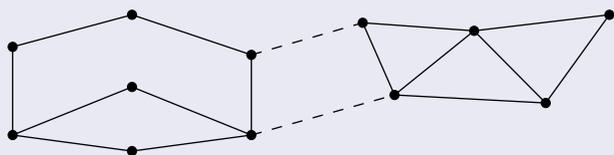


## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### DÉFINITION

Soit  $H = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe (ou une composante connexe d'un multi-graphe non orienté).

$F \subset E$  est un **ensemble de coupure**, une **coupe**, une **coupure** si  $F$  est un ensemble **minimal** (pour l'inclusion) tel que  $H - F$  n'est pas connexe.



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### DÉFINITION

La taille minimale d'une coupe de  $H$  :  $\lambda(H)$

$$\lambda(H) = \min\{\#F \mid F \subseteq E : H - F \text{ disconnecté}\}.$$

Si  $H$  n'est pas connexe :  $\lambda(H) = 0$ .

on rencontre souvent la notation  $\kappa'(H)$ .

$H$  connexe et  $\lambda(H) = k$  :  $H$  est  **$k$ -connexe (pour les arêtes)**

Si on enlève  $k-1$  arêtes à un graphe  $k$ -connexe (pour les arêtes), il reste connexe ; par contre, il est possible d'enlever  $k$  arêtes pour le disconnecter.

!!  $k$ -connexité  $\neq$   $k$ -connexité pour les arêtes !!

$G$  est **au moins  $k$ -connexe (pour les arêtes)**, si  $\lambda(G) \geq k$ .



### THÉORÈME DE ROBBINS

On peut orienter un graphe connexe pour le rendre f. connexe SSI ce graphe est au moins 2-connexe pour les arêtes.

**Rappels :**

### PROBLÈME DES SENS UNIQUES

Les arêtes de coupure doivent nécessairement être remplacées par deux arcs (pas de sens unique).

Les autres arêtes appartiennent toutes à une piste fermée qu'il est aisé d'orienter (création de sens uniques).

### PROPOSITION

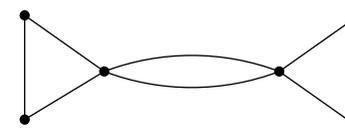
Une arête  $e$  est une arête de coupure du graphe  $H = (V, E)$  SSI  $e$  n'appartient à aucune piste fermée de  $H$ .

**Conclusion :** toute arête appartient à une piste fermée : au moins 2-connexe pour les arêtes

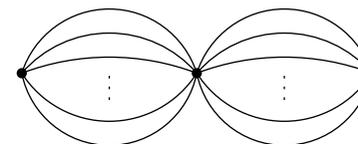


## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

$\kappa(G) = 1$  et  $\lambda(G) = 2$  :

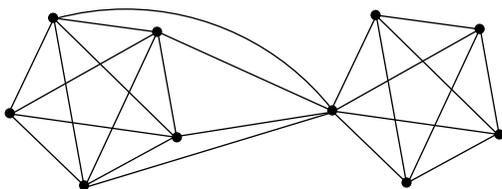


$\kappa(G) = 1$  et  $\lambda(G) = k$  :



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

Même avec un graphe simple : **pas de lien** entre  $\lambda(G)$  et  $\kappa(G)$ .  
Ici,  $\lambda(G) = 4$  et  $\kappa(G) = 1$  :



### REMARQUE

Si  $\deg v = k$ , supprimer les  $k$  arêtes incidentes à  $v$  isole  $v$

$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v).$$



## COUPES, POINTS D'ARTICULATION, $k$ -CONNEXITÉ

### THÉORÈME DE WHITNEY (1932)

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

plutôt que de supprimer une arête, il suffit d'en supprimer au plus une extrémité.

### REMARQUE

Si  $F$  est une coupure d'un graphe  $G$  connexe, alors, de par la minimalité de  $F$ ,  $G - F$  possède 2 composantes connexes et l'ensemble des sommets de  $G$  est partitionné en deux sous-ensembles correspondant à ces deux composantes.

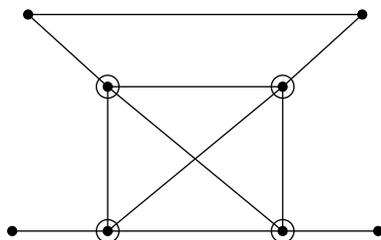


### DÉFINITION

Une **clique** d'un graphe non orienté et simple  $G = (V, E)$  est un sous-graphe complet de  $G$ .

La **taille** d'une clique est le nombre de sommets qui la composent.

$\omega(G)$  = taille maximale d'une clique de  $G$ .



## THÉORÈME(S) DE MENGER

**graphes simples non orientés** : aucune différence pour des multi-graphes.

### DÉFINITION

Soient un graphe  $G = (V, E)$  et  $u, v$  deux sommets distincts de  $G$ . Un sous-ensemble  $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$  **sépare**  $u$  et  $v$  s'il n'existe aucun chemin joignant  $u$  et  $v$  dans le sous-graphe de  $G$  induit par  $V \setminus S$ .

### DÉFINITION

Deux chemins joignant  $u$  et  $v$  sont **indépendants** si les seuls sommets qu'ils ont en commun sont  $u$  et  $v$ .



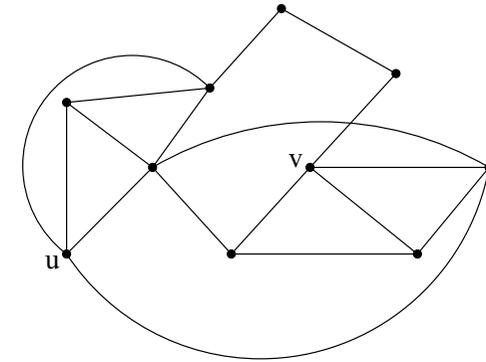
## THÉORÈME(S) DE MENGER

### THÉORÈME DE MENGER (1927)

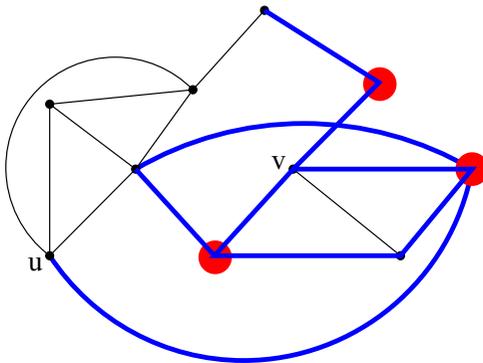
Soient  $u, v$  deux sommets non adjacents d'un graphe connexe  $G = (V, E)$ . La **taille minimum d'un sous-ensemble de sommets** séparant  $u$  et  $v$  est égale au **nombre maximum de chemins deux à deux indépendants** joignant  $u$  et  $v$ .



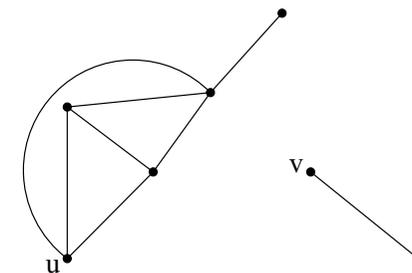
## THÉORÈME(S) DE MENGER



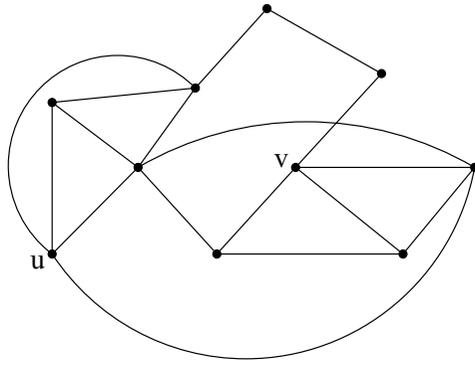
## THÉORÈME(S) DE MENGER



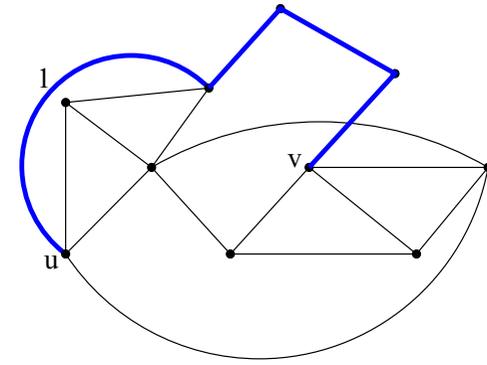
## THÉORÈME(S) DE MENGER



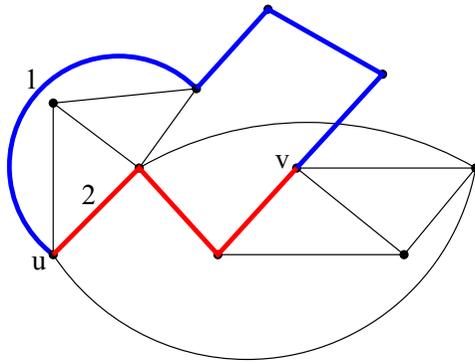
# THÉORÈME(S) DE MENGER



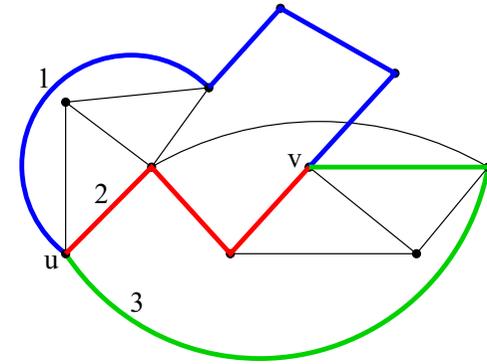
# THÉORÈME(S) DE MENGER



# THÉORÈME(S) DE MENGER



# THÉORÈME(S) DE MENGER



## THÉORÈME(S) DE MENGER

### COROLLAIRE, MENGER (1927)

Soit  $k \geq 2$ . Un graphe  $G = (V, E)$  est au moins  $k$ -connexe (pour les sommets) SSI toute paire de sommets distincts de  $G$  est connectée par au moins  $k$  chemins indépendants.

$\Leftarrow$  Si toute paire de sommets est connectée par au moins  $k$  chemins indépendants, alors  $\kappa(G) \geq k$ .



## THÉORÈME(S) DE MENGER

$\Rightarrow$  P.A. Supposons  $\kappa(G) \geq k$  et qu'il existe 2 sommets  $u$  et  $v$  joints par au plus  $k - 1$  chemins indépendants.

Par le thm de Menger :  $u$  et  $v$  sont adjacents,  $e = \{u, v\} \in E$ .

Dans  $G - e$ ,  $u$  et  $v$  sont joints par au plus  $k - 2$  chemins indépendants.

Dans  $G - e$ ,  $u$  et  $v$  ne sont pas adjacents.

Par le thm de Menger : ils peuvent être **séparés**, dans  $G - e$ , par un ensemble  $S$  de taille minimale t.q.  $\#S \leq k - 2$ .

Puisque  $\kappa(G) \geq k$ ,  $\#V > k$ .

Il existe un sommet  $w \notin S \cup \{u, v\}$ .

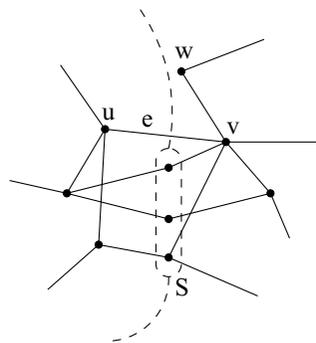
### RAPPEL : THÉORÈME DE MENGER (1927)

Soient  $u, v$  deux sommets non adjacents d'un graphe connexe  $G = (V, E)$ . La **taille minimum d'un sous-ensemble de sommets** séparant  $u$  et  $v$  est égale au **nombre maximum de chemins deux à deux indépendants** joignant  $u$  et  $v$ .



## THÉORÈME(S) DE MENGER

Dans  $(G - e) - S$ , il ne peut y avoir simultanément 2 chemins joignant  $w$  respectivement à  $u$  et à  $v$  car sinon dans  $(G - e) - S$  on aurait des chemins joignant  $u$  à  $w$  et  $w$  à  $v$ , alors  $u$  et  $v$  ne seraient pas séparés par  $S$  !  
Supposons qu'aucun chemin ne joint  $w$  et  $u$  dans  $(G - e) - S$ . L'ensemble  $S \cup \{v\}$  possède (au plus)  $k - 1$  éléments et **sépare  $w$  et  $u$  dans  $G$** . Ceci contredit le fait que  $\kappa(G) \geq k$ .



## THÉORÈME(S) DE MENGER

### RÉSULTATS EN TERMES D'ARÊTES

Un graphe est au moins  $k$ -connexe pour les arêtes SSI toute paire de sommets est connectée par au moins  $k$  chemins ne partageant aucune arête.



## THÉORIE DES GRAPHES (3)

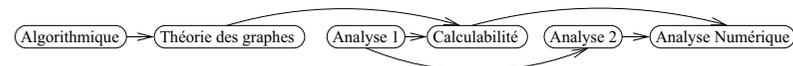
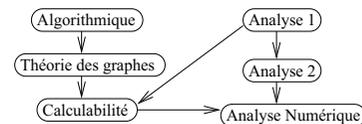
Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2006–2007



## TRI TOPOLOGIQUE



déterminer une indexation des sommets d'un graphe orienté sans cycle de manière telle que s'il existe un arc de  $v_i$  à  $v_j$ , alors  $i < j$ .



## TRI TOPOLOGIQUE

cas des graphes simples

### LEMME

Si un graphe simple orienté  $G = (V, E)$  est sans cycle, alors  $\exists v$  tel que  $d^-(v) = 0$  (resp.  $d^+(v) = 0$ ).

Considérons un chemin simple  $(x_1, \dots, x_k)$  de  $G$  de longueur maximale déterminé par des sommets de  $G$ .

Si  $d^-(x_1) > 0$ , alors il existe  $y \in \text{pred}(x_1)$ .

Si  $y =$  un des  $x_j$ , on aurait un cycle  $(y, x_1, \dots, x_j)$ , impossible.

Or par maximalité du chemin  $(x_1, \dots, x_k)$ , il n'est pas possible d'avoir un sommet distinct des  $x_j$  et tel que  $(y, x_1) \in E$ .



## TRI TOPOLOGIQUE

### PROPOSITION

Un graphe simple orienté  $G = (V, E)$  est sans cycle SSI  $\exists v \in V$  tel que  $d^-(v) = 0$  et  $\forall v$  tel que  $d^-(v) = 0$ , le graphe  $G - v$  est sans cycle.

$\Rightarrow$  Si  $G$  est sans cycle, on peut appliquer le lemme précédent. Il existe un sommet  $v$  tel que  $d^-(v) = 0$ .

De plus, tout sous-graphe  $G - v$  d'un graphe sans cycle  $G$  est sans cycle.

$\Leftarrow$  Soit  $v$  un sommet tel que  $d^-(v) = 0$ . Par hypothèse,  $G - v$  est sans cycle.

Si  $G$  possède un cycle, ce dernier doit passer par  $v$ . Si un cycle passe par  $v$ ,  $d^-(v) \geq 1$ . Impossible !



## TRI TOPOLOGIQUE

Algorithme permettant de décider si un graphe est sans cycle.

Tant qu'il existe  $v \in V$  tel que  $d^-(v)=0$ ,

$G := G - v$

Si  $G=\emptyset$

alors sortie : "oui,  $G$  sans cycle"

sinon sortie : "non,  $G$  possède un cycle"

### COMPLEXITÉ

Si on implémente cet algorithme à l'aide de listes d'adjacence, détecter  $v$  t.q.  $d^-(v) = 0$  nécessite de parcourir l'ensemble du graphe.

Un tel **parcours** est effectué **à chaque étape de la boucle**.

Complexité est **quadratique en  $\#E + \#V$** .



## TRI TOPOLOGIQUE

### THÉORÈME

Le graphe simple orienté  $G = (V, E)$  est **sans cycle SSI** il est possible d'énumérer les sommets de  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  t.q.  $\forall i = 1, \dots, n$ , le demi-degré entrant de  $v_i$  restreint au graphe  $G_i = G - v_1 - \dots - v_{i-1}$  soit nul :  $d_{G_i}^-(v_i) = 0$ .

$\Rightarrow$  Supposons  $G$  sans cycle.

Par le lemme ...,  $\exists v_1$  de  $G = G_1$  tel que  $d^-(v_1) = d_{G_1}^-(v_1) = 0$ .

Par la prop...,  $G_1 - v_1 = G_2$  est sans cycle.

Par le lemme ...,  $\exists v_2$  tel que  $d_{G_2}^-(v_2) = 0$ .

$\vdots$

De proche en proche, on obtient l'énumération proposée.



## TRI TOPOLOGIQUE

$\Leftarrow$  Supposons disposer d'une énumération des sommets ayant les propriétés indiquées. Procédons par récurrence.

$G_n$  est restreint à l'unique sommet  $v_n$  : **sans cycle**.

$G_{n-1}$  contient les sommets  $v_n$  et  $v_{n-1}$  et  $d_{G_{n-1}}^-(v_{n-1}) = 0$ .

$G_{n-1}$  possède au mieux un arc de  $v_{n-1}$  à  $v_n$  : **sans cycle**.

Appliquons ce raisonnement pour une **étape  $i$  quelconque**.

Si le graphe  $G_{i+1}$  est sans cycle,

alors  $G_i$  se compose du graphe  $G_{i+1}$  auquel on ajoute  $v_i$

et éventuellement des arcs de  $v_i$  vers les sommets de  $G_{i+1}$ .

On en conclut que  $G_i$  est **sans cycle**.



## TRI TOPOLOGIQUE

### ALGORITHME BASÉ SUR LE THM.

La variable  $d$  associée à chaque sommet du graphe permet de stocker le demi-degré entrant du sommet (par rapport au graphe envisagé au moment de la construction).

Pour tout  $v \in V$ , initialiser  $d(v)=0$

Pour tout  $v \in V$ ,

    Pour tout  $w \in \text{succ}(v)$ ,  $d(w)=d(w)+1$

aTraiter :=  $\emptyset$

nbSommet := 0

Pour tout  $v \in V$ ,

    Si  $d(v) = 0$ , alors

        aTraiter = aTraiter  $\cup \{v\}$

        nbSommet := nbSommet + 1



## TRI TOPOLOGIQUE

```
Tant que aTraiter ≠ ∅, faire
  Soit v, le premier élément de aTraiter
  aTraiter := aTraiter \ {v}
  Pour tout w ∈ Succ(v), faire
    d(w)=d(w)-1
    si d(w)=0, alors
      aTraiter=aTraiter∪{w}
      nbSommet := nbSommet+1
Si nbSommet=#V
  alors sortie : "oui, G sans cycle"
  sinon sortie : "non, G possède un cycle"
```

### IDÉE

Si  $v$  est enlevé de  $aTraiter$ ,  $v$  est énuméré.  
Lorsqu'un sommet est traité, on le supprime du graphe et on modifie en conséquence les demi-degrés entrants.  
Si tous les sommets ont été traités, le graphe est sans cycle.



## TRI TOPOLOGIQUE

### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple orienté. Un **tri topologique** de  $G$  est une énumération  $v_1, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  t.q. si  $(v_i, v_j)$  est un arc de  $G$ , alors  $i < j$ .

### THÉORÈME

Un graphe simple orienté admet un **tri topologique** SSI il est sans cycle.

Si un graphe possède un cycle, alors quelle que soit l'énumération de ses sommets, il ne peut s'agir d'un tri topologique.

Si un graphe est sans cycle, alors une énumération de ses sommets donnant lieu à un tri topologique est donnée par le thm précédent.



## TRI TOPOLOGIQUE

### REMARQUE

Il n'y a pas qu'un seul tri topologique pour un graphe donné  $G = (V, E)$ . En effet, si on dénote par

$$S(G) = \{v \in V \mid d^-(v) = 0\}$$

l'ensemble des *sources* de  $G$ , alors l'ensemble des tris topologiques de  $G$  est donné par la formule récursive suivante

$$\Pi(G) = \bigcup_{v \in S(G)} \{v.\sigma \mid \sigma \in \Pi(G - v)\}$$

où  $\sigma$  est un tri topologique de  $G - v$  et où  $v.\sigma$  désigne l'énumération des sommets de  $G$  en débutant par  $v$  puis en suivant l'énumération prescrite par  $\sigma$ .



## ARBRES

### DÉFINITION

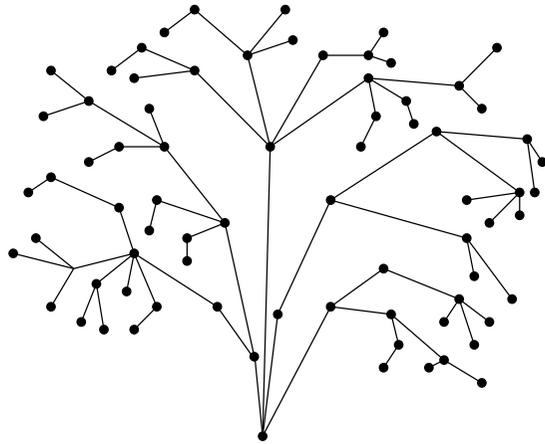
Un graphe simple non orienté  $A = (V, E)$  est un **arbre** s'il est connexe et sans cycle

(sous-entendu, un "véritable" cycle : une piste fermée, pas un cycle "artificiel" comme un trivial  $(\{a, b\}, \{b, a\})$  ; imposer l'absence d'une piste fermée évite de telles arêtes doublées et on pourrait de manière équivalente imposer l'absence de circuit simple).

Une **forêt** est un graphe simple non orienté dont chaque composante connexe est un arbre.

Un arbre  $A = (V, E)$  est qualifié de  **$n$ -aire** si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $\deg(v) \leq n$ .





## PROPOSITION

Soit  $G = (V, E)$  un arbre ayant  $n$  sommets.

- ▶ Toute paire de sommets distincts de  $G$  est connectée par exactement un chemin simple.
- ▶ Soit  $e \in (V \times V) \setminus E$  qui n'est pas une boucle. Le graphe  $G + e$  contient un cycle (i.e., une piste fermée), c'est-à-dire,  $G + e$  n'est plus un arbre.
- ▶ Le graphe  $G$  a exactement  $n - 1$  arêtes.

## PROPOSITION

Un graphe  $G = (V, E)$  simple connexe est un arbre SSI chacune de ses arêtes est une arête de coupure.

Soient  $G$  un **arbre** et  $e$  une de ses arêtes. Puisque  $G$  est sans cycle, il ne possède **aucune piste fermée**.

Vu prop...,  $e$  est une arête de coupure.

**Inversement**, si  $G$  est un graphe connexe possédant une piste fermée alors, par la prop..., les arêtes de cette piste ne peuvent être des arêtes de coupure.

## COROLLAIRE

Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.

Soient  $G = (V, E)$  un graphe connexe et  $C = (V, E')$  un sous-graphe couvrant connexe **minimal** (i.e., on ne peut pas remplacer  $E'$  par un sous-ensemble strict et garder connexité).

Vu la minimalité de  $C$ , chacune de ses arêtes est une arête de coupure de  $C$ . Par la prop. précédente :  $C$  est un arbre.

## COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (simple non orienté) connexe, alors  $\#E \geq \#V - 1$ .

$G$  possède un sous-arbre couvrant  $C = (V, E')$ . De là, il vient

$$\#E \geq \#E' = \#V - 1$$

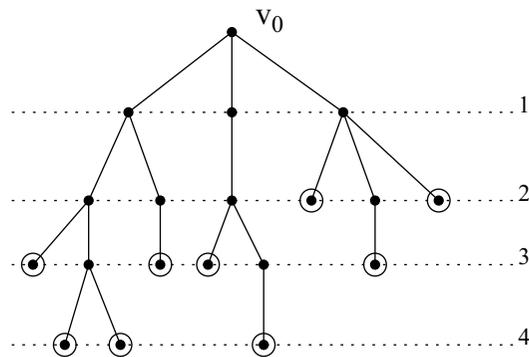
## ARBRES

### DÉFINITION

Un arbre  $A = (V, E)$  avec un sommet privilégié  $v_0$  est un **arbre pointé** :  $(A, v_0)$ .  $v_0$  est la **racine** de l'arbre.

sommets de  $A$  ordonnés suivant leur distance à  $v_0$ .

Si  $d(v_0, v) = i$   $v$  est un **sommet de niveau  $i$** .



## ARBRES

### DÉFINITION

Si  $v$  est un sommet de niveau  $i$  et si tous ses voisins sont de niveau  $i - 1$ , on dit alors que  $v$  est une **feuille** de l'arbre.

La **hauteur** d'un arbre est le niveau maximal de ses feuilles.

### DÉFINITION

Pointer un arbre définit naturellement une orientation des arêtes de l'arbre : orienter les arcs de façon à ce qu'ils joignent les sommets de niveau  $i$  aux sommets de niveau  $i + 1$ .

**fil** (resp. **père**) d'un noeud  $v$  : ses successeurs (resp. son unique prédécesseur).

**descendants** (resp. **ancêtres** de  $v$  : les éléments de  $\text{succ}^*(v)$  (resp.  $\text{pred}^*(v)$ ).



## ARBRES

### DÉFINITION

Un arbre pointé est  **$k$ -aire** si tout sommet a au plus  $k$  fils.

Si  $k = 2$ , on parle d'**arbre binaire**.

Un arbre  $k$ -aire de hauteur  $n$  possède au plus

$$1 + k + \dots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

sommets. S'il en possède exactement ce nombre, on parle d'arbre  $k$ -aire **complet**.



## PARCOURS D'ARBRES

**ordonner les noeuds** : on suppose que les **fil**s d'un noeud  $v_i$  sont **ordonnés**  $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$ . Cet ordre est connu et fixé une fois pour toutes.

### PARCOURS EN PROFONDEUR

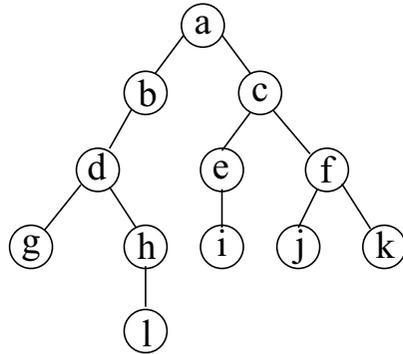
- ▶ **parcours préfixe** : d'abord la **racine** puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine respective  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ .
- ▶ **parcours suffixe** : d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , **puis la racine**  $v_0$ .
- ▶ **parcours infix** (arbre binaire) : d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

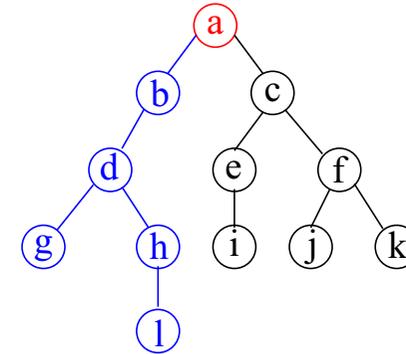
d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



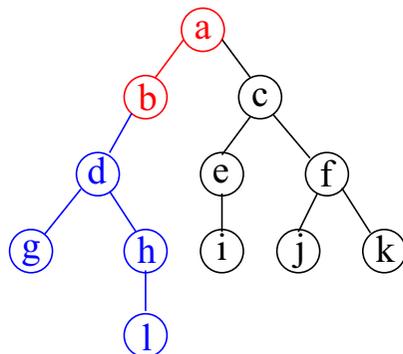
a



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



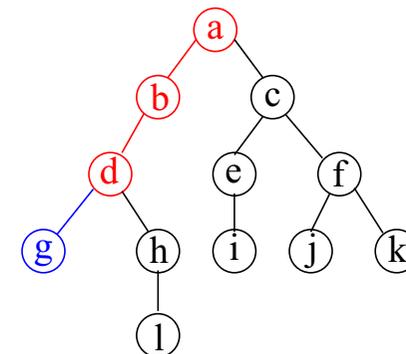
a, b



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



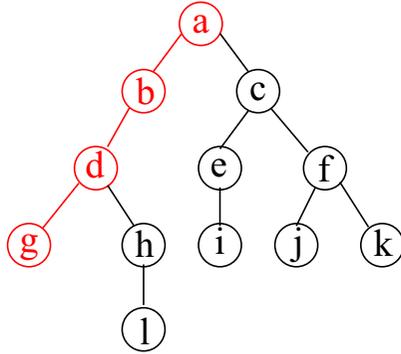
a, b, d



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière réursive, les sous-arbres pointés



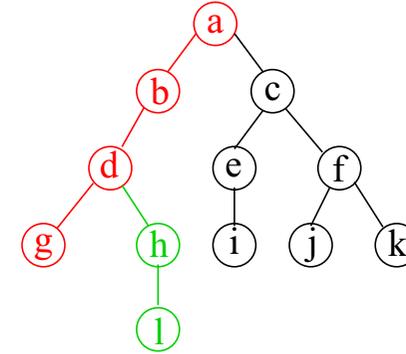
*a, b, d, g*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière réursive, les sous-arbres pointés



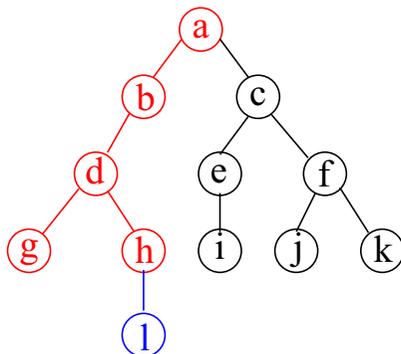
*a, b, d, g*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière réursive, les sous-arbres pointés



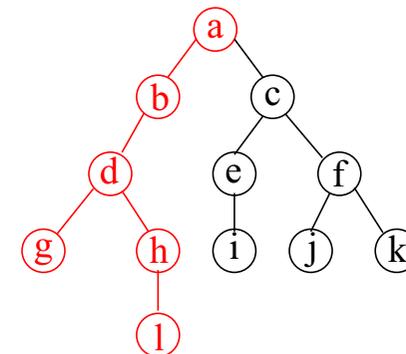
*a, b, d, g, h*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière réursive, les sous-arbres pointés



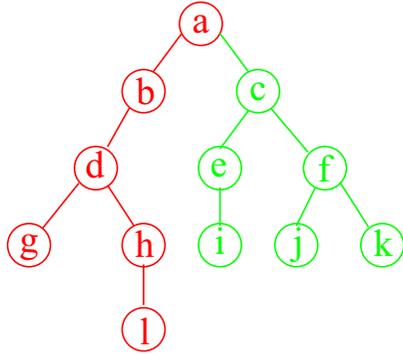
*a, b, d, g, h, l*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



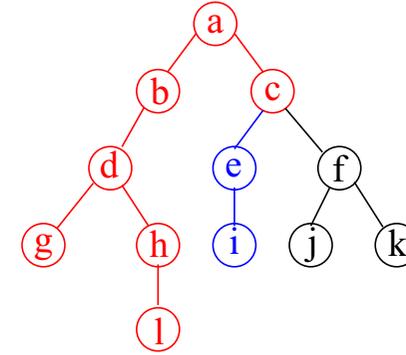
*a, b, d, g, h, l*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



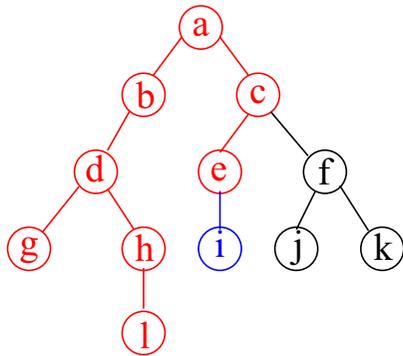
*a, b, d, g, h, l, c*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



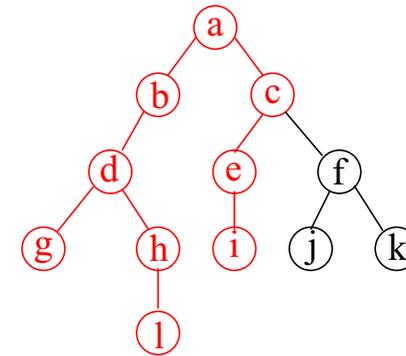
*a, b, d, g, h, l, c, e*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



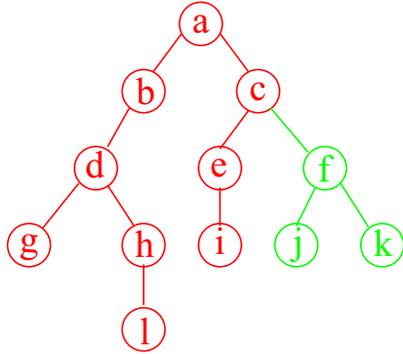
*a, b, d, g, h, l, c, e, i*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



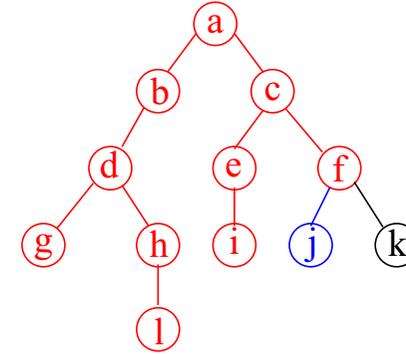
*a, b, d, g, h, l, c, e, i*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



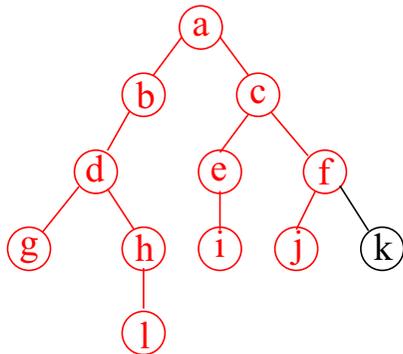
*a, b, d, g, h, l, c, e, i, f*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



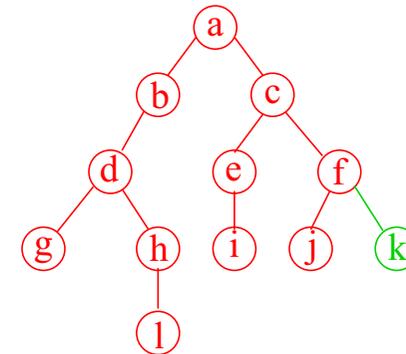
*a, b, d, g, h, l, c, e, i, f, j*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



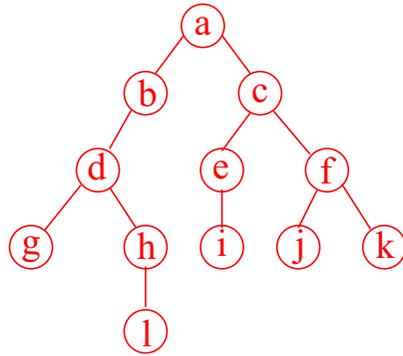
*a, b, d, g, h, l, c, e, i, f, j*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS PRÉFIXE

d'abord la racine puis, de manière récursive, les sous-arbres pointés



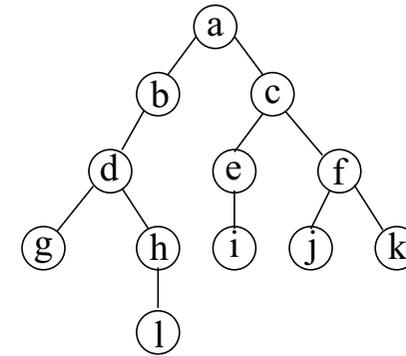
$a, b, d, g, h, l, c, e, i, f, j, k$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

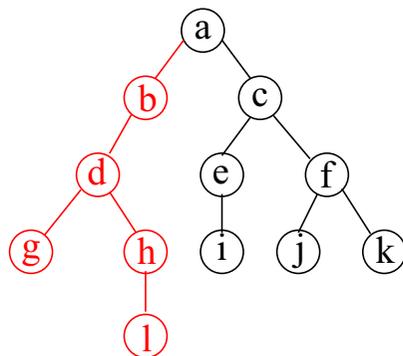
d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

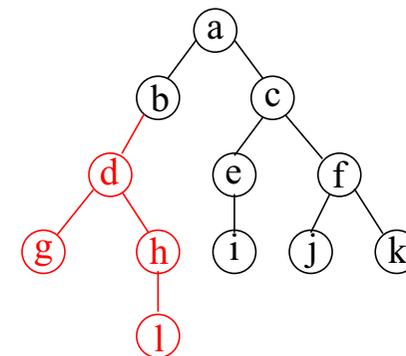
d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

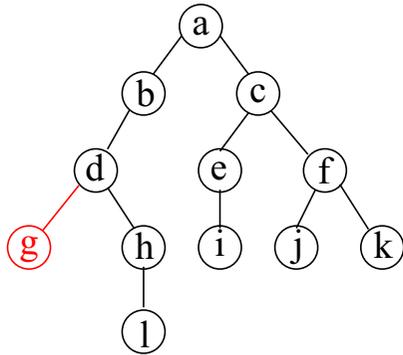
d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



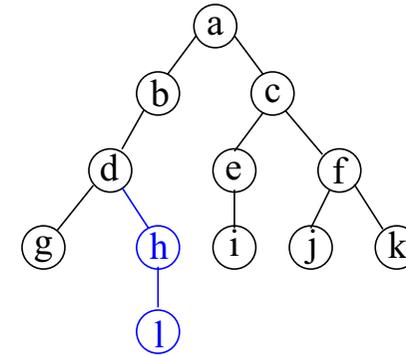
$g$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



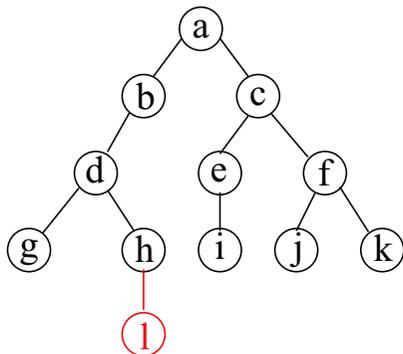
$g$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



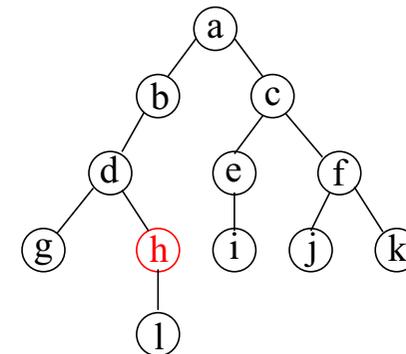
$g, l$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



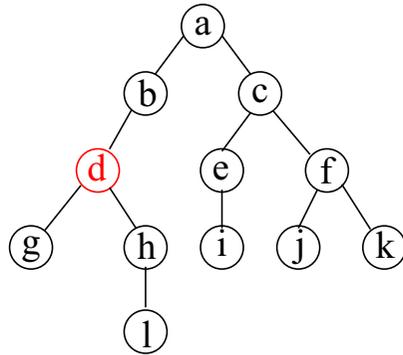
$g, l, h$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



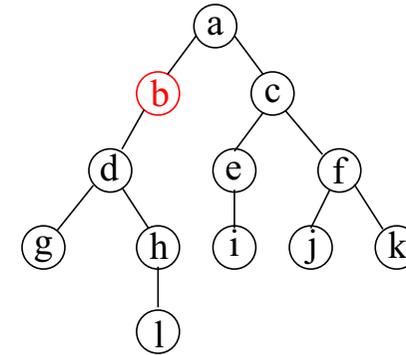
$g, l, h, d$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



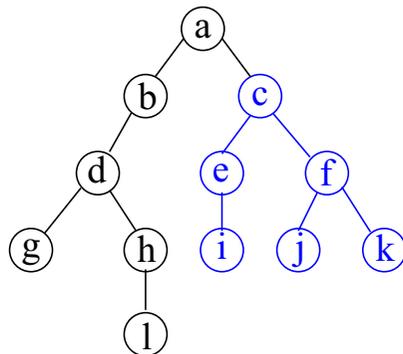
$g, l, h, d, b$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



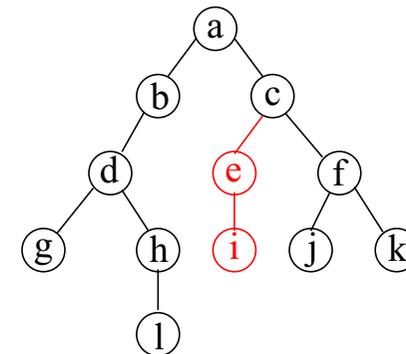
$g, l, h, d, b$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



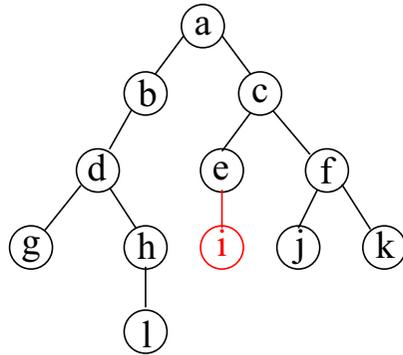
$g, l, h, d, b$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



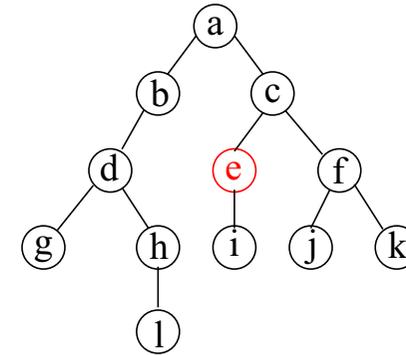
$g, l, h, d, b, i$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



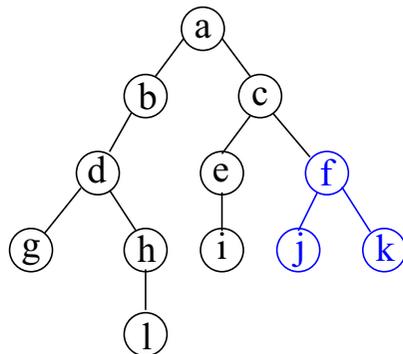
$g, l, h, d, b, i, e$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



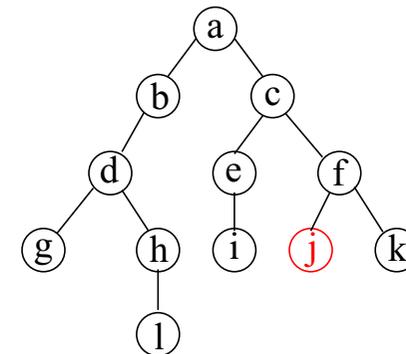
$g, l, h, d, b, i, e$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



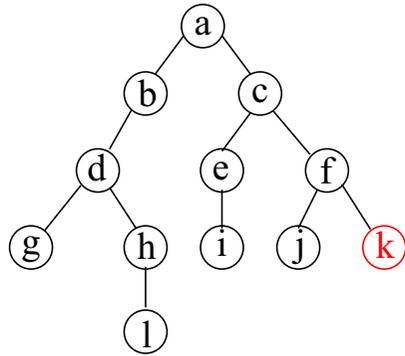
$g, l, h, d, b, i, e, j$



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



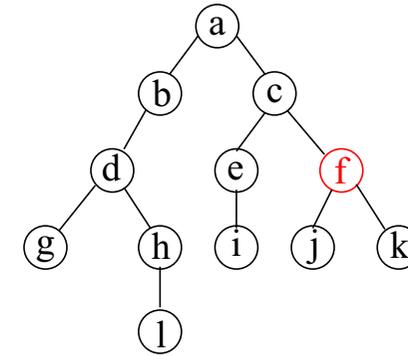
*g, l, h, d, b, i, e, j, k*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



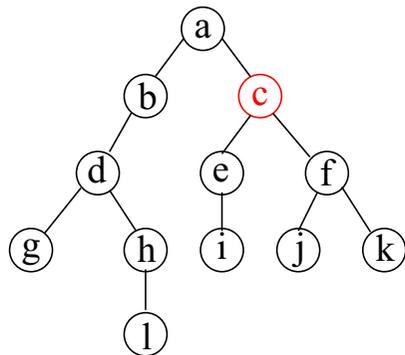
*g, l, h, d, b, i, e, j, k, f*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



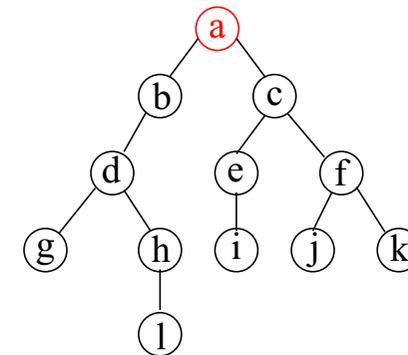
*g, l, h, d, b, i, e, j, k, f, c*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS SUFFIXE

d'abord, de manière récursive, les sous-arbres pointés de racine  $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$ , puis la racine  $v_0$ .



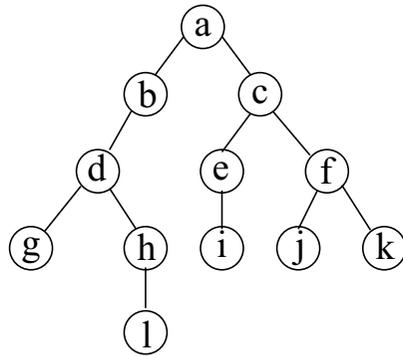
*g, l, h, d, b, i, e, j, k, f, c, a*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

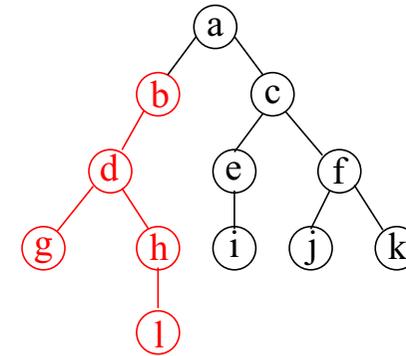
d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

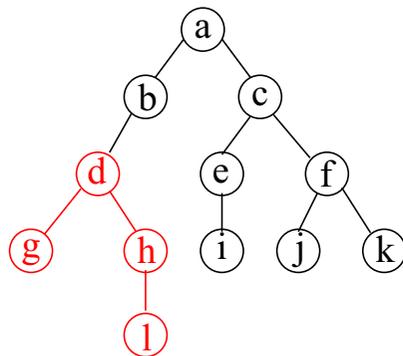
d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

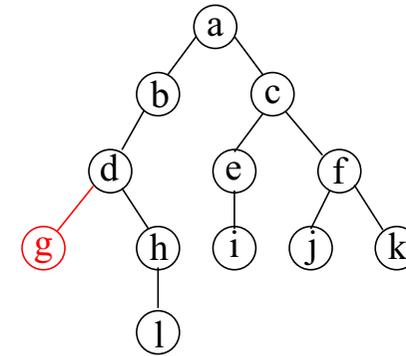
d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



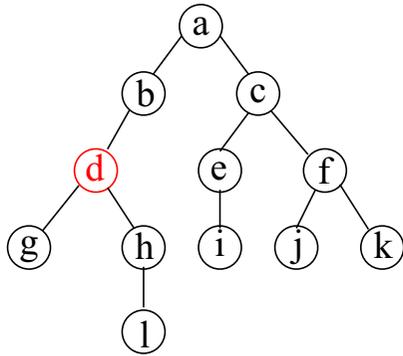
g



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



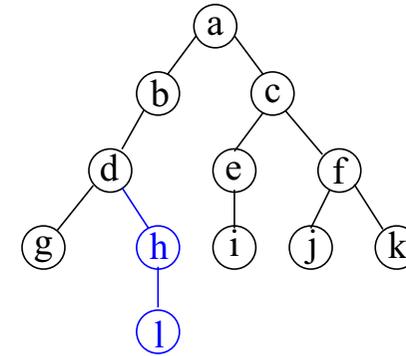
*g, d*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



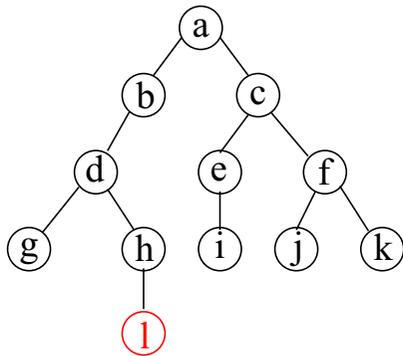
*g, d*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



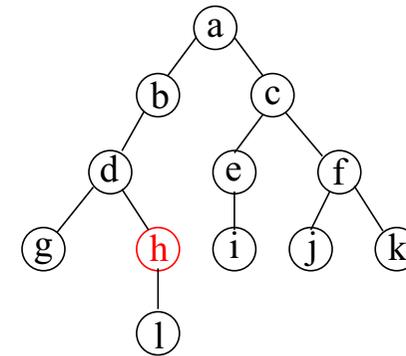
*g, d, l*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



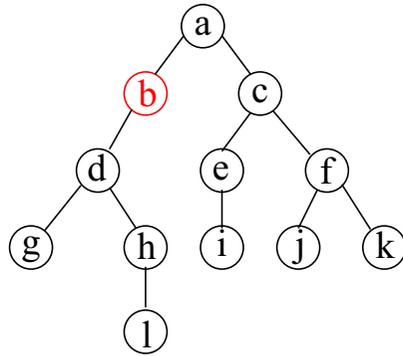
*g, d, l, h*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



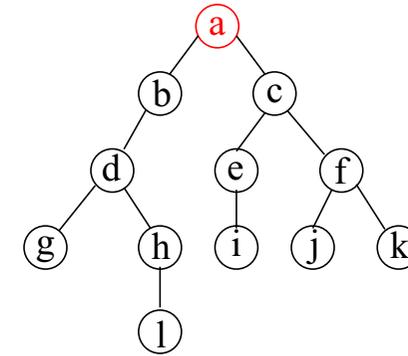
*g, d, l, h, b*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



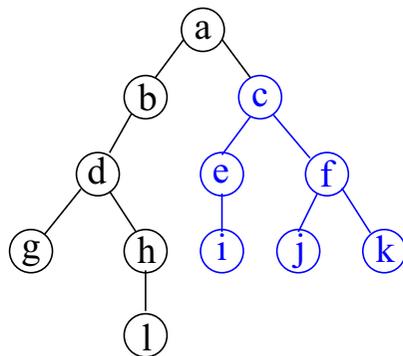
*g, d, l, h, b, a*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



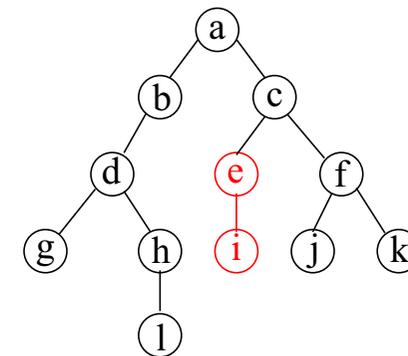
*g, d, l, h, b, a*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



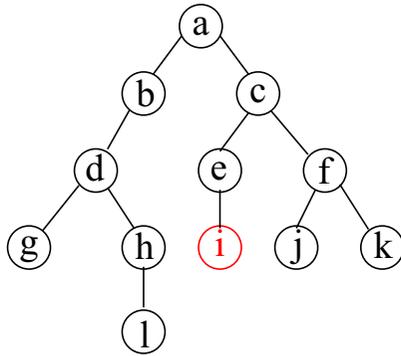
*g, d, l, h, b, a*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



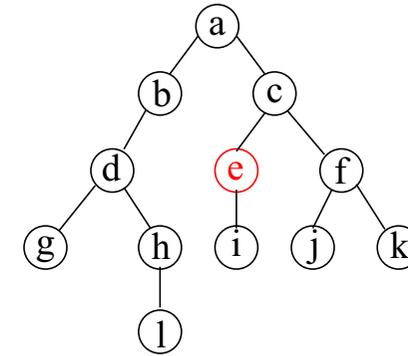
*g, d, l, h, b, a, i*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



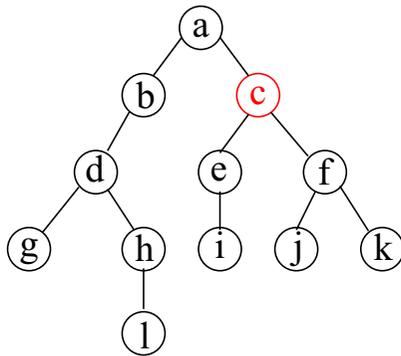
*g, d, l, h, b, a, i, e*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



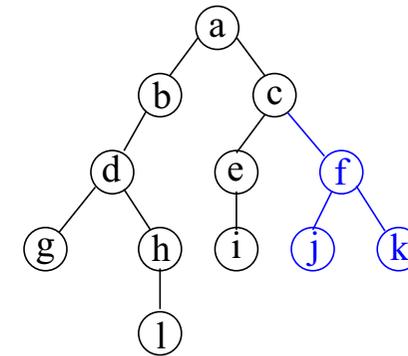
*g, d, l, h, b, a, i, e, c*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



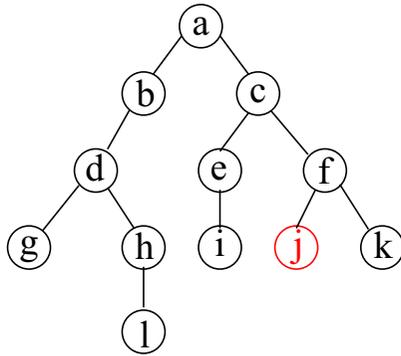
*g, d, l, h, b, a, i, e, c*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



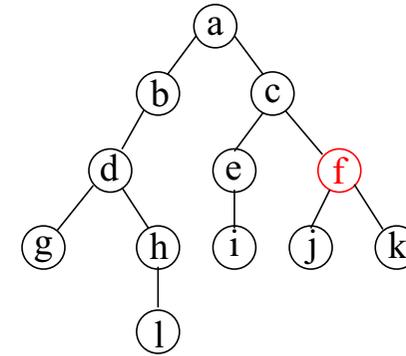
*g, d, l, h, b, a, i, e, c, j*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



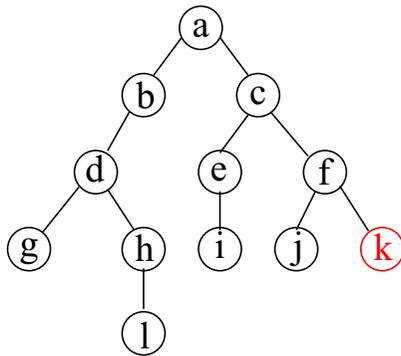
*g, d, l, h, b, a, i, e, c, j, f*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS INFIXE

d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de **gauche**, puis la **racine**, et enfin le sous-arbre de **droit** (Si un sommet n'a qu'un seul fils : sous-arbre de droite vide).



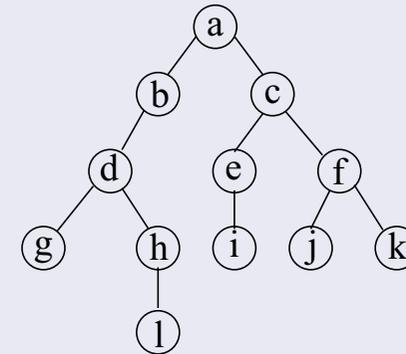
*g, d, l, h, b, a, i, e, c, j, f, k*



## PARCOURS D'ARBRES

### PARCOURS EN LARGEUR

**parcours en largeur** : parcours des noeuds de l'arbre pointé par niveau croissant.



*a, b, c, ..., k, l.*



## PARCOURS D'ARBRES

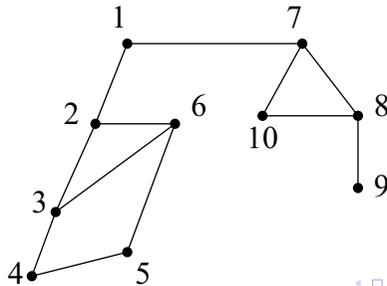
### REMARQUE

Soit  $G = (V, E)$  un **graphe** (orienté ou non) simple et connexe. Un **parcours en profondeur** de  $G$  est défini récursivement.

Sélectionner un sommet  $v_0$ .

A l'étape  $k \geq 1$ , choisir un voisin de  $v_{k-1}$  qui n'a pas encore été sélectionné.

Si un tel voisin n'existe pas, on cherche dans l'ordre, un voisin non sélectionné de  $v_{k-2}, \dots, v_0$ .



## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### DÉFINITION

Soient  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , deux digraphes.

$f : V_1 \rightarrow V_2$  est un **homomorphisme** de  $G_1$  dans  $G_2$  si

$$(x, y) \in E_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

### DÉFINITION

Soient  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , deux graphes non orientés.

$f : V_1 \rightarrow V_2$  est un **homomorphisme** de  $G_1$  dans  $G_2$  si

$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$



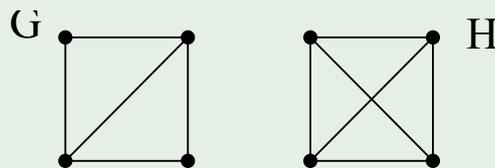
## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### REMARQUE

La composée d'homomorphismes est encore un homomorphisme.

### EXEMPLE

Homomorphisme de  $G$  dans  $H$



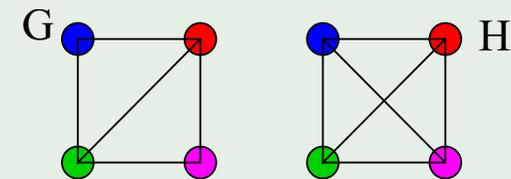
## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### REMARQUE

La composée d'homomorphismes est encore un homomorphisme.

### EXEMPLE

Homomorphisme de  $G$  dans  $H$



Homomorphisme de  $G$  ds  $H \not\Rightarrow$  homomorphisme de  $H$  ds  $G$ .



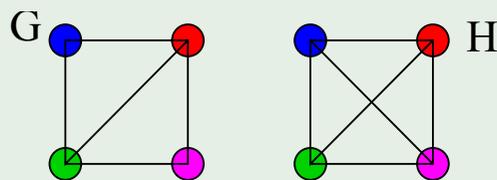
## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### REMARQUE

La composée d'homomorphismes est encore un homomorphisme.

### EXEMPLE

Homomorphisme de  $G$  dans  $H$



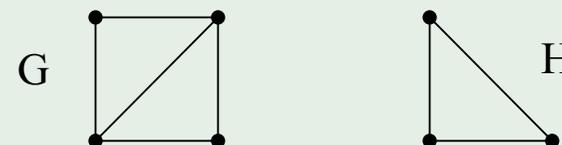
Homomorphisme de  $G$  ds  $H \not\Rightarrow$  homomorphisme de  $H$  ds  $G$ .



## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### EXEMPLE

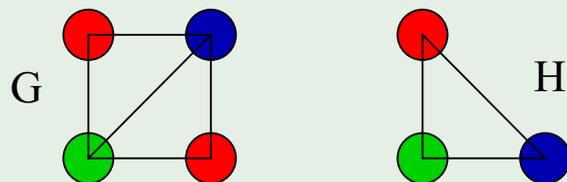
Homomorphisme **non injectif** de  $G$  dans  $H$



## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### EXEMPLE

Homomorphisme **non injectif** de  $G$  dans  $H$



## ISOMORPHISMES DE GRAPHES

### DÉFINITION

2 digraphes (resp. 2 graphes non orientés)  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont **isomorphes** si  $\exists$  bijection  $f : V_1 \rightarrow V_2$  t.q.

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

(resp. telle que  $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$ ).

### DÉFINITION

2 **multi-graphes**  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont **isomorphes** si  $\exists$  bijection  $f : V_1 \rightarrow V_2$  t.q.  $(x, y)$  arc de multiplicité  $k$  de  $G_1$  SSI  $(f(x), f(y))$  arc de multiplicité  $k$  de  $G_2$ .

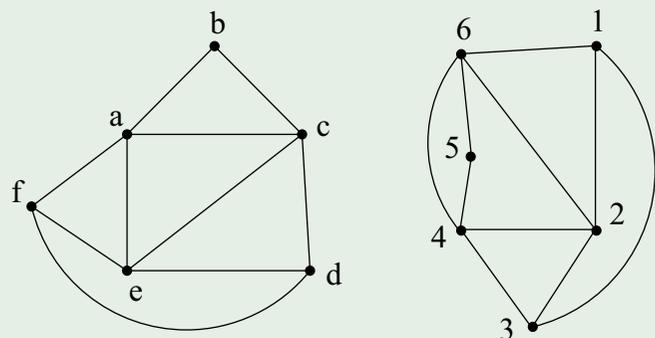
### REMARQUE

Si  $f$  est un isomorphisme,  $f^{-1}$  aussi.



# ISOMORPHISMES DE GRAPHES

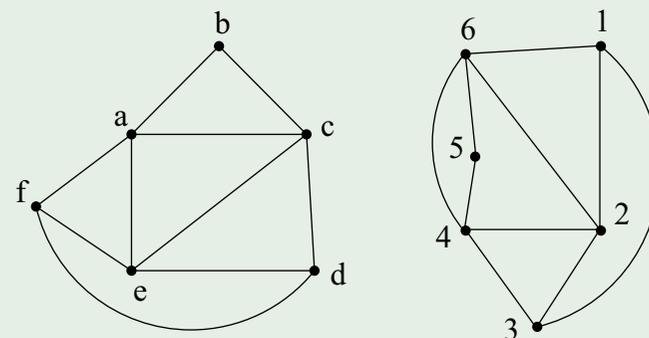
## EXEMPLE



$\varphi : a \mapsto 4, b \mapsto 5, c \mapsto 6, d \mapsto 1, e \mapsto 2, f \mapsto 1.$

# ISOMORPHISMES DE GRAPHES

## EXEMPLE



$\varphi : a \mapsto 4, b \mapsto 5, c \mapsto 6, d \mapsto 1, e \mapsto 2, f \mapsto 1.$

# ISOMORPHISMES DE GRAPHES

## DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un graphe (orienté ou non). Un **automorphisme** de  $G$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $G$ .

$Aut(G)$  : groupe des automorphismes de  $G$  muni de la loi de composition d'applications

sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$  des permutations de  $n = \#V$  éléments.

Un graphe pour lequel  $Aut(G)$  est réduit à l'identité  $id_V$  est **asymétrique**

## EXEMPLE

$Aut(K_n) = S_n.$

## PROPOSITION

Soient  $G$  un graphe (simple non orienté) et  $\varphi$  un automorphisme de  $G$ . Pour tous sommets  $u, v$ , on a

- ▶  $\deg(u) = \deg(\varphi(u)),$
- ▶  $d(u, v) = d(\varphi(u), \varphi(v)).$

## DÉFINITION

Si deux graphes  $G_i = (V_i, E_i), i = 1, 2$  ont leurs sommets pondérés par  $p_i : V_i \rightarrow \Sigma$ , la définition d'un isomorphisme  $f : V_1 \rightarrow V_2$  doit naturellement s'étendre en respectant

$$p_1(v) = p_2(f(v)), \forall v \in V_1.$$

## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### DÉFINITIONS

**Alphabet**  $\Sigma = \{a, b\}$

**Mots** :  $aa, bba, b, abbbaabaa$  (suites finies de symboles).

**Arbre lexicographique** : arbre binaire infini, ses noeuds en bijection avec les mots sur  $\{a, b\}$ .

Si un noeud est en bijection avec le mot  $m$  :

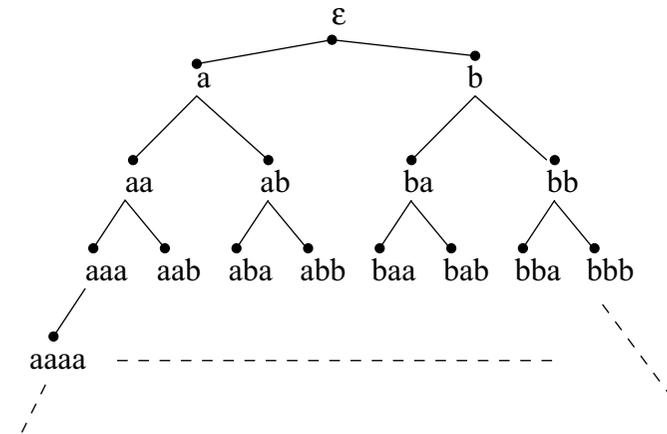
- ▶ son fils de **gauche** est en bijection avec  $ma$
- ▶ son fils de **droite** est en bijection avec  $mb$

La racine de l'arbre correspond au mot vide :  $\varepsilon$ .

Cet arbre possède exactement  $2^i$  noeuds de niveau  $i$ , les mots de longueur  $i$  :  $\underbrace{a \cdots aa}_{ix}, a \cdots ab, \dots, b \cdots ba, \underbrace{b \cdots bb}_{ix}$ .



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

Soit un ensemble  $L$  de mots écrits sur  $\{a, b\}$ .

$\rho_L$  : à un mot  $m$  associe 1 (resp. 0) si  $m \in L$  (resp.  $m \notin L$ ).

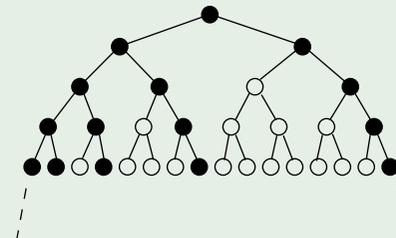
La pondération est un codage définissant le **dictionnaire** des mots de  $L$ .



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### UN LANGAGE ET L'ARBRE PONDÉRÉ

$L$  formé des mots commençant par un nombre arbitraire de  $a$  (éventuellement aucun) et suivi par un nombre arbitraire de  $b$  (éventuellement aucun), l'arbre pondéré  $A_L$



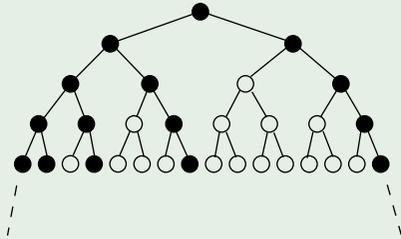
$\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, \dots$



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

$A_m$  : sous-arbre obtenu en considérant comme nouvelle racine le noeud  $m$  et en ne conservant dans  $A_m$  que les descendants de  $m$

### ARBRE RÉGULIER



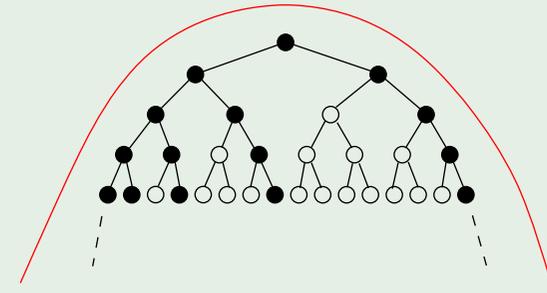
l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### ARBRE RÉGULIER



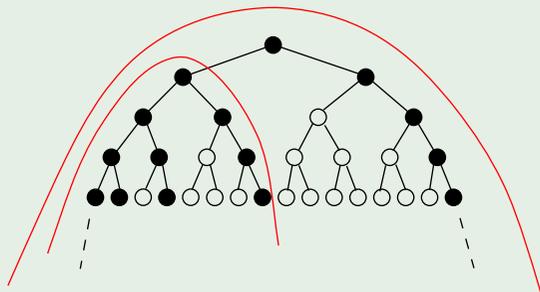
l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### ARBRE RÉGULIER



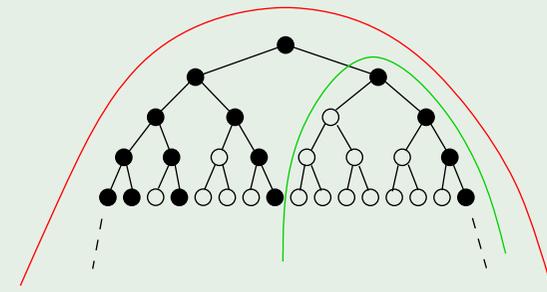
l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### ARBRE RÉGULIER



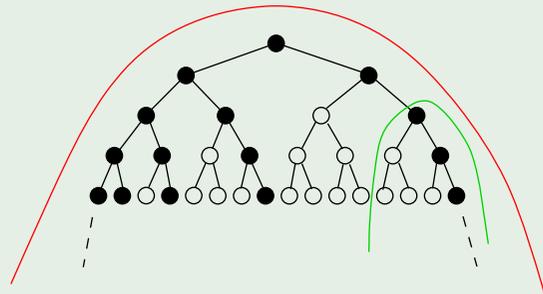
l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### ARBRE RÉGULIER



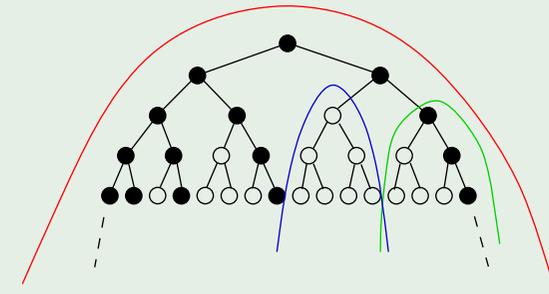
l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## ARBRES INFINIS ET ISOMORPHISME

### ARBRE RÉGULIER



l'arbre  $A_L$  ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple,  $A_L$  lui-même,  $A_b$  et  $A_{ba}$ )

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre **régulier**.



## GRAPHES HAMILTONIENS

### RAPPEL

Graphes **eulérien** : circuit passant 1 ! fois par chaque **arête**.

### QUESTION DE SIR W. R. HAMILTON

Existence d'un Circuit passant 1 ! fois par chaque **sommet**.  
A ce jour, pas de méthode efficace (pb. NP-complet) :  
passer en revue toutes les permutations des  $n$  sommets...

### DÉFINITION

Un chemin (resp. circuit) **hamiltonien** de  $G$  : passe une et une seule fois par chaque sommet de  $G$ .

Un graphe **hamiltonien** : graphe possédant un circuit hamiltonien



## GRAPHES HAMILTONIENS

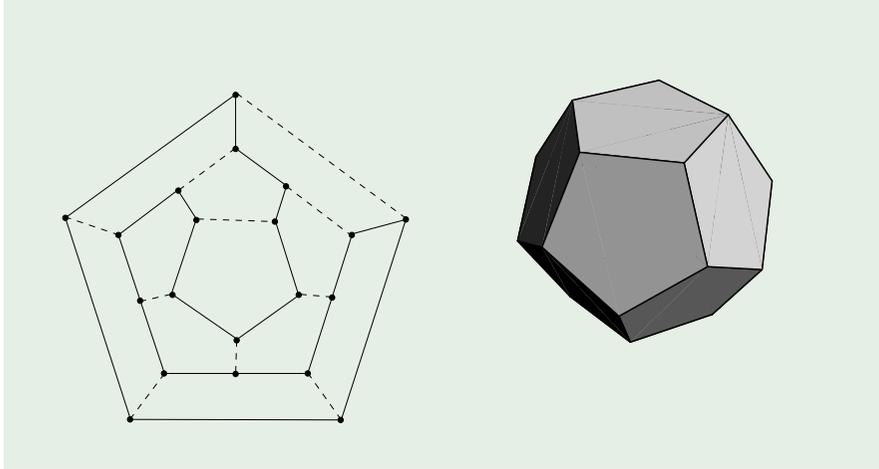
### CAS PATHOLOGIQUES

un graphe restreint à une unique arête  $\{a, b\}$  (resp. restreint à un unique sommet) est hamiltonien : circuit  $\{a, b\}$ ,  $\{b, a\}$ .  
Par contre, un arbre contenant 3 sommets au moins n'est jamais hamiltonien.

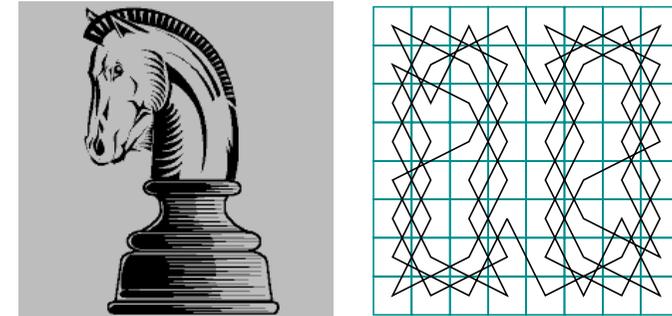


## GRAPHES HAMILTONIENS

### EXEMPLE



## GRAPHES HAMILTONIENS



## GRAPHES HAMILTONIENS

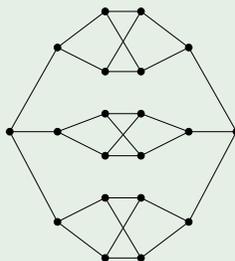
Condition **nécessaire** pour qu'un graphe soit hamiltonien.

### PROPOSITION

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (simple et non orienté) hamiltonien, alors pour tout ensemble non vide  $S \subseteq V$ , le nombre de composantes connexes de  $G - S$  est  $\leq \#S$ .

### EXEMPLE

Ce graphe est-il hamiltonien ?



## GRAPHES HAMILTONIENS

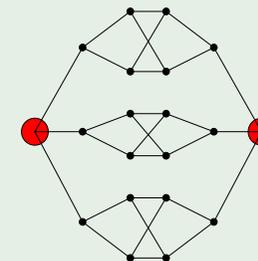
Condition **nécessaire** pour qu'un graphe soit hamiltonien.

### PROPOSITION

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (simple et non orienté) hamiltonien, alors pour tout ensemble non vide  $S \subseteq V$ , le nombre de composantes connexes de  $G - S$  est  $\leq \#S$ .

### EXEMPLE

Ce graphe est-il hamiltonien ?



## GRAPHES HAMILTONIENS

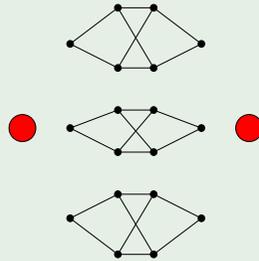
Condition **nécessaire** pour qu'un graphe soit hamiltonien.

### PROPOSITION

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (simple et non orienté) hamiltonien, alors pour tout ensemble non vide  $S \subseteq V$ , le nombre de composantes connexes de  $G - S$  est  $\leq \#S$ .

### EXEMPLE

Ce graphe est-il hamiltonien ?



## GRAPHES HAMILTONIENS

Un aperçu de conditions suffisantes, graphe  $G$  (simple et non orienté) ayant  $n \geq 3$  sommets.

### THÉORÈME DE DIRAC (1952)

Si le degré de chaque sommet est  $\geq n/2$ ,  $G$  est hamiltonien.

### “PREMIER” THÉORÈME D’ORE (1960)

Si  $\exists 2$  sommets  $x$  et  $y$  t.q.  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ .  
 $G$  est hamiltonien SSI le graphe  $G + \{x, y\}$  l'est.

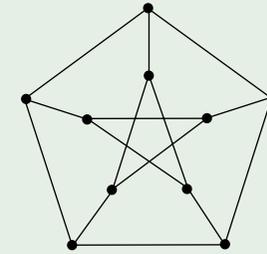
### “DEUXIÈME” THÉORÈME D’ORE

Si pour tout couple de sommets non adjacents  $(x, y)$ , on a  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ , alors  $G$  est hamiltonien. En particulier, si  $\min_{v \in V} \deg(v) \geq n/2$ , alors  $G$  est hamiltonien.

## GRAPHES HAMILTONIENS

La condition n'est PAS suffisante

### LE GRAPHE DE PETERSEN



## GRAPHES HAMILTONIENS

## GRAPHES HAMILTONIENS

### THÉORÈME DE CHVÁTAL (1971)

Soit  $G$  un graphe (simple et non orienté) ayant  $n \geq 3$  sommets ordonnés par degré croissant, i.e.,

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n).$$

Si, pour tout  $k < n/2$ , le graphe satisfait

$$\deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k, \quad (1)$$

alors  $G$  possède un circuit hamiltonien.

## REMARQUE

La **condition** du théorème de Chvátal peut **facilement être testée** pour un graphe donné. Il suffit d'ordonner la suite des degrés et de vérifier une condition combinatoire élémentaire.

Rappelons que d'un point de vue strictement logique, **si pour  $k < n/2$ , on a  $\deg(v_k) > k$** , alors l'implication  $\deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k$  est **toujours vraie**.

A ce jour, on ne connaît pas de condition suffisante plus générale pour qu'un graphe soit hamiltonien. Dans certains cas, on peut obtenir des conditions plus fortes mais en se restreignant à des classes particulières de graphes.

## THÉORÈME DE CHVÁTAL-ERDÖS

Soient  $G$  un graphe simple et non orienté ayant au moins trois sommets,  $\alpha(G)$  le nombre maximal de sommets indépendants et  $\kappa(G)$  la taille minimale d'un ensemble d'articulation. Si  $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ , alors  $G$  est hamiltonien.

Idée...

## “PREMIER” THÉORÈME D'ORE (1960)

Si  $\exists$  2 sommets  $x$  et  $y$  t.q.  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ .  
 $G$  est hamiltonien SSI le graphe  $G + \{x, y\}$  l'est.

## DÉFINITION

**Fermeture** d'un graphe simple et non orienté  $G_0 = (V_0, E_0)$ .  
 On définit une suite finie de graphes (simples)

$$G_0, G_1, \dots, G_i = (V_i, E_i), \dots, G_k$$

Pour tout  $i$ , on ajoute à  $G_i$  une arête comme suit :

$$G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$$

où  $u$  et  $v$  sont t.q.  $\{u, v\} \notin E_i$  et

$$\deg_{G_i}(u) + \deg_{G_i}(v) \geq \#V$$

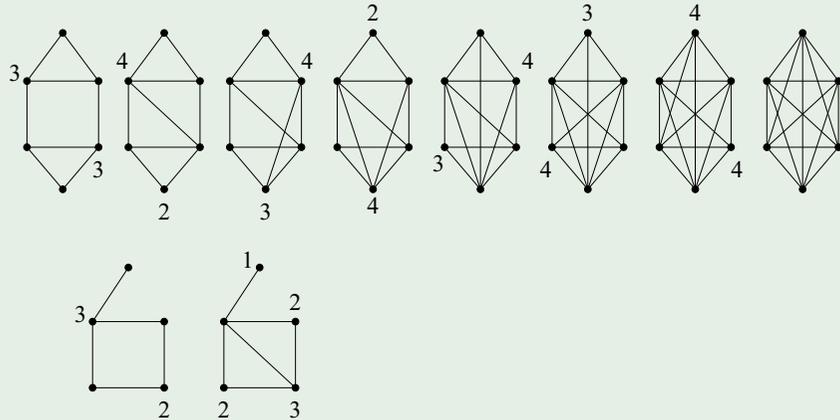
où  $\deg_{G_i}$  désigne le degré d'un sommet **dans le graphe  $G_i$** .

La procédure s'arrête à  $G_k$  si pour tous sommets  $u, v$ , soit  $\{u, v\} \in E_k$ , soit  $\deg_{G_k}(u) + \deg_{G_k}(v) < \#V$ .

## FERMETURE D'UN GRAPHE

...Quels que soient les choix d'arêtes réalisés dans les étapes intermédiaires, on aboutit toujours au même graphe :  $\mathcal{F}(G_0)$

### EXEMPLE



## FERMETURE D'UN GRAPHE

### LEMME

Pour tout graphe ayant au moins trois sommets, la fermeture d'un graphe est unique.

Supposons avoir 2 fermetures des  $G \neq$  :

$$H = G + \{e_1, \dots, e_r\} \quad \text{et} \quad H' = G + \{f_1, \dots, f_s\}$$

**Thèse** :  $H = H'$ .

$H_i := G + \{e_1, \dots, e_i\}$  et  $H'_i := G + \{f_1, \dots, f_i\}$ ,  $G = H_0 = H'_0$ .

Si  $H \neq H'$ , supposons que  $e_k = \{u, v\}$  est la première arête de  $H$  qui n'appartient pas à  $H'$ . (Ainsi,  $e_1, \dots, e_{k-1}$  sont des arêtes de  $H'$  et  $e_k$  diffère de tous les  $f_i$ .)



## FERMETURE D'UN GRAPHE

Puisque  $e_k$  est l'arête ajoutée à  $H_{k-1}$  pour construire  $H_k$ ,

$$\deg_{H_{k-1}}(u) + \deg_{H_{k-1}}(v) \geq n.$$

$H_{k-1}$  est un sous-graphe de  $H'$  :

$$\deg_{H'_{k-1}}(u) + \deg_{H'_{k-1}}(v) \geq n$$

donc,  $e_k$  devra aussi être ajoutée à  $H'$ , contradiction !

$H$  est un sous-graphe de  $H'$ . Par symétrie, on en tire que  $H = H'$ .



## FERMETURE D'UN GRAPHE

### THÉORÈME

Soit  $G$  un graphe (simple et non orienté) ayant au moins trois sommets.

- ▶  $G$  est hamiltonien SSI sa fermeture  $\mathcal{F}(G)$  l'est.
- ▶ Si  $\mathcal{F}(G)$  est un graphe complet, alors  $G$  hamiltonien.

$\Rightarrow G$  est un sous-graphe de  $\mathcal{F}(G)$ .

Si  $G$  est hamiltonien, alors  $\mathcal{F}(G)$  l'est aussi.

$\Leftarrow$  soit une suite de graphes  $G_0 = G, \dots, G_{k-1}, G_k = \mathcal{F}(G)$  donnant la fermeture de  $G$ .

**Thm. d'Ore** : si  $G_k$  est hamiltonien, alors  $G_{k-1}$  l'est aussi. De proche en proche,  $G_0 = G$  est hamiltonien.

La deuxième partie : Tout graphe complet est hamiltonien, appliquer la première partie.



## FERMETURE D'UN GRAPHE

### REMARQUE

La condition suffisante donnée dans le théorème précédent n'est **PAS nécessaire**.

graphe avec  $n > 4$  sommets et de  $n$  arêtes et formant un unique circuit hamiltonien.

Chaque sommet est de degré 2, le graphe est égal à sa fermeture et bien que le graphe soit hamiltonien, la fermeture n'est pas le graphe complet  $K_n$ .



## FERMETURE D'UN GRAPHE

### “DEUXIÈME” THÉORÈME D'ORE

Si pour tout couple de sommets non adjacents  $(x, y)$ , on a  $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ , alors  $G$  est hamiltonien. En particulier, si  $\min_{v \in V} \deg(v) \geq n/2$ , alors  $G$  est hamiltonien.

La preuve est immédiate :  $\mathcal{F}(G) = K_n$  !



## FERMETURE D'UN GRAPHE

A DEMONTRER ...

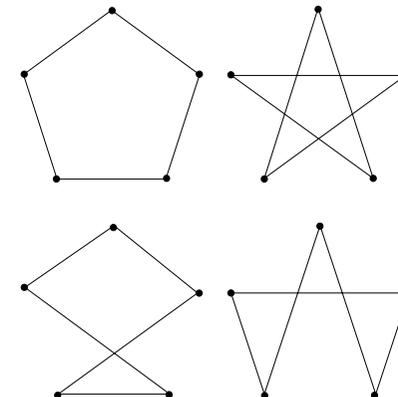
- ▶ Thm. Dirac
- ▶ Premier Thm. d'Ore
- ▶ Thm de Chvátal



## PARTITION DE $K_n$ EN CIRCUITS HAMILTONIENS

### PROPOSITION

Pour  $n \geq 3$ ,  $K_n$  peut être partitionné en circuits hamiltoniens disjoints SSI  $n$  impair. Le nombre de tels circuits partitionnant  $K_n$  vaut  $(n - 1)/2$ .



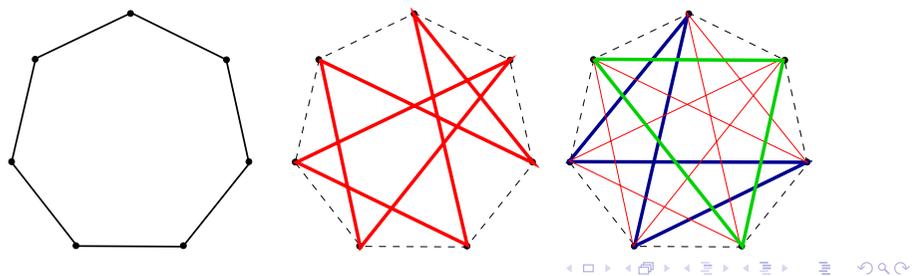
## PARTITION DE $K_n$ EN CIRCUITS HAMILTONIENS

$K_n$  est  $(n - 1)$ -régulier. Un circuit hamiltonien est 2-régulier. Il est nécessaire que  $n - 1$  soit pair pour décomposer  $K_n$  en cycles hamiltoniens disjoints !

Supposons  $n$  impair.  $K_n$  peut être décomposé en au plus  $(n - 1)/2$  circuits hamiltoniens disjoints :

- ▶ choix d'un premier cycle hamiltonien formé de  $n$  arêtes
- ▶ second cycle de  $K_n$  disjoint du précédent, le choix se restreint, etc...

peu convaincant !

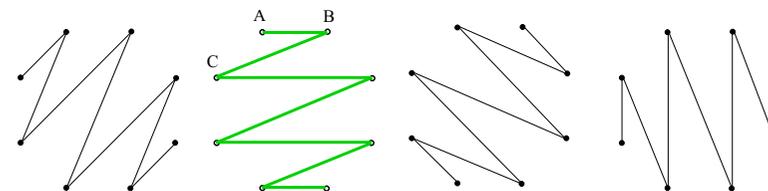


## PARTITION DE $K_n$ EN CIRCUITS HAMILTONIENS

### LEMME

Si  $n$  pair,  $K_n$  peut être partitionné en  $n/2$  chemins hamiltoniens disjoints.

Identifier  $K_n$  avec un polygone régulier ayant une symétrie orthogonale par rapport à une horizontale .



Chemin hamiltonien  $\mathcal{C}$  en reliant les sommets se trouvant sur une même horizontale et en reliant le sommet gauche du niveau horizontal  $i$  avec le sommet de droite de niveau  $i + 1$ . Toutes ces arêtes "obliques" ont une même pente  $\pi/n$

## PARTITION DE $K_n$ EN CIRCUITS HAMILTONIENS

En effectuant une rotation de la figure  $\mathcal{C}$  de  $2k\pi/n$ ,  $k = 1, \dots, n/2 - 1$ , on obtient  $n/2$  chemins hamiltoniens distincts.

Tous distincts ? raisonner sur la pente respective des arêtes les constituant :  $\pi/n, 3\pi/n, 5\pi/n, \dots, (1 - 1/n)\pi$ .

## PARTITION DE $K_n$ EN CIRCUITS HAMILTONIENS

### LEMME

Soit  $n \geq 3$  impair.  $K_n$  partitionné en  $(n - 1)/2$  circuits hamiltoniens disjoints SSI  $K_{n-1}$  partitionné en  $(n - 1)/2$  chemins hamiltoniens disjoints.

Si  $K_n$  peut être partitionné et qu'on lui supprime un sommet, on passe à  $K_{n-1}$  et chaque circuit hamiltonien  $\mathcal{C}$  donne naissance à un chemin hamiltonien (les extrémités du chemin étant les sommets voisins dans  $\mathcal{C}$  du sommet supprimé).

Réciproquement, si  $K_{n-1}$  est partitionné, l'adjonction d'un sommet permet de passer à  $K_n$  en "fermant" chaque chemin hamiltonien pour obtenir des circuits disjoints.

# THÉORIE DES GRAPHES (4)

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2007–2008



Théorie “algébrique” des graphes...

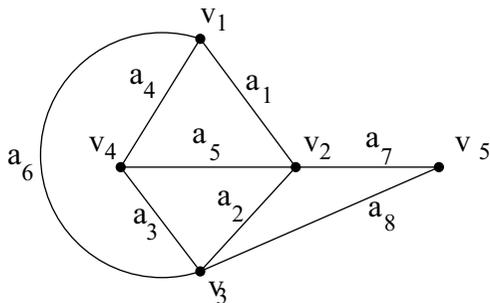
## DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

$A(G)$  : **matrice d'adjacence** de  $G$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arêtes } \{v_i, v_j\} \text{ de } E.$$

→ polynôme caractéristique de  $G$ , valeurs propres de  $G$ , spectre de  $G$ .



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$



## PROPOSITION

Deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence.



## DÉFINITION

Dans un graphe simple, on appelle **triangle** tout triplet d'arêtes distinctes deux à deux de la forme  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$  (i.e., tout circuit de longueur trois formé d'arêtes distinctes).

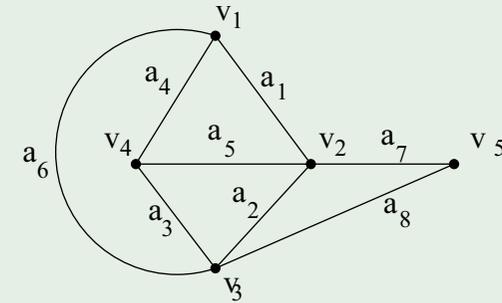
## PROPOSITION

Si le polynôme caractéristique de  $G = (V, E)$  est de la forme

$$\chi_G(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_n,$$

- ▶  $c_1$  est le nombre de boucles de  $G$ , en particulier, si  $G$  est simple,  $c_1 = 0$ .
- ▶ Si  $G$  est simple, alors  $-c_2$  est le nombre d'arêtes de  $G$ .
- ▶ Si  $G$  est simple, alors  $c_3$  est le double du nombre de triangles de  $G$ .

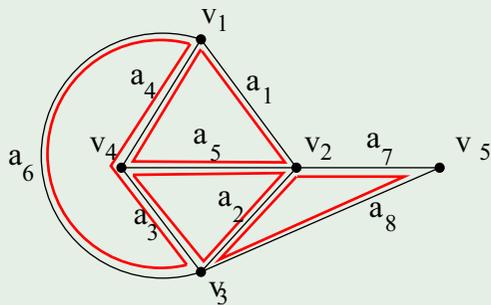
## EXEMPLE



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$$c_1 = 0, c_2 = 8, c_3 = 10$$

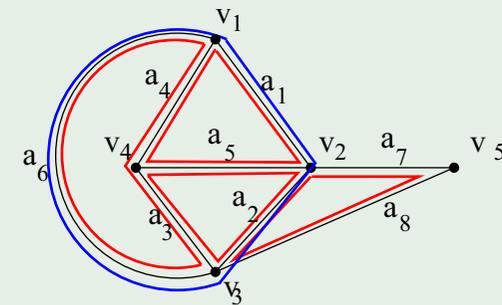
## EXEMPLE



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$$c_1 = 0, c_2 = 8, c_3 = 10$$

## EXEMPLE



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$$c_1 = 0, c_2 = 8, c_3 = 10$$

## RAPPEL

Les coefficients  $c_i$  du polynôme caractéristique s'obtiennent comme **somme des sous-matrices diagonales de dimension  $i$** .

$$A_{(i_1, \dots, i_k; i_1, \dots, i_k)}$$



Le premier point est immédiat. Le coefficient  $c_1$  est la somme des éléments diagonaux de  $A_G$ .

Si  $G$  est simple, les sous-matrices diagonales de  $A_G$  de dimension 2  $A_{(i,j;i,j)}$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient  $c_2$  est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement  $-1$  et  $0$ ,  $c_2 = -\#E$ .



Le premier point est immédiat. Le coefficient  $c_1$  est la somme des éléments diagonaux de  $A_G$ .

Si  $G$  est simple, les sous-matrices diagonales de  $A_G$  de dimension 2  $A_{(i,j;i,j)}$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient  $c_2$  est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement  $-1$  et  $0$ ,  $c_2 = -\#E$ .

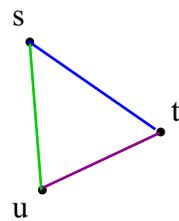
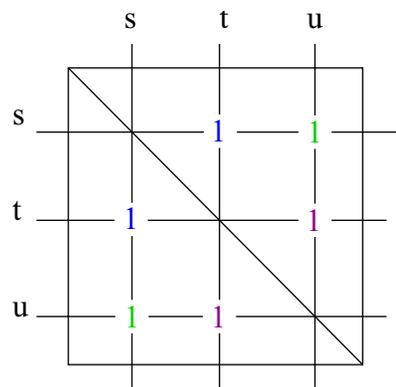
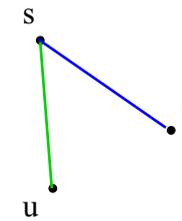
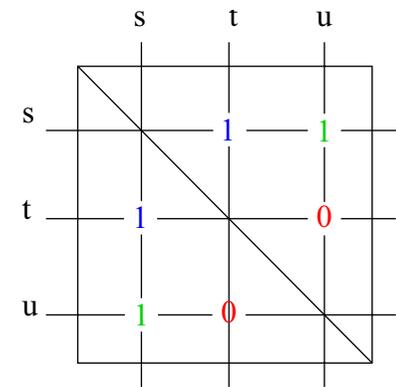
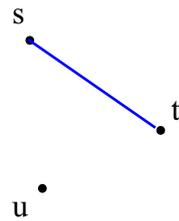
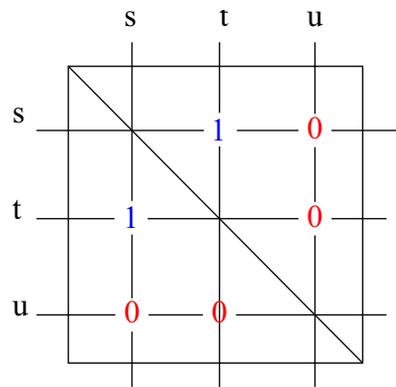


Le premier point est immédiat. Le coefficient  $c_1$  est la somme des éléments diagonaux de  $A_G$ .

Si  $G$  est simple, les sous-matrices diagonales de  $A_G$  de dimension 3  $A_{(s,t,u;s,t,u)}$  sont de la forme

Le coefficient  $c_3$  est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement  $-1$  et  $0$ ,  $c_3 = -\#E$ .





Les sous-matrices diagonales non nulles de  $A_G$  de dimension 3 sont d'une des formes suivantes  $A_{(s,t,u;s,t,u)}$  (à une permutation des lignes et des colonnes près, ce qui ne change pas la valeur du déterminant)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ont un déterminant nul et la troisième a un déterminant égal à 2.  $c_3$  est la somme des déterminants de ces sous-matrices =  $2 * \#$  triangles.

### PROPOSITION

Soit  $G = (V, E)$  un graphe biparti. Si  $\lambda$  est valeur propre de  $G$ , alors  $-\lambda$  l'est aussi. Autrement dit, le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.

Par hypothèse,  $V$  se partitionne en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de manière telle que toute arête de  $G$  est de la forme  $\{u, v\}$  avec  $u \in V_1$  et  $v \in V_2$ . Si on ordonne les sommets de  $V$  de manière à considérer tout d'abord les sommets de  $V_1$ , alors  $A(G)$  a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix}$$

où  $B$  est une matrice de dimension  $\#V_1 \times \#V_2$ .



Soit  $x$  un vecteur propre non nul de  $A(G)$  de valeur propre  $\lambda$ . Appelons  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) le vecteur obtenu en considérant les  $\#V_1$  premières (resp. les  $\#V_2$  dernières) composantes de  $x$ . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

vecteur propre non nul de valeur propre  $-\lambda$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$



### DÉFINITION (CAS ORIENTÉ)

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe orienté,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

$A(G)$  : **matrice d'adjacence** de  $G$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ ,

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arcs } (v_i, v_j) \text{ de } E.$$



### THÉORÈME

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe (orienté ou non) tel que  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  et pour tout  $n > 0$ ,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

est le nombre de chemins de longueur  $n$  joignant  $v_i$  à  $v_j$ .

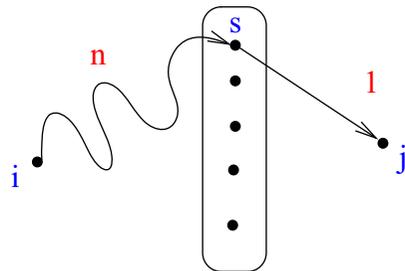
Par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$ , définition de la matrice d'adjacence.

Supposons OK pour  $n > 0$  et vérifions-le pour  $n + 1$ .

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}.$$



$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}.$$



$[A(G)^n]_{i,s}$  = nombre de chemins de longueur  $n$  joignant  $v_i$  à  $v_s$   
 $[A(G)]_{s,j}$  = nombre d'arcs/arêtes joignant  $v_s$  à  $v_j$ .  
 Par conséquent,  $[A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}$  compte le nombre de chemins de longueur  $n + 1$  joignant  $v_i$  à  $v_j$  en passant par  $v_s$ .

### DÉFINITION

Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  à coefficients (réels) positifs ou nuls est **irréductible** si pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $N(i, j)$  tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

### DÉFINITION

Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  à coefficients (réels) positifs ou nuls est **primitive** s'il existe  $N$  tel que pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter  $A^N > 0$

On remarque aussi que toute matrice primitive est irréductible.

### DÉFINITION

Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  à coefficients (réels) positifs ou nuls est **irréductible** si pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $N(i, j)$  tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

### DÉFINITION

Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  à coefficients (réels) positifs ou nuls est **primitive** s'il existe  $N$  tel que pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter  $A^N > 0$

On remarque aussi que toute matrice primitive est irréductible.

$A, B \in \mathbb{R}_n^n$ , commode d'écrire  $A < B$  (resp.  $\leq, \geq, >$ ) si l'inégalité a lieu composante à composante.

### PROPOSITION

Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) est fortement connexe (resp. connexe) SSI sa matrice d'adjacence est irréductible.

## REMARQUE

Si la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) est primitive,

- ▶ le graphe est non seulement connexe et
- ▶ il existe  $N$  tel que, quelle que soit la paire de sommets considérée, il existe un chemin de longueur  $N$  les joignant.

Par abus de langage, on parle de **graphe primitif**



## THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS

Soit  $A \geq 0$  une matrice carrée **irréductible** de dimension  $n$ .

- ▶ La matrice  $A$  possède un vecteur propre  $v_A \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $w_A \in \mathbb{R}^n$ ) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre  $\lambda_A > 0$ ,

$$A v_A = \lambda_A v_A \quad (\text{resp. } \widetilde{w}_A A = \lambda_A \widetilde{w}_A).$$

- ▶ Cette valeur propre  $\lambda_A$  possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- ▶ Tout vecteur propre de  $A$  dont les composantes sont strictement positives est un multiple de  $v_A$ .
- ▶ Toute autre valeur propre  $\mu \in \mathbb{C}$  de  $A$  est telle que  $|\mu| \leq \lambda_A$ .



## SUITE

- ▶ Si  $\mu$  est une valeur propre de  $A$  telle que  $|\mu| = \lambda_A$ , alors

$$\mu = \lambda_A e^{2ik\pi/d}$$

pour un certain  $d \geq 1$  et  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ . De plus, pour tout  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $\lambda_A e^{2ik\pi/d}$  est une valeur propre de  $A$ .

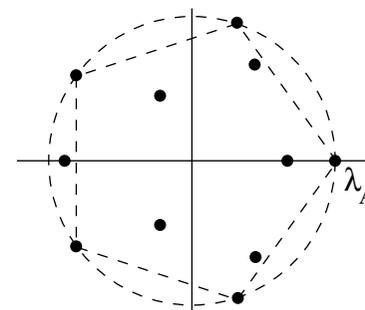
- ▶ Soit  $B$  une matrice réelle à coefficients positifs ou nuls de même dimension que  $A$ . Si  $B \leq A$ , alors pour toute valeur propre  $\mu$  de  $B$ , on a  $|\mu| \leq \lambda_A$  et l'égalité a lieu si et seulement si  $A = B$ .



La valeur propre  $\lambda_A$  est la **valeur propre de Perron** de  $A$ .

Une matrice irréductible possède toujours une valeur propre réelle dominante  $\lambda_A$ .

On peut avoir **d'autres valeurs propres** de module égal à  $\lambda_A$  mais dans ce cas, celles-ci sont exactement obtenues par multiplication de  $\lambda_A$  par les racines  $d$ -ièmes de l'unité.



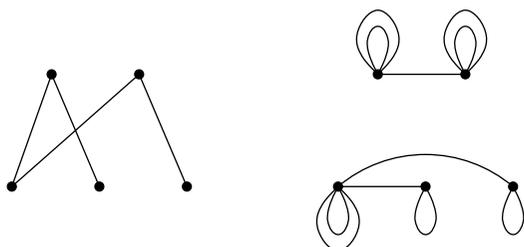
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



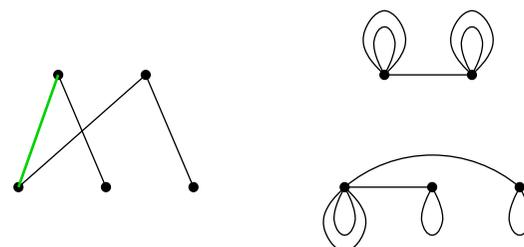
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



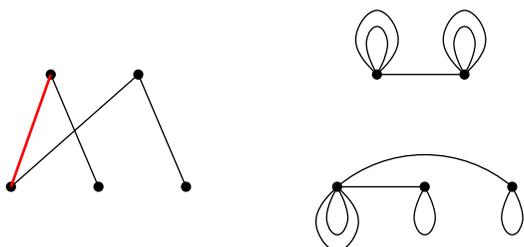
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



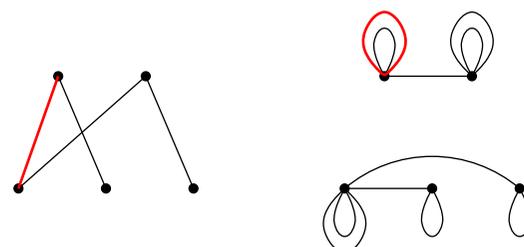
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



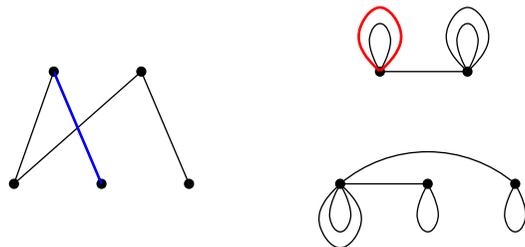
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



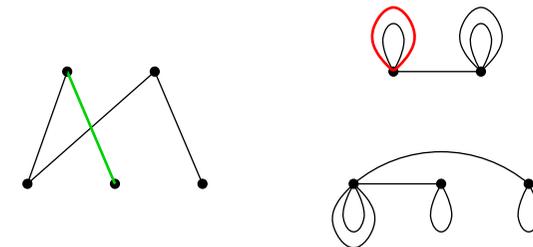
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



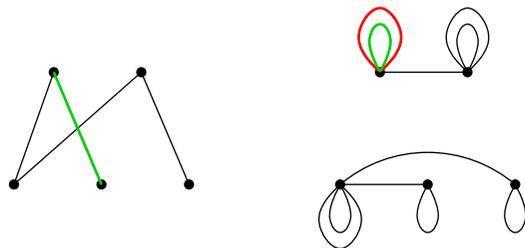
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



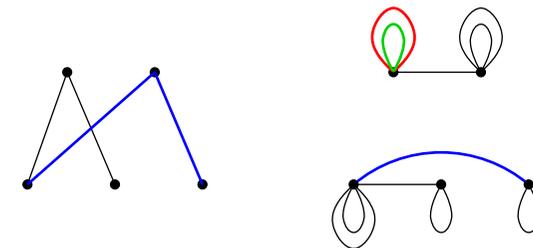
### COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \text{ SSI } \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



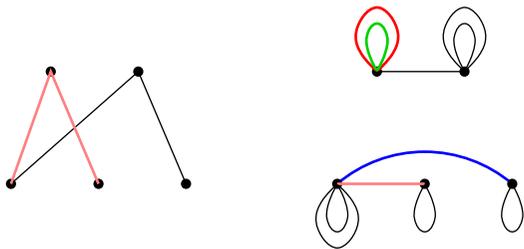
## COROLLAIRE

Si  $G = (V, E)$  est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors  $G$  est biparti.

Soient  $\lambda$  la valeur propre de Perron de  $G$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Par hypothèse  $-\lambda$  est aussi une valeur propre de  $G$  et considérons  $y \neq 0$ , l'un de ses vecteurs propres.

$x$  et  $y$  sont linéairement indépendants.

Soit  $A = A(G)$ ,  $A^2$  est la matrice d'adjacence du multi-graphe  $G' = (V, E')$  où  $\{a, b\} \in E' \iff \exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$ .



$\lambda^2$  est la valeur propre dominante de  $A^2$  et  $x$  et  $y$  en sont des vecteurs propres.

La multiplicité de  $\lambda^2$  est au moins 2 et on en déduit que  $A^2$  ne peut être irréductible (i.e.,  $G'$  n'est pas connexe).

Thèse :  $G$  est biparti.

Montrons d'abord que

$G'$  contient au moins deux composantes connexes...



Soit  $u$  un sommet quelconque fixé.

On définit

- ▶  $V_1$  : ensemble des sommets joints à  $u$  par un chemin de longueur impaire dans  $G$ .
- ▶  $V_2$  : ensemble des sommets joints à  $u$  par un chemin de longueur paire dans  $G$ .

Puisque  $G$  est connexe,

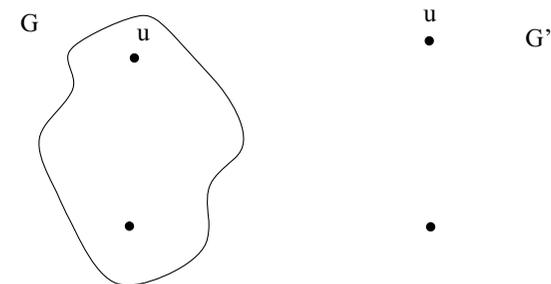
$$V_1 \cup V_2 = V$$

On va montrer que

- ▶ La restriction de  $G'$  à  $V_1$  est connexe
- ▶ La restriction de  $G'$  à  $V_2$  est connexe
- ▶  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  (ok, sinon,  $G'$  connexe !)



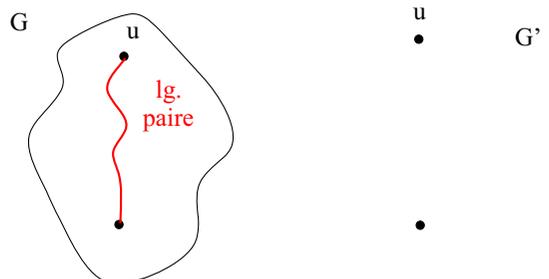
Tous les sommets de  $V_2$  joints à  $u$  par un chemin de longueur paire dans  $G$  sont connectés à  $u$  dans  $G'$ .



La restriction de  $G'$  aux sommets de  $V_2$  est donc connexe.

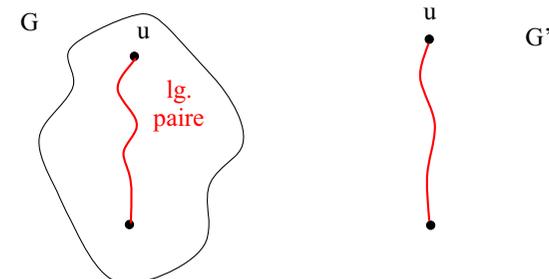


Tous les sommets de  $V_2$  joints à  $u$  par un chemin de longueur paire dans  $G$  sont connectés à  $u$  dans  $G'$ .



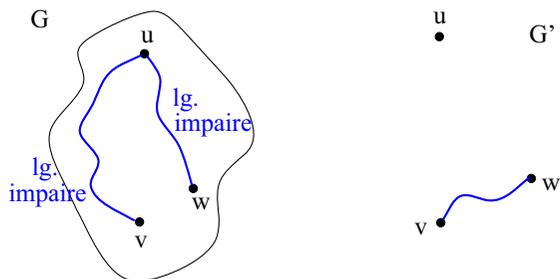
La restriction de  $G'$  aux sommets de  $V_2$  est donc connexe.

Tous les sommets de  $V_2$  joints à  $u$  par un chemin de longueur paire dans  $G$  sont connectés à  $u$  dans  $G'$ .

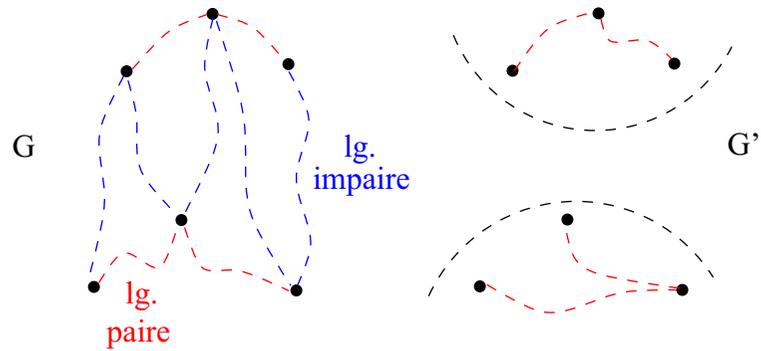


La restriction de  $G'$  aux sommets de  $V_2$  est donc connexe.

Tous les sommets de  $V_1$  joints à  $u$  par un chemin de longueur impaire dans  $G$ , sont connectés entre eux dans  $G'$ .  
Soient  $v, w \in V_1$ .



La restriction de  $G'$  à  $V_1$  est connexe. De plus,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , car sinon  $G'$  serait connexe.



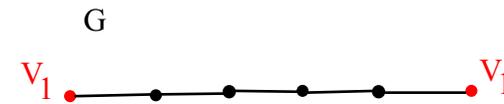
Puisque dans  $G'$ , il n'y a aucune arête entre un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$ ,

dans  $G$ , il n'y a aucun chemin de longueur paire entre deux tels sommets.

Autrement dit, un chemin joignant dans  $G$  un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$  est nécessairement de longueur impaire.

Il reste à montrer qu'un chemin joignant dans  $G$  deux sommets de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est nécessairement de longueur paire.

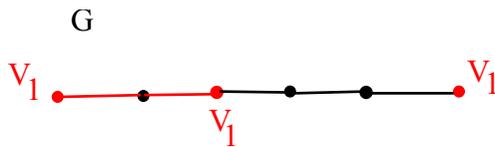
P.A. Supposons que, dans  $G$ , un chemin de longueur impaire  $2\ell + 1$  joigne deux sommets de  $V_1$  (par symétrie, le raisonnement s'applique aussi à deux sommets de  $V_2$ ).



Dans  $G$ , il existe une arête entre deux sommets  $a$  et  $b$  de  $V_1$ .

$G$  étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet  $c$  de  $V_1$  et un sommet  $d$  de  $V_2$ .

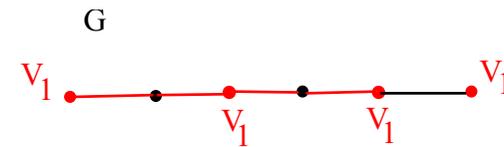
P.A. Supposons que, dans  $G$ , un chemin de longueur impaire  $2\ell + 1$  joigne deux sommets de  $V_1$  (par symétrie, le raisonnement s'applique aussi à deux sommets de  $V_2$ ).



Dans  $G$ , il existe une arête entre deux sommets  $a$  et  $b$  de  $V_1$ .

$G$  étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet  $c$  de  $V_1$  et un sommet  $d$  de  $V_2$ .

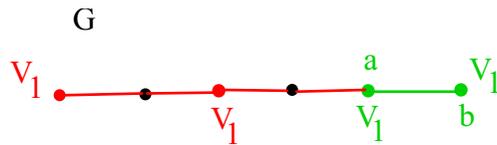
P.A. Supposons que, dans  $G$ , un chemin de longueur impaire  $2\ell + 1$  joigne deux sommets de  $V_1$  (par symétrie, le raisonnement s'applique aussi à deux sommets de  $V_2$ ).



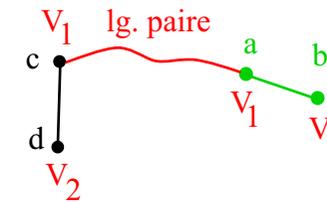
Dans  $G$ , il existe une arête entre deux sommets  $a$  et  $b$  de  $V_1$ .

$G$  étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet  $c$  de  $V_1$  et un sommet  $d$  de  $V_2$ .

P.A. Supposons que, dans  $G$ , un chemin de longueur impaire  $2\ell + 1$  joint deux sommets de  $V_1$  (par symétrie, le raisonnement s'applique aussi à deux sommets de  $V_2$ ).



Dans  $G$ , il existe une arête entre deux sommets  $a$  et  $b$  de  $V_1$ .  
 $G$  étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet  $c$  de  $V_1$  et un sommet  $d$  de  $V_2$ .



Il existe un chemin de longueur paire joignant  $b$  à  $d$  !

Ceci est en contradiction avec : un chemin joignant dans  $G$  un sommet de  $V_1$  et un sommet de  $V_2$  est nécessairement de longueur impaire.

### CONCLUSION

$G$  est biparti car

- ▶ toute paire de sommets de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) est joint (exclusivement) par un chemin de longueur paire
- ▶ toute paire de sommets de  $V_1 \times V_2$  est joint (exclusivement) par un chemin de longueur impaire

En particulier, les arêtes sont des chemins de longueur impaire.

### THÉORÈME DE PERRON

Soit  $A \geq 0$  une matrice carrée primitive de dimension  $n$ .

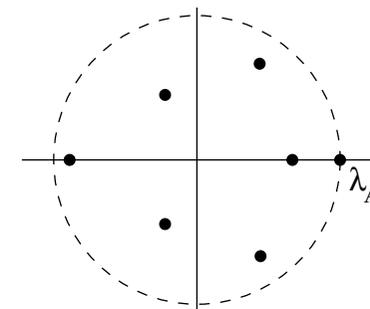
- ▶ La matrice  $A$  possède un vecteur propre  $v_A \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $w_A \in \mathbb{R}^n$ ) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre  $\lambda_A > 0$ ,

$$A v_A = \lambda_A v_A \text{ (resp. } \widetilde{w}_A A = \lambda_A \widetilde{w}_A \text{)}.$$

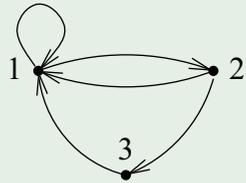
- ▶ Cette valeur propre  $\lambda_A$  possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- ▶ Tout vecteur propre de  $A$  dont les composantes sont strictement positives est un multiple de  $v_A$ .
- ▶ Toute autre valeur propre  $\mu \in \mathbb{C}$  de  $A$  est telle que  $|\mu| < \lambda_A$ .
- ▶ Soit  $B$  une matrice réelle à coefficients positifs ou nuls de même dimension que  $A$ . Si  $B \leq A$ , alors pour toute valeur propre  $\mu$  de  $B$ , on a  $|\mu| \leq \lambda_A$  et l'égalité a lieu si et seulement si  $A = B$ .

Ainsi, la valeur propre de Perron  $\lambda_A$  est l'unique valeur propre dominante. Toute autre valeur propre de  $A$  a un module strictement inférieur à  $\lambda_A$ .

Résultat plus fort que dans le cas irréductible.



## EXEMPLE, CAS PRIMITIF



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

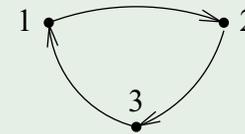
$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(G)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$   
 $2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ ,  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$   
 $3 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ .

$$\lambda_A \simeq 1.83929, \quad \lambda_{2,3} \simeq -0.41964 \pm 0.60629i.$$



## EXEMPLE, CAS IRRÉDUCTIBLE



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est f. connexe et donc, la matrice  $A(G)$  est au moins irréductible.

$$A(G)^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(G)^{3n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



## EXEMPLE, CAS IRRÉDUCTIBLE (SUITE)

Les valeurs propres sont ici les racines cubiques de l'unité

$$1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}$$

plusieurs valeurs propres de module maximum (= 1).

Pour joindre deux sommets fixés, **uniquement certaines longueurs de chemin** peuvent être considérées.

Par exemple, pour joindre les sommets 2 et 3, uniquement des chemins de longueur congrue à 1 modulo 3 peuvent être envisagés.



## COROLLAIRE

Soit  $A \geq 0$  une matrice carrée. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- I)  $A$  est primitive,
- II) il existe  $N \geq 1$  tel que  $A^N > 0$ ,
- III) il existe  $N \geq 1$  tel que  $A^n > 0$  pour tout  $n \geq N$ .

Par définition, i)  $\Rightarrow$  ii) et ii)  $\Rightarrow$  i).

ii)  $\Rightarrow$  iii). Puisque  $A^N > 0$ , on en déduit que toute colonne de  $A$  contient au moins un élément strictement positif. Par conséquent, si  $A^k > 0$ , alors  $A^k \cdot A > 0$  et de proche en proche,  $A^{k+i} > 0$  pour tout  $i \geq 0$ .

Enfin, il est immédiat que iii)  $\Rightarrow$  ii).



## PÉRIODE D'UNE MATRICE IRRÉDUCTIBLE

Soit  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} = A \geq 0$ . Par **indice** de  $A$ , on entend un élément de  $\{1, \dots, d\}$ .

### DÉFINITION

Soit  $i$  un indice. S'il existe  $N > 0$  tel que  $[A^N]_{i,i} > 0$ , alors la **période** de l'indice  $i$  est le **p.g.c.d.** de l'ensemble des entiers  $n > 0$  pour lesquels

$$[A^n]_{i,i} > 0.$$

On la note  $p(i)$ .

Le **p.g.c.d.** d'un ensemble infini d'entiers  $X = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$  est le plus grand entier  $p$  appartenant à l'ensemble fini  $\{1, 2, \dots, x_1\}$  tel que pour tout  $k \geq 1$ ,  $p$  divise  $x_k$ .

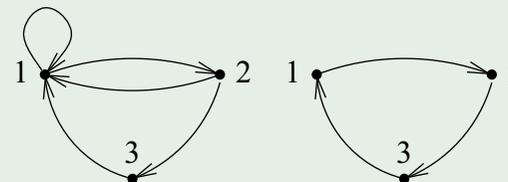
Remarque : définition en termes de graphes...



### REMARQUE

La **période d'un sommet**  $i$  appartenant à une composante f. connexe = p.g.c.d. de l'ensemble des entiers  $k$  pour lesquels il existe au moins un circuit de longueur  $k$  passant par  $i$ .

### EXEMPLE



### LEMME

Soient  $i, j$  deux indices de  $A \geq 0$ . S'il existe  $m, n$  tels que  $[A^m]_{i,j} > 0$  et  $[A^n]_{j,i} > 0$ , alors  $p(i) = p(j)$ .

### AUTREMENT DIT...

Tous les sommets d'une composante f. connexe ont même période.

Pour tout  $s$  tel que  $[A^s]_{j,j} > 0$ , on a

$$\begin{aligned} [A^{m+s+n}]_{i,i} &= \sum_{k=1}^n [A^{m+s}]_{i,k} [A^n]_{k,i} \\ &\geq [A^{m+s}]_{i,j} [A^n]_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^n [A^m]_{i,k} [A^s]_{k,j} [A^n]_{j,i} \\ &\geq [A^m]_{i,j} [A^s]_{j,j} [A^n]_{j,i} > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(i)$  divise  $m + n + s$ .



Pour un tel  $s$ , on a  $[A^{2s}]_{j,j} > 0$  (en effet, si on effectue le produit matriciel  $[A^s \cdot A^s]_{j,j}$ , on retrouve le terme  $[A^s]_{j,j} \cdot [A^s]_{j,j}$ ). Dès lors, on a aussi

$$[A^{m+2s+n}]_{i,i} > 0.$$

$\Rightarrow p(i)$  divise  $m + 2s + n$

$p(i)$  divise  $s$  ( $= m + 2s + n - (m + s + n)$ ).

Pour tout  $s$  tel que  $[A^s]_{j,j} > 0$ ,  $p(i)$  divise  $s$  donc  $p(i) \leq p(j)$ . Par symétrie, on a aussi que  $p(j) \leq p(i)$  et  $p(i) = p(j)$ .



## CONCLUSION

- ▶ Pour une matrice irréductible, toutes les périodes sont identiques.
- ▶ Tous les sommets d'une composante f. connexe ont même période.

## DÉFINITION

Une matrice irréductible  $A \in \mathbb{R}_n^n$  est **cyclique** de période  $p$  si tous les indices de  $A$  sont de période  $p > 1$ .

Sinon, tous les indices sont de période  $p = 1$  et  $A$  est dite **acyclique**.

## LEMME

Soit  $A \geq 0$  une matrice carrée irréductible de **période**  $p \geq 1$ .  
Soit  $i$  un indice,  $\exists N_i \geq 0 : \forall n \geq N_i, [A^{np}]_{i,i} > 0$ .

Supposons tout d'abord que  $[A^{kp}]_{i,i} > 0$  et  $[A^{\ell p}]_{i,i} > 0$ . Dès lors

$$[A^{(k+\ell)p}]_{i,i} \geq [A^{kp}]_{i,i} [A^{\ell p}]_{i,i} > 0.$$

L'ensemble  $S$  des multiples  $np$  de  $p$  qui sont tels que  $[A^{np}]_{i,i} > 0$  est stable pour l'addition (et  $S$  contient au moins un multiple de  $p$ ). De plus, le p.g.c.d. des éléments de  $S$  vaut  $p$ . La conclusion découle alors du lemme suivant.

## LEMME

Soit  $X \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble d'entiers stable pour l'addition. Alors  $X$  contient tous les multiples du p.g.c.d. des éléments de  $X$  à l'exception éventuellement d'un nombre fini d'entre eux.

## EXEMPLE

$2, 7 \in X$  et  $X$  stable par addition

$$2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots$$

Soit  $p$  le p.g.c.d. des éléments de  $X$ . Quitte à diviser les éléments de  $X$  par  $p$ , on peut supposer que  $p = 1$ .  
Dès lors, il existe un ensemble fini  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$  tel que

$$\text{p.g.c.d. } \{x_1, \dots, x_k\} = 1$$

Nous savons que le p.g.c.d. de  $X = \{x_1 < x_2 < \dots\}$  vaut 1.  
 $\{x_1\}$ , le p.g.c.d. potentiel  $x_1$   
 $\{x_1, x_2\}$ , le p.g.c.d. potentiel  $\leq x_1$   
 $\{x_1, x_2, x_3\}$ ... à chaque étape, le p.g.c.d. décroît.

Il existe  $k$  tel que le p.g.c.d. de  $\{x_1, \dots, x_k\}$  soit 1.  
Sinon, le p.g.c.d. de  $X$  serait  $> 1$ !

$k$  peut être  $> 2$ , exemple :  $\{6, 10, 15\}$  dont le p.g.c.d. vaut 1 mais dont les éléments 2 à 2 ne sont pas premiers entre eux.

$$\text{p.g.c.d. } \{x_1, \dots, x_k\} = 1$$

thm. de Bezout :  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$  t.q.  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 1$ .  
Si on regroupe tous les termes dont les coefficients  $\lambda_i$  sont positifs (resp. négatifs), cette somme se réécrit

$$m - n = 1$$

avec  $m, n \in X$  car  $X$  est stable pour l'addition. Soit  $q$  un entier tel que  $q \geq n(n-1)$ . Par division euclidienne,

$$q = an + b, \quad 0 \leq b < n.$$

De plus,  $a \geq n-1$ . Puisque  $m - n = 1$ , il vient

$$q = an + b(m - n) = (a - b)n + bm$$

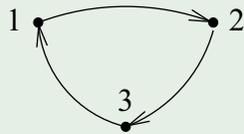
avec  $a - b \geq 0$ . On en conclut  $q$  appartient à  $X$  (car  $m, n \in X$ ).  
Donc tout  $q \geq n(n-1)$  appartient à  $X$ .

## THÉORÈME FONDAMENTAL (CAS IRRÉDUCTIBLE)

Soit  $A \geq 0$  une matrice carrée irréductible de période  $p \geq 1$ .  
 Pour toute paire  $i, j$  d'indices de  $A$ , il existe un unique entier  $r_{i,j} \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que

- ▶  $[A^n]_{i,j} > 0$  entraîne  $n \equiv r_{i,j} \pmod{p}$  et
- ▶ il existe  $N_{i,j}$  tel que  $[A^{np+r_{i,j}}]_{i,j} > 0$  pour tout  $n \geq N_{i,j}$ .

### EXEMPLE



$p = 3$  et si on fixe  $i = 2$ , on a  $r_{2,1} = 2$ ,  $r_{2,2} = 0$  et  $r_{2,3} = 1$ . En effet,  $[A(G)^{3n+2}]_{2,1} = 1$ ,  $[A(G)^{3n+0}]_{2,2} = 1$  et  $[A(G)^{3n+1}]_{2,3} = 1$ .

Supposons  $[A^m]_{i,j} > 0$  et  $[A^n]_{i,j} > 0$ .

Thèse :  $m \equiv n \pmod{p}$ .

Puisque  $A$  est irréductible, il existe  $\ell$  tel que  $[A^\ell]_{j,i} > 0$ . Dès lors,

$$[A^{m+\ell}]_{i,i} \geq [A^m]_{i,j}[A^\ell]_{j,i} > 0 \quad \text{et} \quad [A^{n+\ell}]_{i,i} > 0.$$

La période  $p$  divise donc  $m + \ell$  et  $n + \ell$  donc leur différence.  
 Autrement dit,  $m - n \equiv 0 \pmod{p}$ .

Passons à la deuxième partie. Puisque  $A$  est irréductible, il existe  $\ell$  tel que  $[A^\ell]_{i,j} > 0$  et au vu de la première partie,

$$\ell = mp + r_{i,j}.$$

Posons  $N_{i,j} = N_i + m$  (avec  $N_i$  donné dans le lemme ...).

Par définition de  $N_i$ , on a

$$\forall n \geq N_i, [A^{np}]_{i,i} > 0.$$

De là, si  $k \geq N_{i,j}$ , alors

$$kp + r_{i,j} = (n + m)p + r_{i,j} \quad \text{avec } n \geq N_i.$$

et

$$[A^{kp+r_{i,j}}]_{i,j} \geq [A^{np}]_{i,i}[A^{mp+r_{i,j}}]_{i,j} > 0.$$

## PROPOSITION

Une matrice irréductible est acyclique SSI elle est primitive.

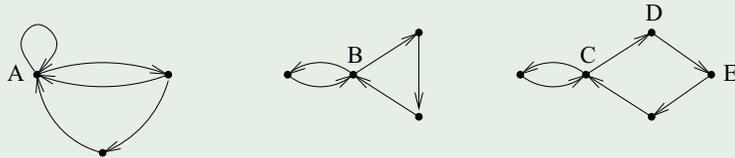
Si la matrice est acyclique (i.e., de période  $p = 1$ ), alors avec les notations du thm...,  $r_{i,j} = 0 \forall i, j$ . Donc

$$[A^n]_{i,j} > 0 \quad \text{si } n \geq N_{i,j}.$$

On pose  $\mathcal{N} = \sup_{i,j} N_{i,j}$ , alors  $A^{\mathcal{N}} > 0$ . primitive.

Réciproquement si  $A$  est primitive,  $A$  est nécessairement irréductible et pour  $k$  suffisamment grand et pour tout indice  $i$  de  $A$ ,  $[A^k]_{i,i} > 0$  et  $[A^{k+1}]_{i,i} > 0$ . Le p.g.c.d. de  $k$  et de  $k + 1$  étant 1, la conclusion en découle.

## APPLICATIONS



Signalons sans démonstration...

## “RÉCIPROQUE”

Si  $A \geq 0$  est une matrice irréductible possédant une valeur propre dominante  $\lambda$  (i.e., pour toute valeur propre  $\mu \neq \lambda$  de  $A$ ,  $|\mu| < \lambda$ ), alors  $A$  est primitive.



## ESTIMER LE NOMBRE DE CHEMINS DE LONGUEUR $n$

### PROPOSITION

Si  $A$  est une matrice primitive,

$$A^k = \lambda_A^k v_A \widetilde{w}_A + o(\lambda_A^k)$$

où  $v_A$  et  $\widetilde{w}_A$  sont des vecteurs propres choisis t.q.  $\widetilde{w}_A \cdot v_A = 1$ .

### EXEMPLE

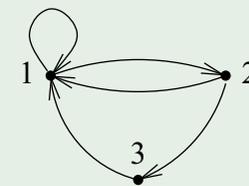
$f(x)$  est en  $o(g)$  si  $f/g$  tend vers 0 si  $x \rightarrow \infty$ .  
 $x^3 + 5x^2 + 8 = x^3 + o(x^3)$

### REMARQUE

Possible d'obtenir des développements plus fins du terme d'erreur en l'exprimant à l'aide de la deuxième valeur propre (par module décroissant) de  $A$ .



## EXEMPLE PRIMITIF

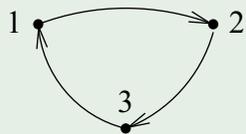


Pour tout couple  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ , il existe une constante  $d_{i,j} > 0$  telle que le nombre  $c_{i,j}(n)$  de chemins de longueur  $n$  joignant  $i$  à  $j$  satisfasse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{i,j}(n)}{d_{i,j} \lambda_A^n} = 1.$$



## EXEMPLE (NON PRIMITIF)



$$(c_{1,3}(n))_n = 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$$

est clairement une suite divergente. Ainsi, la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{1,3}(n)}{\lambda_A^n}$$

n'existe pas !

Des combinaisons convenables de puissances des racines de l'unité s'annulent :

$$\frac{(e^{2i\pi/3})^n + (e^{4i\pi/3})^n + 1}{3} = 0, \text{ si } n \equiv 1, 2 \pmod{3}.$$



## RAPPEL

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres distinctes de  $M \in \mathbb{C}_d^d$  de multiplicité géométrique  $m_1, \dots, m_p$ , alors  $\forall k$ ,

$$(M^k)_{i,j} = \sum_{t=1}^p P_{i,j}^{(t)} \lambda_t^k$$

où  $P_{i,j}^{(t)}$  est un polynôme de degré  $< m_t$ .

Ainsi, lorsqu'on considère un quotient comme  $(M^k)_{i,j} / \lambda_M^k$ , ne subsistent à la limite que les valeurs propres de module maximum.

Dans l'exemple, n'apparaissent que les trois racines de l'unité.



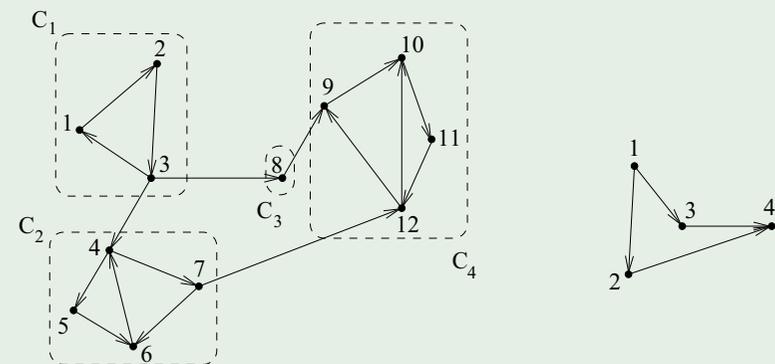
## GRAPHE AYANT PLUSIEURS COMPOSANTES F. CONNEXES

Estimer  $c_{i,j}(n)$ ...

On considère le condensé  $\mathcal{C}$  d'un graphe  $G$  (ou graphe acyclique des composantes) dont les sommets sont les composantes f. connexes de  $G$ .

Puisque le condensé est sans cycle, on peut ordonner ses sommets par **tri topologique**.

## EXEMPLE

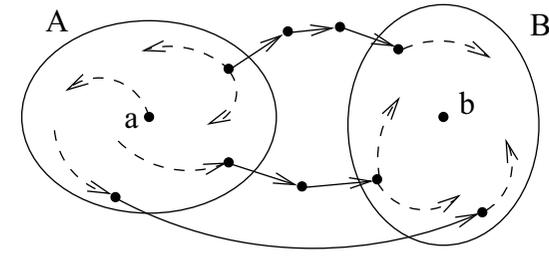


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**REMARQUE**  
Le spectre d'un graphe est l'union des spectres de ses composantes connexes.

**HYPOTHÈSE DE TRAVAIL**  
Toutes les composantes f. connexes sont **primitives**.

Soit un graphe fini possédant deux composantes f. connexes primitives  $A$  et  $B$  et deux sommets  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $a \rightarrow b$ .  
Les chemins joignant un sommet de  $A$  à un sommet de  $B$  sont en nombre fini et de longueur bornée (seuls  $a$  et  $b$  sont dans  $A \cup B$ ).



Si  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  sont les valeurs propres de Perron de  $A$  et de  $B$  respectivement, on en déduit que le nombre  $c_{a,b}(n)$  de chemins de longueur  $n$  joignant  $a$  à  $b$  est **proportionnel** à

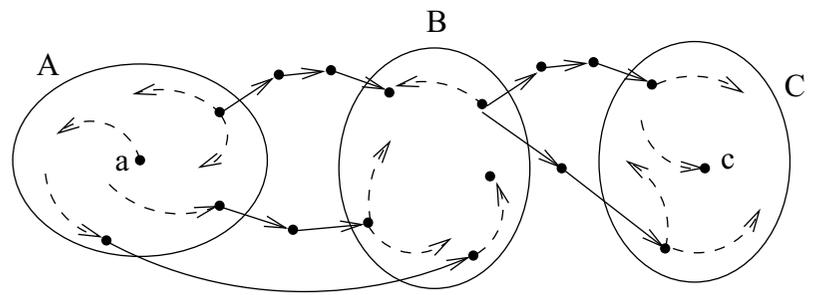
$$\sum_{i=0}^n \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} = \lambda_B^n \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^i.$$

- Si  $\lambda_A = \lambda_B$ , alors<sup>1</sup>  
 $c_{a,b}(n) \asymp n\lambda^n$
- Sinon,  $\lambda_A \neq \lambda_B$  et

$$\sum_{i=0}^n \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} = \frac{\lambda_A^{n+1} - \lambda_B^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_B} \asymp [\max(\lambda_A, \lambda_B)]^n.$$

<sup>1</sup>On a  $f \asymp g$  SSI il existe  $\alpha$  et  $\beta$  t.q.  $\alpha g \leq f \leq \beta g$ .

Estimer le nombre  $c_{a,b,c}(n)$  de chemins de longueur  $n$  joignant  $a \in A$  à  $c \in C$  en passant par un sommet quelconque de  $B$ .



Puisque le nombre de sommets de  $B$  est fini, le nombre de chemins recherché est **proportionnel** à

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \lambda_A^i \lambda_B^j \lambda_C^{n-i-j}. \tag{1}$$

Nous traitons trois cas.

- Si  $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C$ , alors (1) devient

$$\lambda_A^n \sum_{i=0}^n (n+1-i) = \lambda_A^n \left[ (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] \asymp n^2 \lambda_A^n.$$

- Si  $\lambda_A = \lambda_B \neq \lambda_C$  (par symétrie, les autres cas se traitent de la même façon), alors (1) devient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_A^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda_A^j \lambda_C^{n-i-j}}_{\frac{\lambda_A^{n-i+1} - \lambda_C^{n-i+1}}{\lambda_A - \lambda_C}} = \frac{(n+1)\lambda_A^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_C} - \frac{\lambda_C}{\lambda_A - \lambda_C} \underbrace{\sum_{i=0}^n \lambda_A^i \lambda_C^{n-i}}_{\frac{\lambda_A^{n+1} - \lambda_C^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_C}}.$$

Ainsi, si  $\lambda_A = \lambda_B > \lambda_C$ , on trouve

$$c_{a,B,c}(n) \asymp n \lambda_A^n$$

et si  $\lambda_A = \lambda_B < \lambda_C$ , on trouve

$$c_{a,B,c}(n) \asymp \lambda_C^n.$$



- Enfin, si  $\lambda_A, \lambda_B$  et  $\lambda_C$  2 à 2 distincts, alors (1) devient

$$\sum_{i=0}^n \lambda_A^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda_B^j \lambda_C^{n-i-j}}_{\frac{\lambda_B^{n-i+1} - \lambda_C^{n-i+1}}{\lambda_B - \lambda_C}} = \frac{1}{\lambda_B - \lambda_C} \left( \lambda_B \sum_{i=0}^n \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} - \lambda_C \sum_{i=0}^n \lambda_A^i \lambda_C^{n-i} \right)$$

et on obtient

$$c_{a,B,c}(n) \asymp [\max(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C)]^n.$$



## EN GÉNÉRAL

- ▶ Détecter la plus grande valeur de Perron  $\lambda$  des différentes composantes connexes par lesquelles passent les chemins d'intérêt
- ▶ Compter le nombre  $k$  de composantes ayant cette valeur propre comme valeur dominante.
- ▶ Le nombre de chemins de longueur  $n$  se comporte alors asymptotiquement comme  $n^{k-1} \lambda^n$ .



GOOGLE...



## ALGORITHME DE PAGERANK : SERGEY BRIN, LARRY PAGE

Lorsqu'on effectue une recherche sur un mot clé donné, Google trie les pages contenant ce mot clé en se basant sur une mesure, appelée "PageRank", destinée à quantifier la qualité des pages et à déterminer si elles font ou non **autorité** dans le domaine envisagé.





Larry Page, Sergey Brin



- ▶ on accorde **plus d'importance**, i.e., un score de "PageRank" plus élevé, aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine, c'est-à-dire qui ont un PageRank élevé ;
- ▶ on accorde **d'autant moins de crédit** à une citation si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens.

### UNE MATRICE "MONSTRUEUSE"

$G = (V, E)$  où les sommets  $1, \dots, n$  représentent les pages de l'Internet (en 2005,  $n \sim 8.10^9$ ) et arc  $(i, j)$  SSI la page  $i$  possède un lien pointant vers la page  $j$ .



Le PageRank  $\pi_j \geq 0$  de la page  $j \in \{1, \dots, n\}$  serait donné par

$$\pi_j = \sum_{i \in \text{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)} \quad (2)$$

formule récursive, on ne dispose pas *a priori* de méthode assurant

- ▶ **l'existence**,
- ▶ **l'unicité**,
- ▶ **le calcul efficace**

d'une solution  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  non triviale.

On peut supposer que les scores recherchés sont normalisés,

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1.$$

## ON PERTUBE LE MODÈLE

### RAPPEL : MODÈLE PROPOSÉ

$$\pi_j = \sum_{i \in \text{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)}$$

Réécriture matricielle (“ $H$ ” comme “hyperlien”),

$$\pi = \pi H \quad (3)$$

où

$$H_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 0 & \text{si } d^+(i) = 0 \end{cases}$$

avec  $A(G)$  la matrice d’adjacence du graphe  $G$



1. Pour **se débarrasser des “puits”**, i.e., des pages ne pointant vers aucune autre page et pour obtenir une matrice stochastique, on introduit une matrice  $S$  (“ $S$ ” comme “stochastique”) définie par

$$S_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 1/n & \text{si } d^+(i) = 0. \end{cases}$$



## ON PERTUBE LE MODÈLE

2. Pour **assurer la forte connexité du graphe**, on construit une matrice  $G$  (“ $G$ ” comme Google) donnée par la combinaison affine (et même convexe) suivante avec un réel  $\alpha \in [0, 1]$  fixé

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) J/n$$

où  $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ . L’équation initiale (3) est remplacée par

$$\pi = \pi G.$$

(La matrice  $J/n$  est parfois appelée *matrice de téléportation*)



## CHOIX HEURISTIQUE DE $\alpha$

### REMARQUE

Google attribue à  $\alpha$  une valeur de 0,85. Ce choix n’est pas arbitraire.

Au plus  $\alpha$  est proche de 1, au mieux on approche le modèle “naturel” (3) proposé initialement : on diminue le rôle artificiel de la matrice de téléportation.

Cependant, on peut montrer que ce paramètre  $\alpha$  contrôle la vitesse de convergence de la méthode de calcul développée et donc le nombre d’itérations à effectuer pour obtenir une estimation du vecteur  $\pi$



## CHOIX HEURISTIQUE DE $\alpha$

Quand  $\alpha$  tend vers 1, le nombre d'itérations devient prohibitif (cf. C. Meyer et A. Langville).

$\alpha$	nombre d'itérations
0,5	34
0,75	81
0,8	104
0,85	142
0,9	219
0,95	449
0,99	2292
0,999	23015

## CHOIX HEURISTIQUE DE $\alpha$

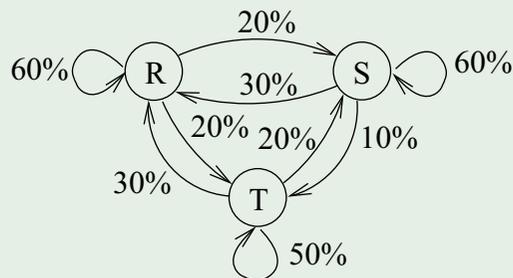
### COMPROMIS

$\alpha = 0,85$  semble un bon compromis entre le caractère artificiel introduit par la matrice de téléportation et la masse de calculs à réaliser.

Par une discussion plus fine sur les valeurs propres : au plus  $\alpha$  est proche de 1, au plus  $\pi$  est sensible aux petites perturbations de la matrice  $H$  (gênant vu la grande volatilité du web et de sa structure)

## LE MODÈLE DU SURFEUR

### EXEMPLE, CHAÎNE DE MARKOV



$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

## LE MODÈLE DU SURFEUR

### EXEMPLE, CHAÎNE DE MARKOV

$$(0,3 \quad 0,5 \quad 0,2) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,39 \quad 0,4 \quad 0,21).$$

$$(0,39 \quad 0,4 \quad 0,21) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,417 \quad 0,36 \quad 0,223).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (0,3 \quad 0,5 \quad 0,2) P^n = ???$$

## INTERPRÉTATION DE LA “GOOGLE-MATRICE” $G$

un surfeur qui, se trouvant sur une page quelconque, a deux choix possibles

- ▶ avec une probabilité  $\alpha$ , il clique au hasard et de manière uniforme sur l'**un des liens de la page** pour changer de page.
- ▶ Soit, avec une probabilité  $1 - \alpha$ , il clique au hasard et de manière uniforme sur l'**une des  $n$  pages de l'Internet** tout entier.

$G_{ij}$  représente la probabilité de transition lorsque le surfeur se trouve sur la page  $i$  de passer à la page  $j$ .

## INTERPRÉTATION

Partant d'une distribution initiale de probabilités, par exemple  $\pi^{(0)} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ , l'application de  $G^k$  permet d'estimer la probabilité de notre surfeur de se trouver sur l'une des pages  $1, \dots, n$  après  $k$  clics,

$$\pi^{(k)} = \pi^{(0)} G^k.$$

→ nous verrons que l'utilisation de cette matrice  $G$  (à la place de  $H$ ) assure l'**existence et l'unicité d'une distribution limite**  $\pi$ .

## MODÈLES INITIAL ET PERTURBÉ

Par rapport à l'équation initiale (2), l'emploi de la matrice  $G$  donne la formule suivante pour la détermination des **“nouveaux”  $\pi_j$**  qui seront **effectivement calculés**

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=1}^n \pi_i \left( \alpha S_{ij} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \right) \\ &= \alpha \sum_{i \in \text{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)} + \frac{1}{n} \left( 1 - \alpha + \alpha \sum_{i: d^+(i)=0} \pi_i \right). \end{aligned}$$

Nous nous sommes donc éloignés quelque peu du modèle initialement proposé mais ces modifications vont permettre un calcul efficace (et assurant l'existence et l'unicité d'une solution)!

Les matrices  $S$ ,  $J/n$  et  $G$  sont **stochastiques**, autrement dit, la somme des éléments d'une ligne quelconque vaut 1.

## LEMME

Si  $M$  est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre dominante de  $M$ .

Soit  $M \in \mathbb{Q}_r^r$ . En multipliant tous les éléments de  $M$  par le p.g.c.d.  $\gamma$  des dénominateurs des éléments de  $M$ , la matrice

$$M' = \gamma M$$

obtenue est telle que la somme des éléments de chaque ligne vaut  $\gamma \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit donc de la matrice d'adjacence d'un graphe  $\gamma$ -régulier. Comme nous le verrons,  $\gamma M$  possède  $\gamma$  comme valeur propre dominante (i.e., toute autre valeur propre  $\mu$  est telle que  $|\mu| \leq \gamma$ ). La conclusion suit aisément en divisant par  $\gamma$ .

## RÉSULTAT À VENIR...

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe orienté  $k$ -régulier. Alors

- ▶  $k$  est une valeur propre de  $G$ ,
- ▶ pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $G$ , on a  $|\lambda| \leq k$ ,
- ▶ si  $G$  est f. connexe,  $k$  est valeur propre simple (i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

Par construction, la matrice  $G$  est primitive car  $G > 0$ .

On peut appliquer le **théorème de Perron**,  
or par le lemme précédent, 1 est valeur propre dominante de  $G$ .

Par conséquent, la valeur propre dominante 1 est simple et il existe **un unique vecteur** colonne  $x > 0$  (resp. **ligne**  $y > 0$ ) tel que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ (resp. } \sum_{i=1}^n y_i = 1) \text{ et } Gx = x \text{ (resp. } yG = y).$$

## REMARQUE

v.p. simple  $\Rightarrow$  unicité de la solution "normalisée"

## CONCLUSION

Déterminer le vecteur des "PageRanks"  $\pi$  revient à chercher le vecteur propre  $y$  de Perron à gauche de  $G$  (ou le vecteur propre de Perron à droite de  $\tilde{G}$ ).

En appliquant le résultat asymptotique

$$A^k = \lambda_A^k v_A \tilde{w}_A + o(\lambda_A^k), \quad \tilde{w}_A v_A = 1''$$

- ▶  $e = (1 \dots 1)$  est un vecteur propre à droite de  $G$  de valeur propre 1 ( $G$  est stochastique)
- ▶  $\pi$  est un vecteur propre à gauche de  $G$  de valeur propre 1
- ▶  $\pi e = 1$  (scores sont normalisés)

$$G^k = e\pi + o(1) \text{ i.e., } \lim_{k \rightarrow \infty} G^k = e\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1 \dots \pi_n). \quad (4)$$

## MÉTHODE ITÉRATIVE POUR ESTIMER $\pi$

Soit

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)} \dots p_n^{(0)}) > 0 \text{ vecteur t.q. } \sum_i p_i^{(0)} = 1.$$

$\forall k \geq 1$ , on pose  $p^{(k)} = p^{(0)} G^k = p^{(k-1)} G$ .

**Thèse** : Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)} = \pi$$

$\Rightarrow$  il suffira de

- ▶ partir d'une distribution initiale
- ▶ d'appliquer  $G$  de manière itérative
- ▶ jusqu'à la précision voulue mesurée par  $\|p^{(k)} - p^{(k-1)}\|$

## MÉTHODE ITÉRATIVE POUR ESTIMER $\pi$

Thèse :  $\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)} = \pi$

Au vu de (4),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^k = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} =: P$$

et

$$[p^{(0)}P]_j = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)} \pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i^{(0)}}_{=1} = \pi_j.$$



## EN PRATIQUE

Une centaine d'itérations suffisent pour obtenir une approximation utilisable et ce calcul peut être réalisé hors ligne, par exemple, une fois par mois, pour mettre à jour le vecteur des scores.



En pratique, on se ramène à la **matrice creuse**  $H$  (possédant de nombreux zéros) :

$$\begin{aligned} p^{(k)} &= p^{(k-1)}G \\ &= p^{(k-1)}\left(\alpha S + (1 - \alpha)\frac{J}{n}\right) \\ &= \alpha p^{(k-1)}S + (1 - \alpha)\frac{\tilde{e}}{n} \\ &= \alpha p^{(k-1)}\left(H + a\frac{\tilde{e}}{n}\right) + (1 - \alpha)\frac{\tilde{e}}{n} \\ &= \alpha p^{(k-1)}H + (\alpha p^{(k-1)}a + (1 - \alpha))\frac{\tilde{e}}{n} \end{aligned}$$

où

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

est tel que  $a_i = 1$  si  $d^+(i) = 0$  et  $a_i = 0$  si  $d^+(i) > 0$ .



## THÉORIE DES GRAPHES (5)

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2007–2008



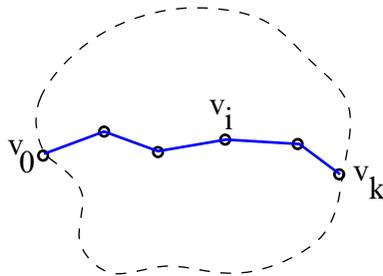
Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté.

$\mathcal{A}_G$  : algèbre (sur  $\mathbb{C}$ ) des polynômes en la matrice d'adjacence de  $G$  : **algèbre d'adjacence** de  $G$ .

## RAPPEL

Une algèbre  $A$  sur  $\mathbb{K}$

- ▶  $A$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$  et  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times A \rightarrow A$
- ▶ produit "raisonnable"  $\cdot$  :  $A \times A \rightarrow A$



$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ , il existe un chemin de longueur  $i$  joignant  $v_0$  à  $v_i$  mais aucun chemin de longueur inférieure.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $A^i$  (resp.  $A^j$ ,  $0 \leq j < i$ ) contient une entrée  $> 0$  (resp.  $= 0$ ) pour l'entrée correspondant à  $v_0, v_i$ .



## PROPOSITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe.  $A(G)$  matrice d'adjacence et  $\mathcal{A}_G$  algèbre d'adjacence.

Si  $\text{diam}(G) = k$ , alors  $\dim \mathcal{A}_G \geq k + 1$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux sommets réalisant le diamètre de  $G$

$$\{a = v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k = b\}$$

un chemin de longueur  $k$  réalisant ce diamètre (en particulier, les  $v_i$  sont tous distincts).



$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^k = \begin{pmatrix} * & * & * & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$I, A, \dots, A^k$  sont linéairement indépendants  
 $\mathcal{A}_G$  contient  $\geq k + 1$  éléments lin. indépendants.



Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté connexe ayant  $A(G) = A$  comme matrice d'adjacence.

Puisque  $A(G)$  est **diagonalisable** (car symétrique),

- ▶ son polynôme minimum ne possède que des zéros simples
- ▶ son degré est égal au nombre de valeurs propres distinctes de  $G$ .

Si le polynôme minimum de  $A$  est de **degré  $d$** , alors relation linéaire liant  $A^d, A^{d-1}, \dots, I$ .  $\dim \mathcal{A}_G \leq d$ .

## COROLLAIRE

Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté connexe  $A(G)$  matrice d'adjacence et  $\mathcal{A}_G$  algèbre d'adjacence.

Si  $\text{diam}(G) = k$ , alors  $G$  a au moins  $k + 1$  valeurs propres distinctes.

## PROPOSITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté  $k$ -régulier. Alors

- ▶  $k$  est une valeur propre de  $G$ ,
- ▶ pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $G$ , on a  $|\lambda| \leq k$ ,
- ▶ si  $G$  est connexe,  $k$  est valeur propre simple (i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

## REMARQUE

Proposition OK dans le cas **orienté**.

Remplacer "connexe" par **f. connexe**.

1.  $(1, \dots, 1)^T$  est un vecteur propre de  $A(G)$  de valeur propre  $k$ .

2. considérons une valeur propre  $\lambda$  de  $A(G)$  ayant  $y \neq 0$  comme vecteur propre.

Soit  $y_j$  une composante de  $y$  de module maximum. On a

$$|\lambda| |y_j| = |[A(G)y]_j| \leq \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} |y_i| \leq |y_j| \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} = k |y_j|$$

et donc,  $|\lambda| \leq k$ .

3.  $G$  est connexe,  $A(G)$  est irréductible. Utiliser le **thm. de Perron-Frobenius**. La matrice  $A(G)$  possède une unique valeur propre réelle dominante et vu 2, il s'agit de  $k$ .

$J_n = J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Si on dispose d'un graphe  $k$ -régulier, alors

$$A(G) \cdot J = k J = J \cdot A(G).$$

## THÉORÈME DE HOFFMAN (1963)

$J \in \mathcal{A}_G$  SSI  $G$  est un multi-graphe (non orienté) connexe et régulier.

$\Rightarrow J \in \mathcal{A}_G$ . Puisque  $J$  est un polynôme de  $A(G) = A$ ,  $AJ = JA$ .  
On a

$$(AJ)_{i,j} = \text{deg}(v_i) \quad \text{et} \quad (JA)_{i,j} = \text{deg}(v_j).$$

Par conséquent,  **$G$  est régulier**.

Vérifier que  **$G$  est connexe** ?

**P.A.** Sinon, il existerait 2 sommets  $v_i$  et  $v_j$  qui ne seraient joints par aucun chemin de longueur  $\ell \geq 0$  :  $[A(G)^\ell]_{i,j} = 0$

Cette relation restant valable pour tout polynôme en  $A(G)$ , conclusion :  $J \notin \mathcal{A}(G)$  !

← Supposons  $G$  connexe et  $k$ -régulier.

Par la prop. préc.,  $k$  est une valeur propre de  $A(G)$  et le polynôme minimum de  $A(G)$  (qui ne possède que des zéros simples) est de la forme

$$\mathcal{M}(\lambda) = (\lambda - k) q(\lambda) \text{ avec } q(k) \neq 0.$$

En évaluant ce polynôme en  $A$ , on obtient

$$A q(A) = k q(A).$$

- Chaque colonne de  $q(A)$  est vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $k$ .
  - Puisque  $G$  est connexe,  $k$  est une **valeur propre simple** donc chaque colonne de  $q(A)$  est un multiple de  $(1, \dots, 1)$ .
  - Puisque  $A$  est symétrique,  $q(A)$  aussi et donc toutes les colonnes de  $q(A)$  sont égales à un même multiple de  $(1, \dots, 1)$ .
- Conclusion :  $q(A)$  est un multiple de  $J$  et donc  $J \in \mathcal{A}_G$ .



$A$  symétrique (hermitienne) n'a que des v.p. réelles

### COROLLAIRE

Soit  $G$  un multi-graphe non orienté connexe et  $k$ -régulier possédant  $n$  sommets et ayant  $k = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$  comme valeurs propres distinctes. Si

$$q(\lambda) = \prod_{i=2}^s (\lambda - \lambda_i), \text{ alors } J = \frac{n}{q(k)} q(A(G)).$$

preuve précédente,  $q(A) = \alpha J$ .

Les valeurs propres de  $q(A)$  sont les  $q(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Si  $i \neq 1$ , alors  $q(\lambda_i) = 0$ .

- $q(A)$  a comme seule valeur propre non nulle  $q(k)$ .
- $\alpha J$  a pour valeur propre  $\alpha n$ .

On en conclut que  $q(k) = \alpha n$  ou encore que  $1/\alpha = n/q(k)$ .



## SOUS-ARBRE COUVRANT

Rechercher un sous-arbre couvrant d'un graphe (simple) connexe. Ce problème est immédiatement réglé par une *recherche en profondeur*

### RECHERCHE D'UN SOUS-ARBRE COUVRANT

Choisir un sommet  $v_0 \in V$

Visite := { $v_0$ },  $A := \emptyset$

$t := 0$ ,  $j := 1$

Tant que Visite  $\neq V$ , répéter

Peut-on choisir un élément  $v_j \in \nu(v_t) \setminus \text{Visite}$ ?

Si un tel choix est impossible,

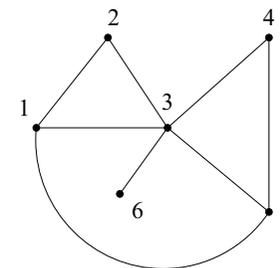
il existe  $k < t$  maximum tel que  $\{v_k, v_t\} \in E$

et poser  $t := k$

Si un tel choix est possible,

Visite := { $v_0, \dots, v_j$ },  $A := A \cup \{\{v_t, v_j\}\}$ ,  $t := j$

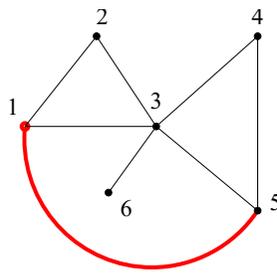
et  $j := j + 1$



### EXEMPLE

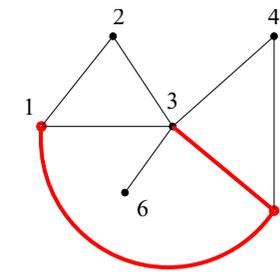
Visite	A	t	j
{ $v_0 = 1$ }	$\emptyset$	0	1
{ $\dots, v_1 = 5$ }	{{1, 5}}	1	2
{ $\dots, v_2 = 3$ }	{{1, 5}, {5, 3}}	2	3
{ $\dots, v_3 = 4$ }	{{1, 5}, {5, 3}, {3, 4}}	3	4
{ $\dots, v_3 = 4$ }	{{1, 5}, {5, 3}, {3, 4}}	2	4
{ $\dots, v_4 = 2$ }	{{1, 5}, {5, 3}, {3, 4}, {3, 2}}	4	5
{ $\dots, v_4 = 2$ }	{{1, 5}, {5, 3}, {3, 4}, {3, 2}}	2	5
{ $\dots, v_5 = 6$ }	{{1, 5}, {5, 3}, {3, 4}, {3, 2}, {3, 6}}	5	6





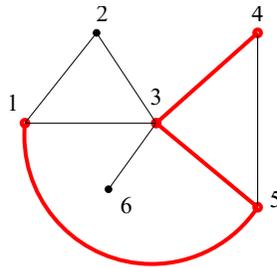
### EXEMPLE

Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



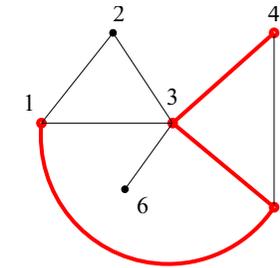
### EXEMPLE

Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



### EXEMPLE

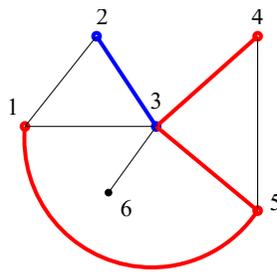
Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



### EXEMPLE

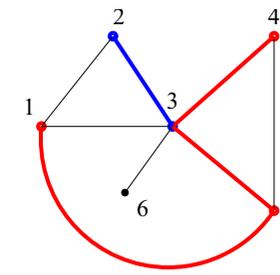
Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6





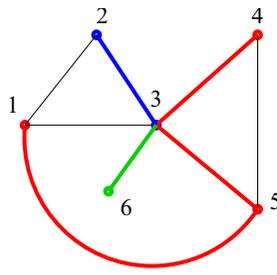
EXEMPLE

Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



EXEMPLE

Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



EXEMPLE

Visite	A	t	j
$\{v_0 = 1\}$	$\emptyset$	0	1
$\{\dots, v_1 = 5\}$	$\{\{1, 5\}\}$	1	2
$\{\dots, v_2 = 3\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$	2	3
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	3	4
$\{\dots, v_3 = 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$	<b>2</b>	4
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	4	5
$\{\dots, v_4 = 2\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$	<b>2</b>	5
$\{\dots, v_5 = 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$	5	6



QUESTION

Compter le nombre  $\tau(G)$  de sous-arbres couvrants.



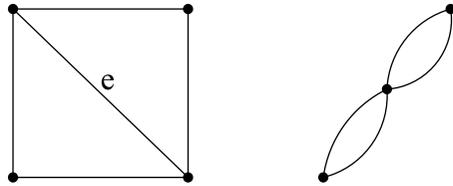
# UNE FORMULE DE CAYLEY

une formule récursive pour obtenir  $\tau(G)$ ...

## DÉFINITION

Soient  $G = (V, E)$  un multi-graphe (non orienté) et  $e \in E$ .

Supprimer l'arête  $e$  et identifier les extrémités de celle-ci, **contraction** de  $G$  (pour l'arête  $e$ ) :  $G \cdot e$ .



## REMARQUE

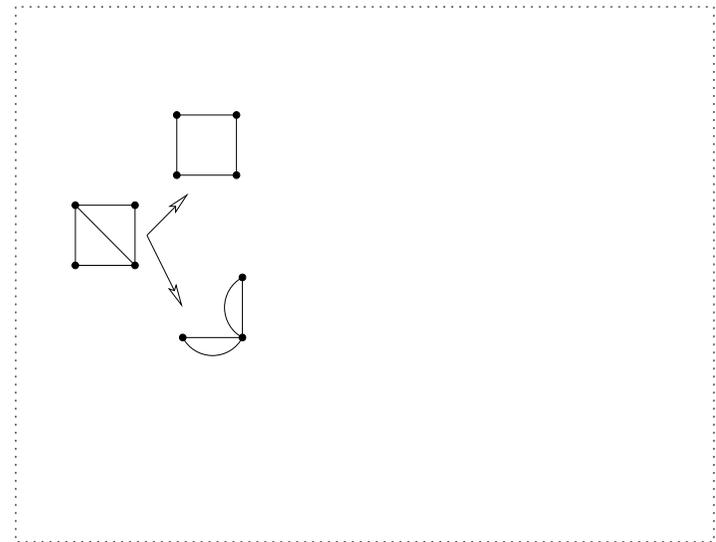
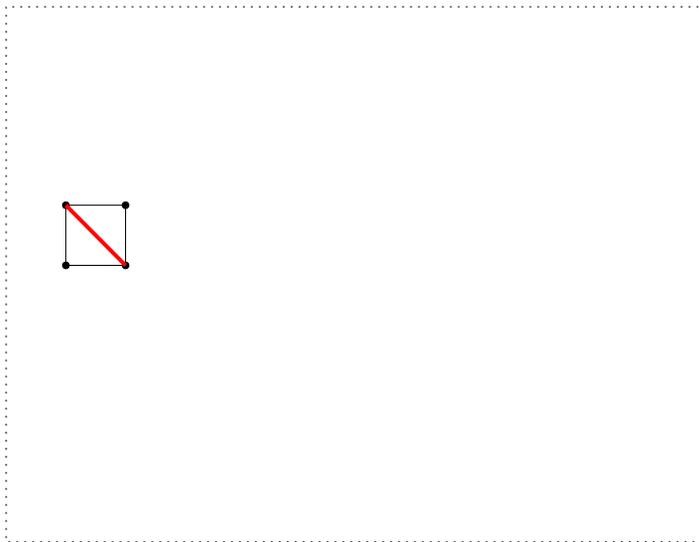
Si  $G$  est connexe et si  $e$  est une arête qui n'est pas une boucle,  $G \cdot e$  connexe aussi et contient une arête et un sommet de moins que  $G$ .

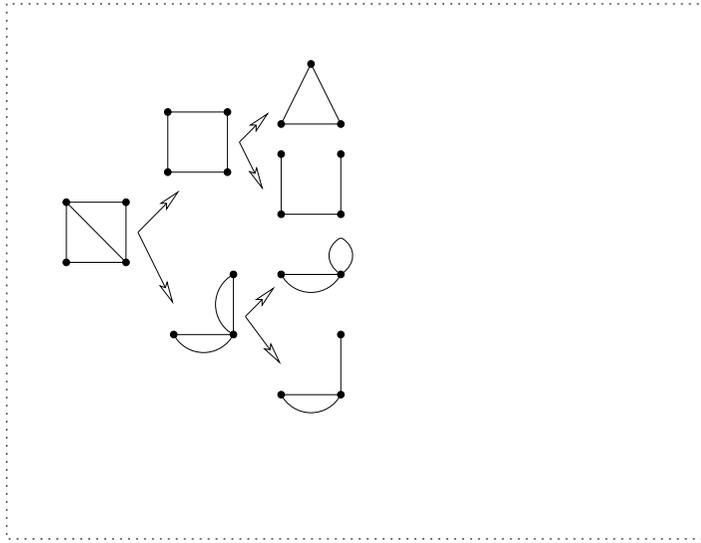
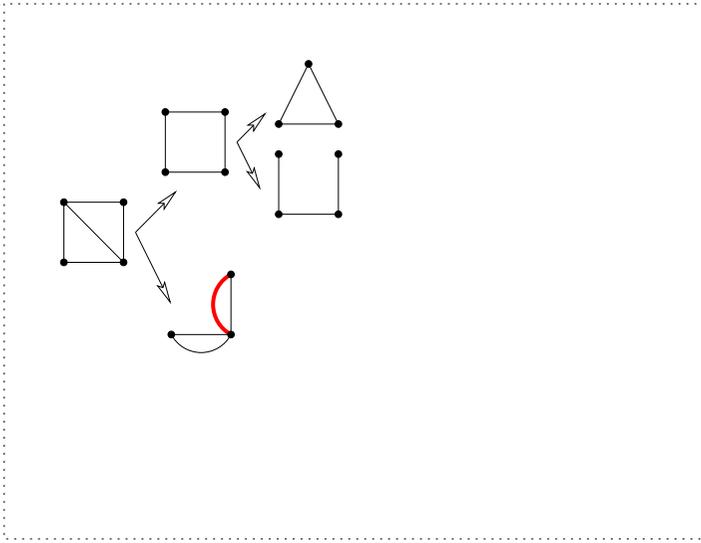
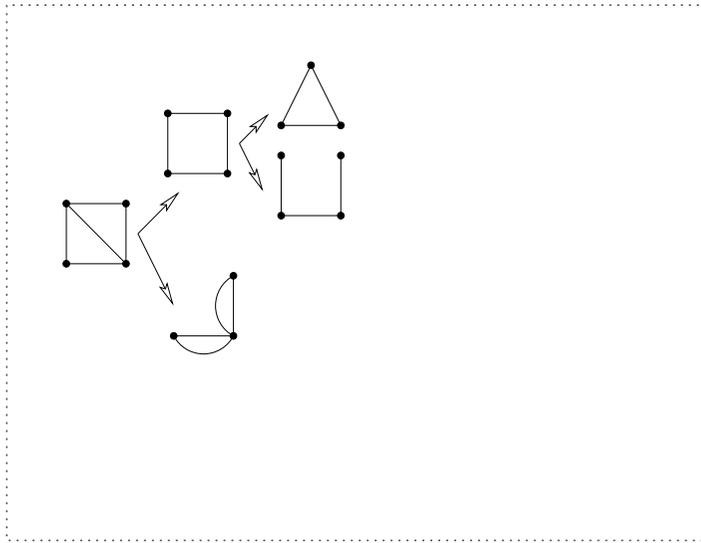
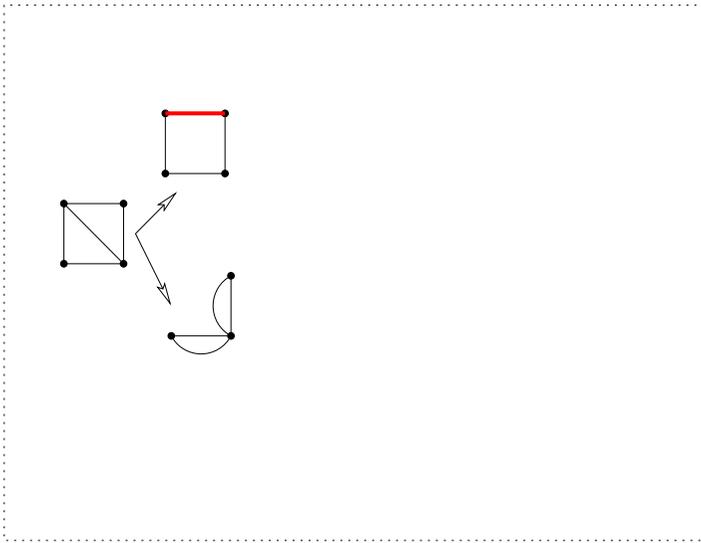
## PROPOSITION (CAYLEY)

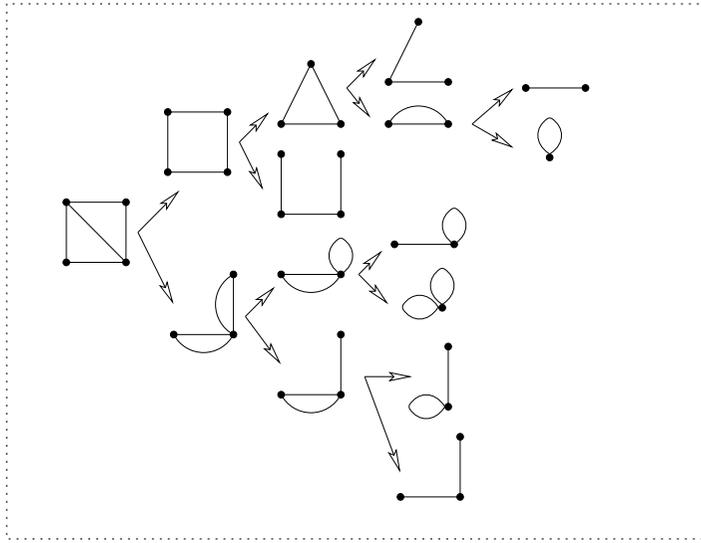
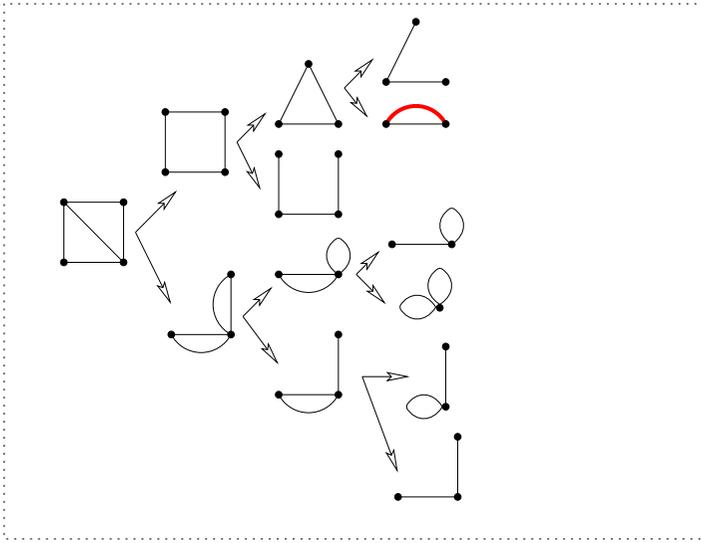
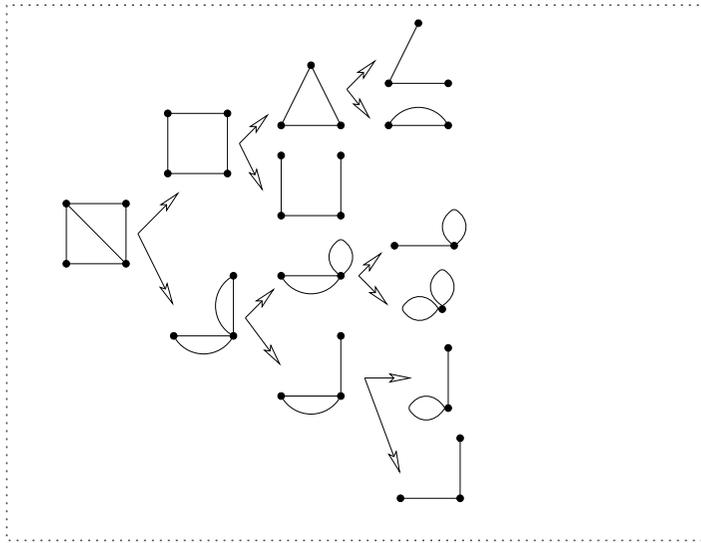
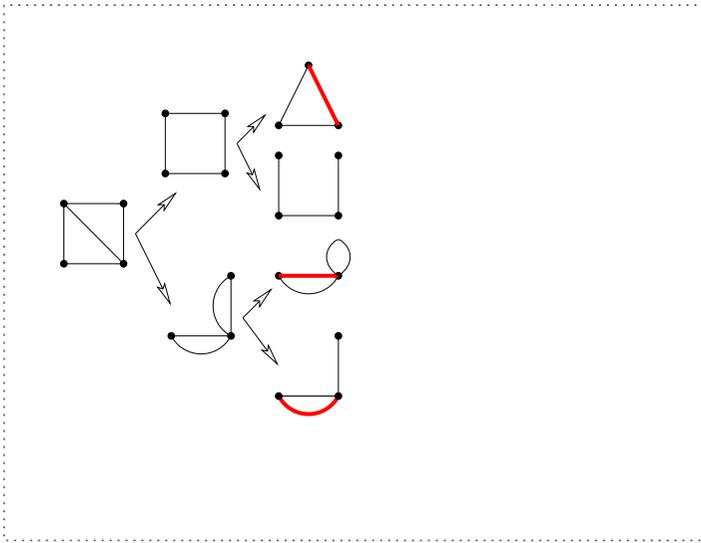
Si  $e$  est une arête (qui n'est pas une boucle) d'un multi-graphe connexe (non orienté), alors

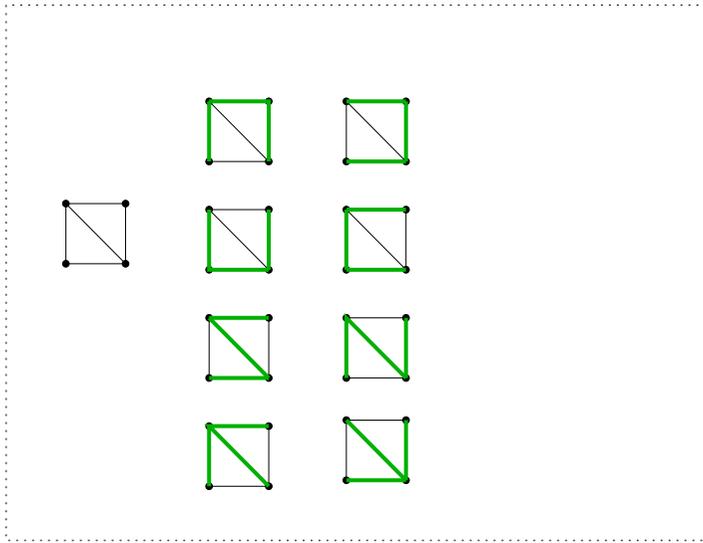
$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

On arrête la procédure lorsque la suppression d'une arête rend le graphe non connexe (autrement dit, lorsqu'on a un "pseudo"-arbre ne tenant pas compte des éventuelles boucles)









$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Tout sous-arbre couvrant de  $G$  qui ne contient pas  $e$  est aussi un sous-arbre couvrant de  $G - e$ .

$\tau(G - e)$  compte les sous-arbres couvrants de  $G$  qui ne contiennent pas  $e$ .

A chaque sous-arbre couvrant  $A$  de  $G$  qui contient  $e$ , il correspond un sous-arbre couvrant  $A \cdot e$  de  $G \cdot e$  et cette correspondance est une bijection.

$\tau(G \cdot e)$  compte les sous-arbres couvrants de  $G$  qui contiennent  $e$ .

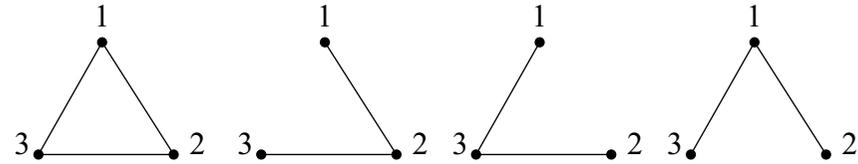
## UNE PREUVE BIJECTIVE

## CODAGE DE PRÜFER

### THÉORÈME (CAYLEY 1897)

Le nombre de sous-arbres couvrants  $K_n$  vaut  $n^{n-2}$ .  
 (Le nombre d'arbres à  $n$  sommets de labels distincts  $\{1, \dots, n\}$  vaut  $n^{n-2}$ .)

i.e., chaque sommet du graphe est pourvu d'un label.



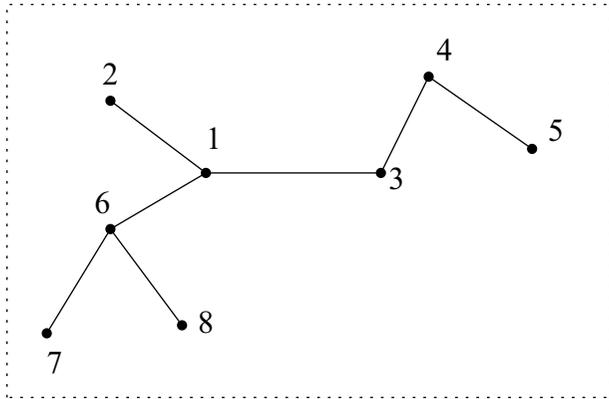
### REMARQUE

Numérotons les sommets de  $K_n$  de 1 à  $n$ .  
 Le nombre de sous-arbres couvrants  $K_n$  = nombre d'arbres distincts construits avec des sommets numérotés de 1 à  $n$ .  
 Il nous suffit de compter ces arbres.

encodage (i.e., une bijection) d'un arbre  $A$  par une suite  $s$  de  $n - 2$  symboles appartenant à  $\{1, \dots, n\}$ . Le nombre de telles suites =  $n^{n-2}$ .

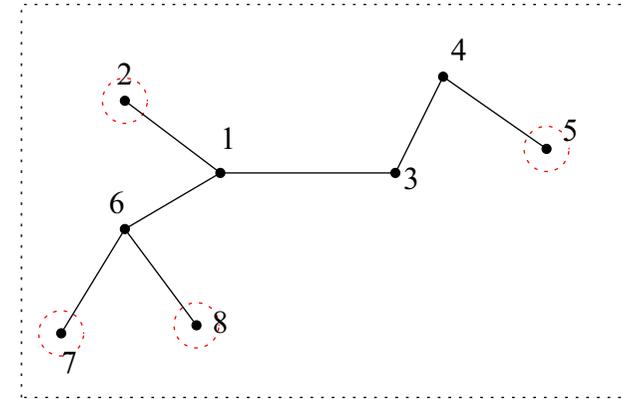
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



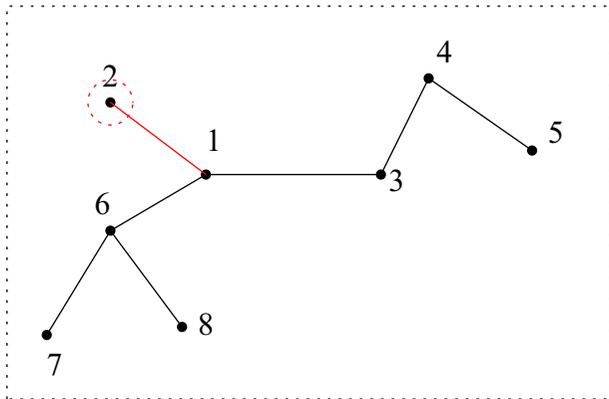
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



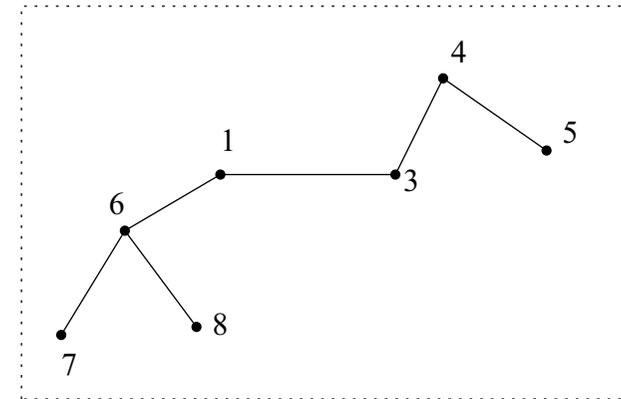
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



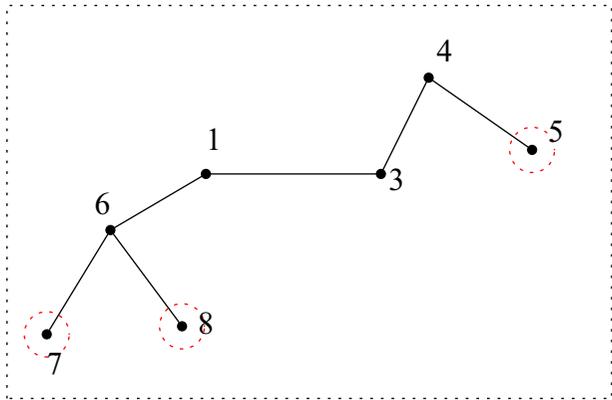
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



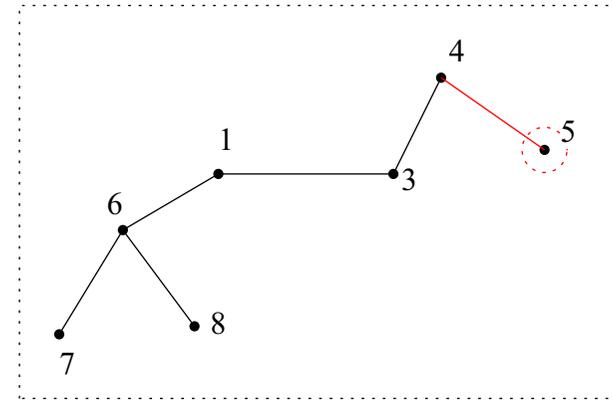
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



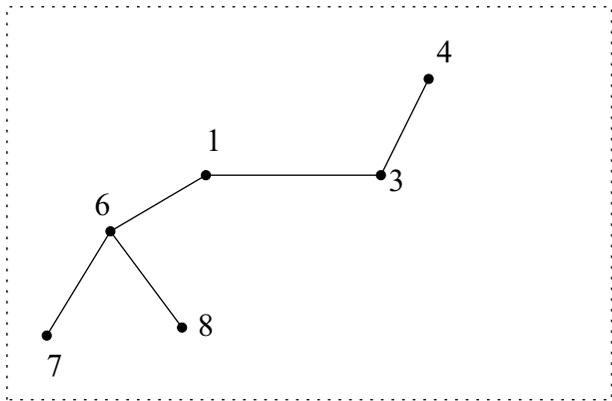
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



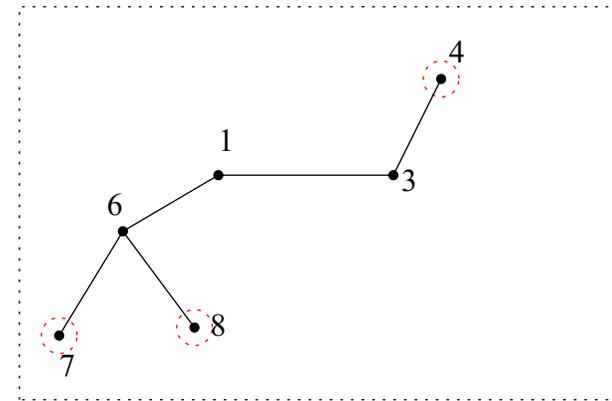
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



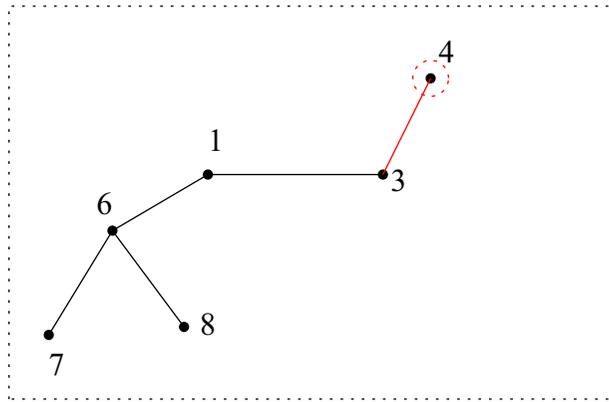
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .

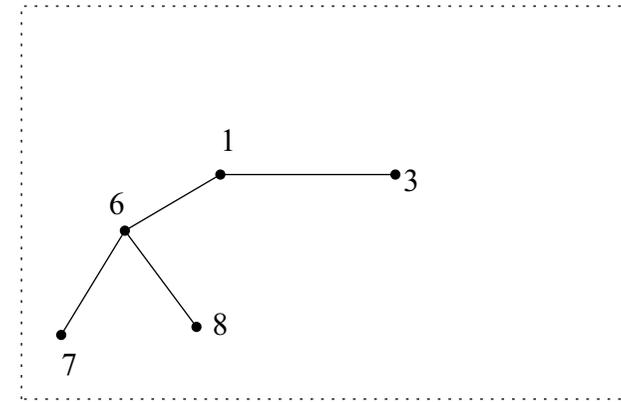


1, 4



Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .

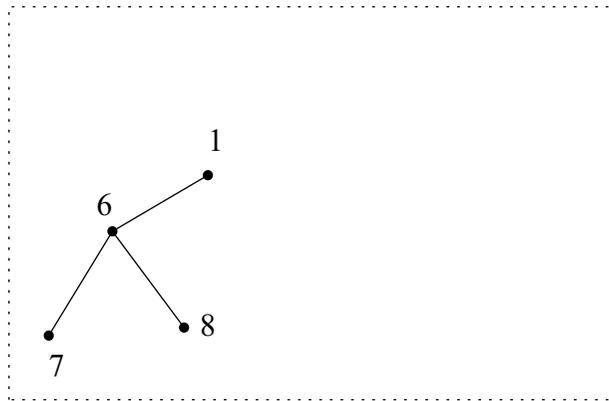


1, 4, 3



Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .

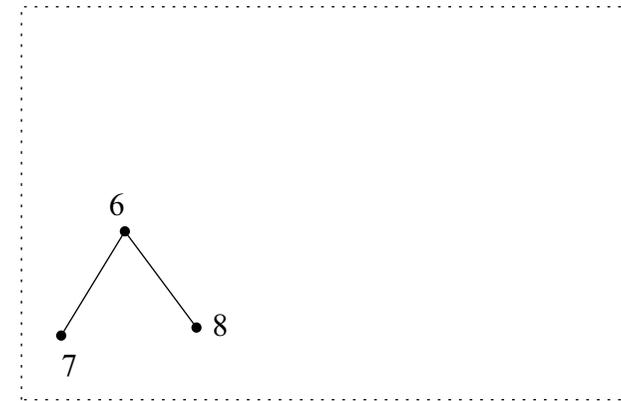


1, 4, 3, 1



Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3, 1, 6



## RÉCIPROQUEMENT...

Si on se donne une suite  $s = (s_1, \dots, s_{n-2})$  de  $n - 2$  éléments de  $V = \{1, \dots, n\}$ , il lui correspond un arbre  $A$  à  $n$  sommets dont  $s$  est l'encodage.

### REMARQUE

$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$  est l'ensemble des sommets de degré 1.

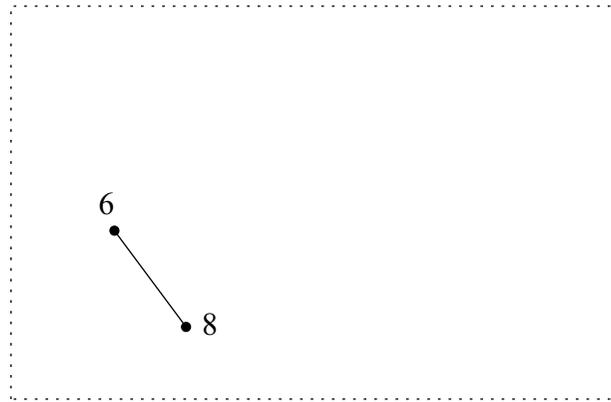
Soit  $i_1$  le plus petit élément de  $V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$ . L'arête  $\{i_1, s_1\}$  appartient à  $A$ .

On recommence : soit  $i_2$  le plus petit élément de  $(V \setminus \{i_1\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\}$ . L'arête  $\{i_2, s_2\}$  appartient à  $A$ .

A la fin de la procédure, il reste deux sommets et on ajoute  $A$  l'arête formée par ceux-ci.

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3, 1, 6, 6

$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$

$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{2, 5, 7, 8\}$

arête  $\{1, 2\}$

$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$

$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{2, 5, 7, 8\}$

arête  $\{1, 2\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$(V \setminus \{2\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$(V \setminus \{2\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 5\}) \setminus \{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{4, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 5\}) \setminus \{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{4, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{s_4, s_5, s_6\} = \{1, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 4, 5\}) \setminus \{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{3, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{s_4, s_5, s_6\} = \{1, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 4, 5\}) \setminus \{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{3, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{s_5, s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{1, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{s_5, s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{1, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

$$\text{arête } \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

$$\text{arête } \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$



$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

$$\text{arête } \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$



Ce résultat est un corollaire d'un résultat plus général...



## THÉORÈME (BERGE)

Le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets de label respectif  $x_1, \dots, x_n$  et dont les degrés sont donnés par  $\deg(x_1) = d_1, \dots, \deg(x_n) = d_n$  vaut le coefficient multinomial

$$T_{n,d_1,\dots,d_n} := \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!},$$

à condition qu'un arbre ayant de telles spécificités existe

## EXEMPLE

Il y a un seul arbre à 3 sommets de label 1, 2, 3 et de degré respectif 2, 1, 1 (il y en a aussi un pour les degrés 1, 2, 1 et 1, 1, 2). La formule donne bien

$$\binom{3-2}{2-1, 1-1, 1-1} = \frac{1!}{1!0!0!} = 1.$$



Si on compte juste le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets (quel que soit leur degré), cela revient à calculer

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1-1+\dots+d_n-1=n-2}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n=n-2}} \binom{n-2}{i_1, \dots, i_n} \\ &= \underbrace{(1+\dots+1)}_{n \times}^{n-2} = n^{n-2}. \end{aligned}$$

Rem :  $d_1 + \dots + d_n = 2(n-1)$ ,  $n-1$  = nombre d'arêtes

## THM. MULTINOMIAL

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \binom{n}{i_1, \dots, i_k} a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k}$$



## NOMBRE DE SOUS-ARBRES COUVRANTS

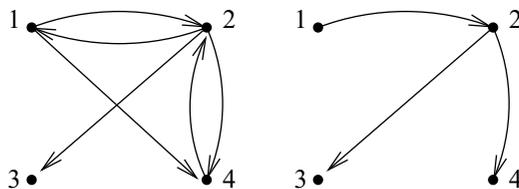
Etendre le problème initial : compter les sous-arbres couvrants, **pointés et orientés depuis la racine dans un multi-graphe orienté**  $G = (V, E)$  où  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Nous supposons le multi-graphe **sans boucle**.

### DÉFINITION

Un arbre pointé est **orienté depuis la racine** si les arcs de celui-ci sont tous orientés des sommets de niveau  $i$  vers les sommets de niveau  $i+1$

Le graphe non orienté sous-jacent est lui-même un arbre.



### DÉFINITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe orienté sans boucle dont les sommets sont ordonnés par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

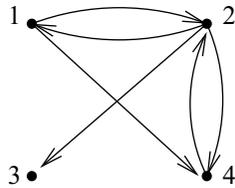
La **matrice  $D(G)$  de demi-degré entrant** est définie par

$$[D(G)]_{j,j} = d^-(v_j) \text{ et } [D(G)]_{i,j} = -(\#(\omega^+(v_i) \cap \omega^-(v_j))), \text{ si } i \neq j.$$

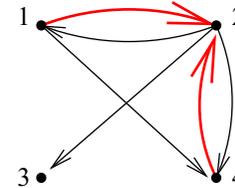
Autrement dit,  $[D(G)]_{i,j}$  est l'opposé du nombre d'arcs joignant  $v_i$  à  $v_j$ , si  $i \neq j$ .

La somme des éléments de toute colonne de  $D(G)$  est nulle.

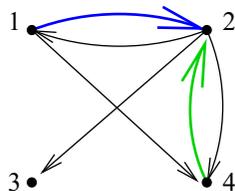




$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

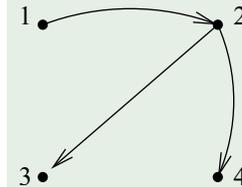
**REMARQUE : COND. NÉCESSAIRE MAIS PAS SUFFISANTE**

La matrice de demi-degré entrant **associée à un sous-arbre couvrant pointé et orienté** possède, à l'exception de la colonne correspondant à la racine,

- ▶ exactement un “-1” dans chaque colonne
- ▶ une diagonale formée de 1

La colonne correspondant à la racine est nulle.

**EXEMPLE**



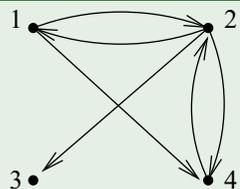
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $G^{(i)} = (V, E \setminus \omega^-(v_i))$ , le sous-graphe obtenu en supprimant les arcs de  $G$  entrant dans  $v_i$ .

### REMARQUE

Un tel sous-graphe revient à sélectionner une racine pour un arbre couvrant **potentiel**

### EXEMPLE



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### EXEMPLE

$$D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_{2,1}^{(3)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C_{2,2}^{(3)}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_{4,1}^{(3)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_{4,2}^{(3)}}$$

Si  $[D(G^{(i)})]_{k,k} = r_k^{(i)} \geq 2$ , alors la  $k$ -ième colonne de  $D(G^{(i)})$  s'écrit de manière unique comme une somme de  $r_k^{(i)}$  vecteurs-colonnes

$$C_{k,1}^{(i)}, \dots, C_{k,r_k^{(i)}}^{(i)}$$

dont la  $k$ -ième composante vaut 1 et dont toutes les autres composantes sont nulles, exceptée une d'elles valant  $-1$ .

### REMARQUE

Une telle décomposition revient à **sélectionner pour chaque sommet un seul arc entrant**, dans l'optique de construire un potentiel arbre couvrant.

Soient  $k_1^{(i)}, \dots, k_p^{(i)}$  les indices des colonnes de  $D(G^{(i)})$  pour lesquelles  $[D(G^{(i)})]_{k,k} = r_k^{(i)} \geq 2$ . Si on choisit pour chacune de ces colonnes un des vecteurs  $C_{k_j,n}^{(i)}$ , pour  $j = 1, \dots, p$  et  $n = 1, \dots, r_{k_j}^{(i)}$ .

Le nombre total de tels choix possibles vaut donc  $m^{(i)} = r_{k_1}^{(i)} \dots r_{k_p}^{(i)} \geq 2^p$  et à chacun de ces choix, il correspond une matrice

$$D^{(i)}_1, \dots, D^{(i)}_{m^{(i)}}.$$

En particulier, il est clair, par linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, que

$$\det(D(G^{(i)})) = \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \det(D^{(i)}_j). \quad (1)$$

Remarquons aussi que pour un multi-graphe, il se peut que plusieurs matrices  $D^{(i)}_j$  soient identiques. Il faut en tenir compte pour compter exactement le nombre de sous-arbres couvrants.

$[D(G^{(3)})]_{2,2} = [D(G^{(3)})]_{4,4} = 2$  et on a donc  $m^{(3)} = 4$  matrices

$$D_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telles que  $\det(D(G^{(3)})) = \sum_{i=1}^4 \det(D_i^{(3)})$ .

$$D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} + C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\det(D(G^{(3)})) = \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \\ A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \\ A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\det(D(G^{(3)})) = \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} \\ A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,2}^{(3)} \\ A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} \\ A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix}$$

### CE QU'IL FAUT COMPRENDRE !

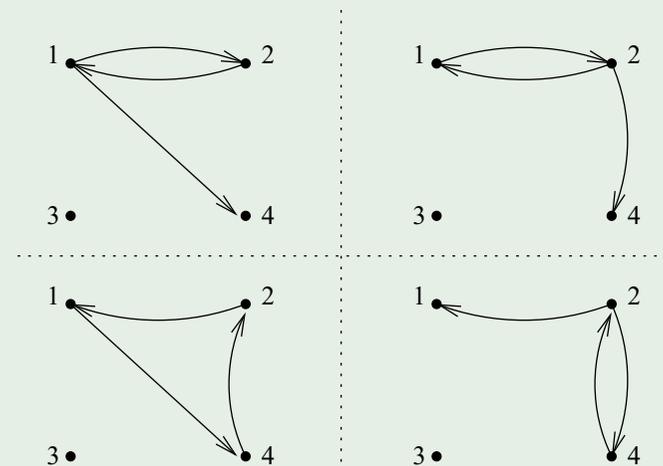
A ce stade, à chaque matrice  $D(G_i^{(k)})$  correspond

- ▶ une sélection d'une racine et
- ▶ une sélection d'un arc entrant pour chaque sommet distinct de la racine

Pour un sélection convenable, il s'agira d'un arbre couvrant...

### SUITE DE L'EXEMPLE

Aux matrices  $D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}$  et  $D_4^{(3)}$  correspondent



## IDÉE

Supposons qu'un sous-arbre couvrant pointé en  $v_i$  et orienté existe. La matrice associée à cet arbre est exactement égale à une des matrices  $D^{(i)}_1, \dots, D^{(i)}_{m(i)}$ .

Pour compter le nombre de sous-arbres couvrants pointés en  $v_i$ , il suffit de **pouvoir distinguer les matrices  $D^{(i)}_j$  qui correspondent à un sous-arbre couvrant** !

## REMARQUE / RAPPEL

Toute matrice  $D^{(i)}_j$  est une matrice de demi-degré entrant pour un certain sous-graphe de  $G$ , noté  $G^{(i)}_j$ , dont chaque sommet a un demi-degré entrant valant au plus 1.



## THÉORÈME

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté dont le demi-degré entrant de chaque sommet vaut au plus 1.

Le mineur  $M_{t,t}(G)$  de la matrice  $D(G)$  obtenu en supprimant la ligne et la colonne correspondant à  $v_t$  vaut

$$\begin{cases} 1, & \text{si } G \text{ contient un sous-arbre couvrant pointé en } v_t \text{ et orienté;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

le nombre de sous-arbres **couvrant  $G^{(i)}$**  pointés en  $v_i$  vaut

$$\sum_{j=1}^{m(i)} M_{i,i}(G^{(i)}_j) = M_{i,i}(G^{(i)}).$$

Ce nombre est aussi égal au nombre de sous-arbres **couvrant  $G$  tout entier** et pointés en  $v_i$ .



Les matrices  $D(G^{(i)})$  et  $D(G)$  étant égales à l'exception de la  $i$ -ème colonne, on a

## THÉORÈME DE BOTT-MAYBERRY (1954)

Soit  $G$  un multi-graphe orienté sans boucle.

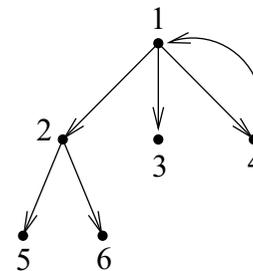
Le nombre de sous-arbres couvrant  $G$  pointés au sommet  $v_i$  et orientés est égal au mineur  $M_{i,i}(G)$  de la matrice de demi-degré entrant de  $G$ .

Il reste à démontrer le "premier" théorème...



Supposons que  $G$  contienne un sous-arbre couvrant  $A$  orienté et pointé en  $v_t$ .

Par hypothèse, le demi-degré entrant de chaque sommet vaut au plus 1, alors  $G = A$  ou bien  $G = A + e$  où  $e$  est une arête entrant dans  $v_t$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On peut renuméroter les sommets de  $A$  (donc de  $G$ ) par un **parcours en largeur** de l'arbre.

Ainsi, l'arête  $v_t$  devient  $v_1$  et  $[D(G)]_{1,1} \leq 1$ .

Pour  $i \geq 2$ ,  $[D(G)]_{i,i} = 1$  et

si  $i > j \geq 2$ , alors  $[D(G)]_{i,j} = 0$

(c'est une conséquence de la renumérotation des sommets).

Si  $G = A + e$ , alors  $D(G)$  contient un "-1" dans la première colonne, mais cela n'a guère d'importance pour la suite.

On conclut que **la matrice  $D(G)$  privée de sa première ligne et de sa première colonne est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1.**

Supposons à présent que  $G$  ne contienne pas de **sous-arbre couvrant orienté et pointé en  $v_t$** .

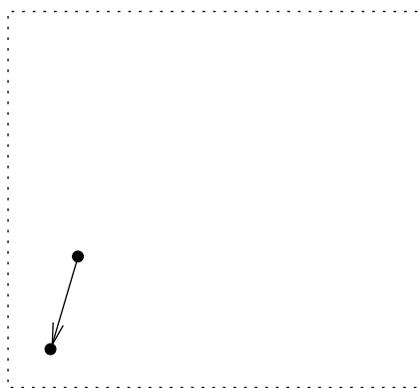
Si pour  $j \neq t$ ,  $d^-(v_j) = 0$ , alors la  $j$ -ième colonne de  $D(G)$  est nulle et on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

Nous pouvons donc supposer que pour tout  $j \neq t$ ,  $d^-(v_j) = 1$ .

Soit  $j_1 \neq t$ . Puisque  $d^-(v_{j_1}) = 1$ , il existe un indice  $j_2$  et un arc joignant  $v_{j_2}$  à  $v_{j_1}$ . En continuant de la sorte, on obtient des sommets tous distincts  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$  tels que

$$v_{j_k} \longrightarrow v_{j_{k-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{j_2} \longrightarrow v_{j_1}.$$

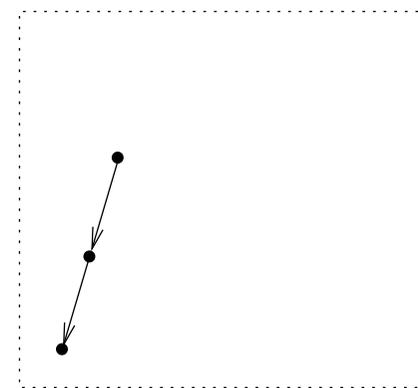
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

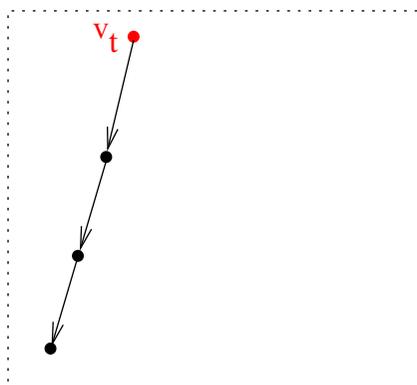
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

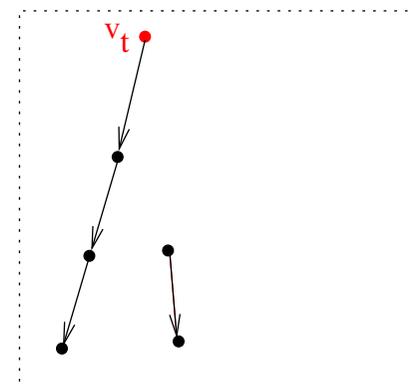
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

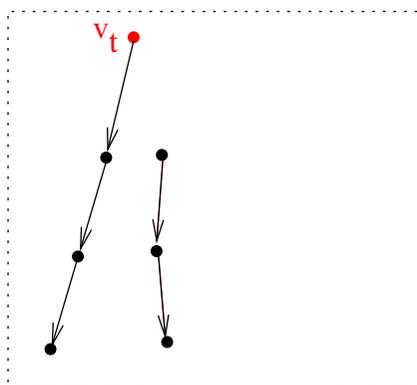
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

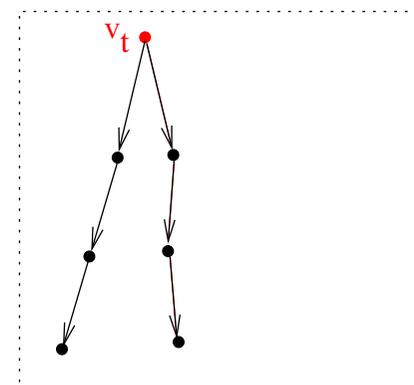
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

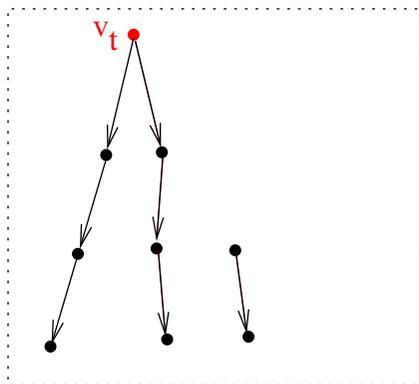
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

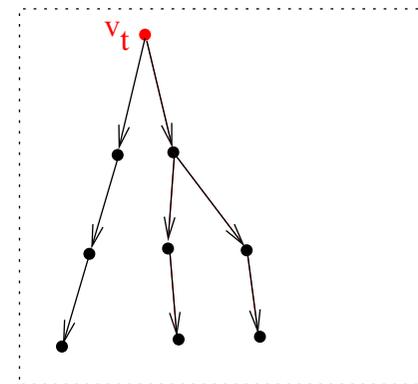
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

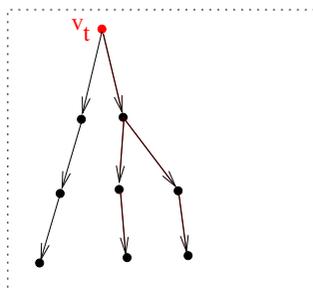
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



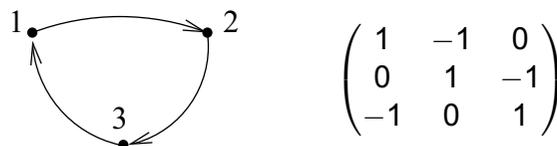
Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

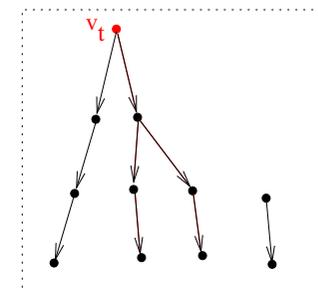
Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient **un nombre fini de sommets**, on finit par identifier un cycle.



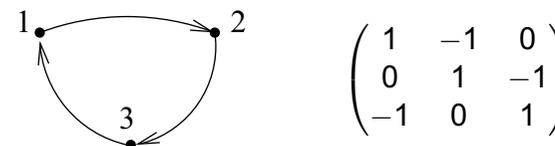
Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



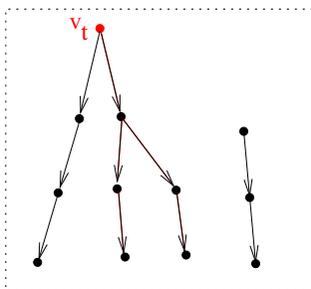
Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient **un nombre fini de sommets**, on finit par identifier un cycle.



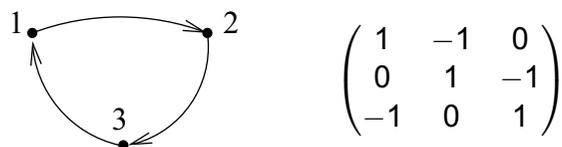
Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



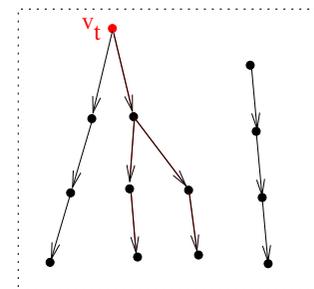
Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.



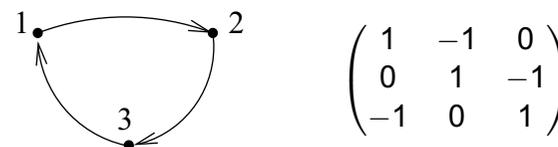
Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



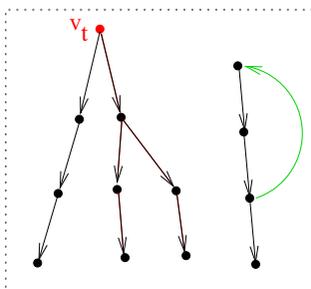
Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.



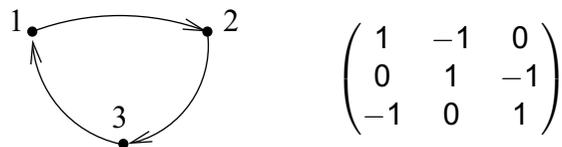
Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.



Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



reconsidérer le problème initial concernant des graphes non orientés.

A un graphe non orienté  $G = (V, E)$  correspond un graphe orienté  $G = (V, E')$  où chaque arête  $\{u, v\}$  de  $G$  donne lieu aux arcs  $(u, v)$  et  $(v, u)$  dans  $G'$ .

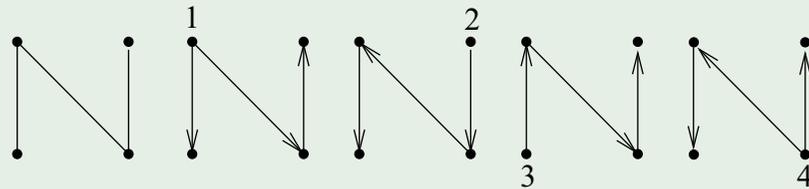
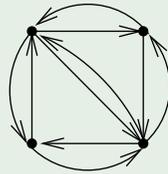
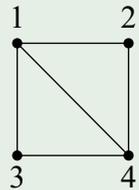
A tout arbre couvrant dans  $G$ , il correspond dans  $G'$  exactement un arbre couvrant pointé en  $a$  et orienté depuis  $a$  et ce, pour tout sommet  $a$  de  $G'$ .

La réciproque est également vraie. A tout arbre couvrant  $G'$  (pointé en un quelconque sommet et orienté), il correspond un arbre couvrant  $G$ .

#### COROLLAIRE

Le nombre de sous-arbres couvrant un multi-graphe  $G = (V, E)$  non orienté sans boucle vaut  $M_{i,i}(G')$  quel que soit  $i$ , où  $G'$  est le graphe symétrique orienté déduit de  $G$ .

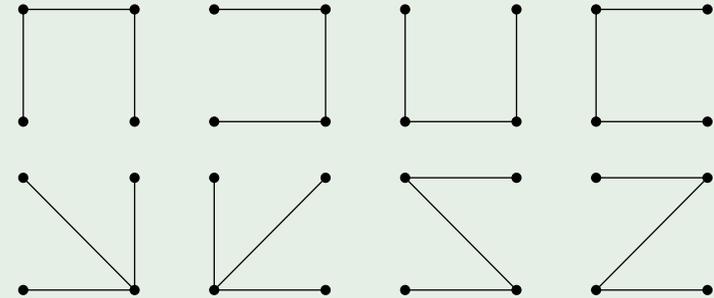
## EXEMPLE



$$D(G') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tous les mineurs principaux valent 8.

## EXEMPLE



## REMARQUE

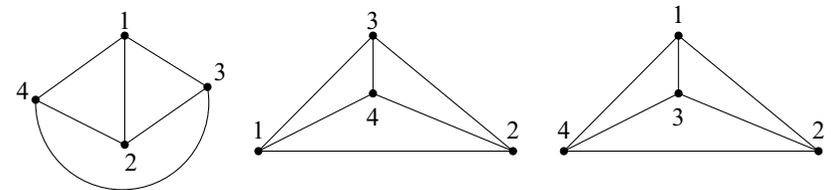
Nous avons compté l'ensemble des sous-arbres d'un graphe dont **les sommets ont été numérotés**. Ainsi, parmi les 8 arbres ci-dessus, seulement 3 sont 2 à 2 non isomorphes.

Arbres couvrants **de poids minimal** : Algo. Prim / Kruskal ...

## GRAPHES PLANAIRES

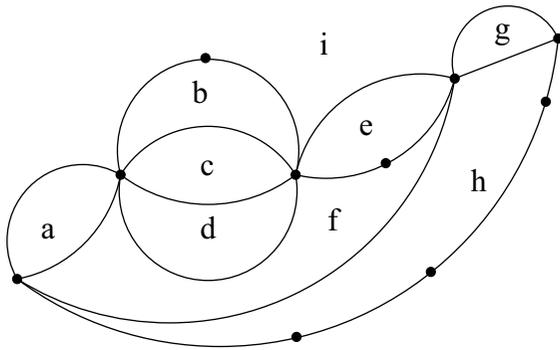
On considère l'ensemble quotient des représentations homéomorphes (au sens topologique du terme).

Un graphe peut avoir plusieurs représentations



## GRAPHES PLANAIRES

Face, frontière, faces adjacentes, face infinie...



## GRAPHES PLANAIRES

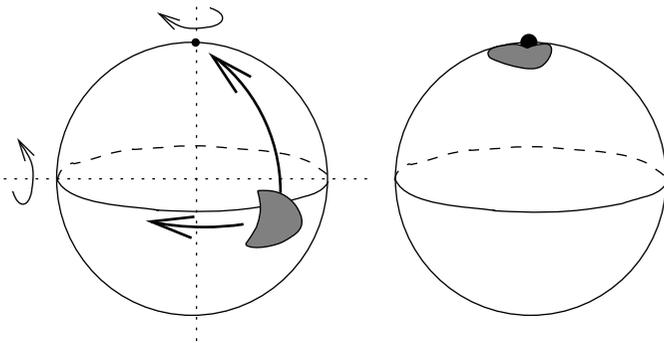
### REMARQUE : THÉORÈME DE STEINITZ

Un graphe est le squelette d'un polyèdre convexe (borné) de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si c'est un graphe planaire au moins 3-connexe (i.e., ne pouvant pas être disconnecté en retirant moins de trois sommets,  $\kappa(G) \geq 3$ )



## GRAPHES PLANAIRES

projection stéréographique



## GRAPHES PLANAIRES

### THÉORÈME D'EULER

Dans un multi-graphe planaire connexe (fini) possédant  $s$  sommets,  $a$  arêtes et  $f$  faces, on a

$$s - a + f = 2.$$



## GRAPHES PLANAIRES

Récurrence sur  $f$ .

Si  $f = 1$ , le graphe possède uniquement une face infinie.  
Le graphe connexe ne possède aucun cycle, c'est un arbre.  
Ainsi,  $s = a + 1$ , formule OK.

OK pour  $< f$ , OK? pour  $f \geq 2$ ?

Soit  $e$  une arête d'un cycle.

$e$  appartient à la frontière de deux faces  $A$  et  $B$ .

Si on supprime  $e$ , on obtient un graphe ayant

- ▶  $a - 1$  arêtes,
- ▶ le même nombre  $s$  de sommets,
- ▶  $f - 1$  faces.

Par hypothèse de récurrence, on a  $s - (a - 1) + f - 1 = 2$ ,  
ce qui suffit.



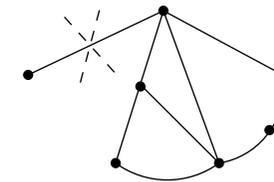
## GRAPHES PLANAIRES

### COROLLAIRE

Dans un graphe  $G = (V, E)$  **simple** et planaire, il existe un  
sommet  $x$  tel que  $\deg(x) \leq 5$ .

Quitte à considérer séparément chaque composante connexe  
de  $G$ , on suppose  $G$  **connexe**.

**Eliminer les arêtes ne délimitant pas de face** (celles-ci ont une  
extrémité de degré 1 → résultat trivial).



## GRAPHES PLANAIRES

$G$  est simple, la frontière de toute face contient  $\geq 3$  arêtes.

En comptant le nombre de faces, on compte à chaque fois au  
moins 3 arêtes, ainsi,  $3f \leq a$ .

De plus, **chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle  
apparaît dans la frontière de deux faces.**

$$f \leq \frac{2a}{3}$$

Procédons par l'absurde. Supposons que pour tout sommet  $x$   
de  $G$ ,  $\deg(x) \geq 6$ . Dans ce cas,

$$s \leq \frac{2a}{6}$$

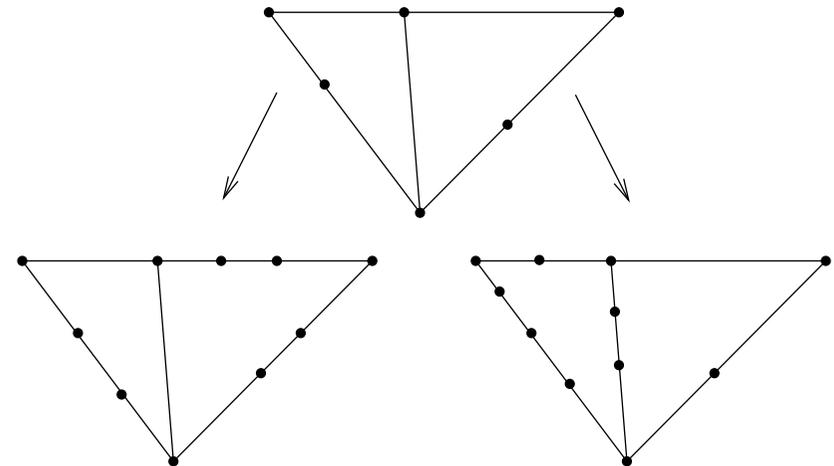
Si on applique la formule d'Euler,

$$2 = s - a + f \leq \frac{a}{3} - a + \frac{2a}{3} = 0!$$



## GRAPHES PLANAIRES

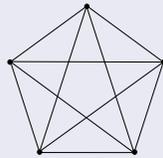
Graphes homéomorphes



## GRAPHES PLANAIRES

### PROPOSITION

Le graphe  $K_5$  n'est pas planaire.



Dans un graphe simple et planaire, de la relation  $3f \leq 2a$  démontrée dans la prop. préc. et de la formule d'Euler ( $3a - 3f = 3s - 6$ ), on tire que

$$a \leq 3s - 6.$$

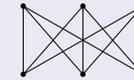
Or,  $K_5$  est un graphe simple qui possède 5 sommets et 10 arêtes et  $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$ . On en conclut que  $K_5$  ne peut être planaire.



## GRAPHES PLANAIRES

### PROPOSITION

Le graphe  $K_{3,3}$  n'est pas planaire.



Ici, graphe simple, planaire et biparti.

Chaque face a une frontière déterminée par au moins 4 arêtes et on en tire que  $4f \leq 2a$ , i.e.,  $2f \leq a$ . De la formule d'Euler,  $2a - 2f = 2s - 4$ , on en tire que

$$a \leq 2s - 4.$$

Or,  $K_{3,3}$  est un graphe biparti simple qui possède 6 sommets et 9 arêtes. Il ne peut donc pas être planaire car  $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$ .



## GRAPHES PLANAIRES

Théorème d'exclusion caractérisant une famille de graphes :

### THÉORÈME DE KURATOWSKI

Un multi-graphe (non orienté) est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à  $K_5$  ou à  $K_{3,3}$ .



## THÉORIE DES GRAPHES (6)

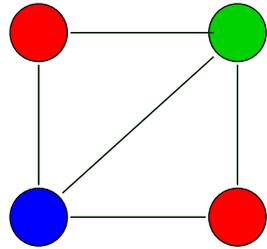
Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2007–2008

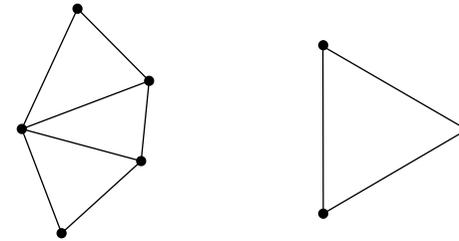


- ▶  $c : V \rightarrow \Sigma$  coloriage,  $\Sigma =$  ens. des couleurs
- ▶ coloriage propre
- ▶ graphe  $k$ -colorable
- ▶ nombre chromatique  $\chi(G)$



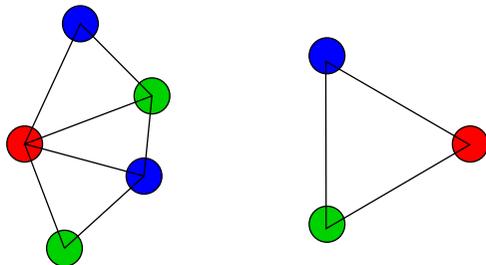
**LEMME**

Le nombre chromatique d'un graphe  $G = (V, E)$  (non orienté et simple) est le plus petit entier  $n$  tel qu'il existe un homomorphisme de  $G$  dans  $K_n$ .



**LEMME**

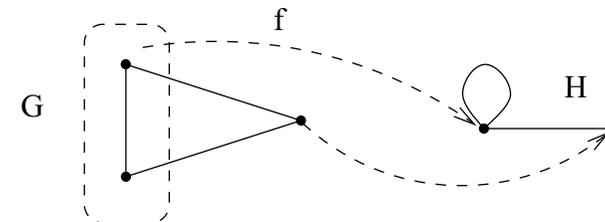
Le nombre chromatique d'un graphe  $G = (V, E)$  (non orienté et simple) est le plus petit entier  $n$  tel qu'il existe un homomorphisme de  $G$  dans  $K_n$ .



Soient  $H = (V', E')$  un graphe **simple** et  $f : V \rightarrow V'$  un homomorphisme de graphes. Pour tout  $y \in V'$ ,

$$f^{-1}(y) = \{x \in V : f(x) = y\}.$$

Puisque  $H$  est simple,  $f^{-1}(V)$  est formé de sommets indépendants.

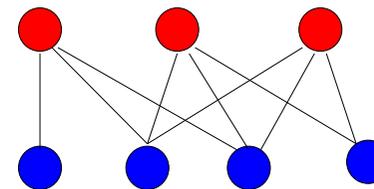


S'il existe un homomorphisme de  $G$  vers un graphe simple à  $n$  sommets (comme  $K_n$ ), alors  $G$  est  $n$ -colorable ( $\chi(G) \leq n$ ).

Réciproquement, si  $G$  est  $n$ -colorable, alors l'application qui envoie les sommets de  $G$  d'une même couleur sur un sommet de  $K_n$  est un homomorphisme.

#### REMARQUE

Un graphe  $G = (V, E)$  est biparti SSI il est 2-colorable.



#### REMARQUE

Un graphe  $G = (V, E)$  est 1-colorable SSI  $E = \emptyset$ .



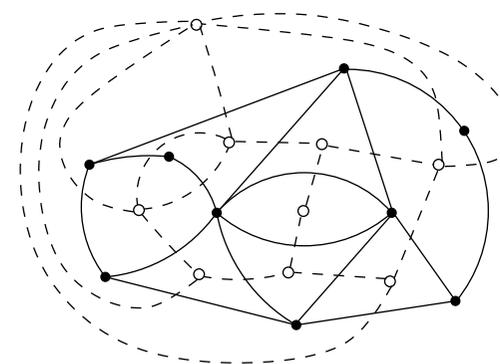
#### REMARQUE

Tout problème de planarité ou de coloriage de graphes sur la sphère revient à un problème analogue dans le plan.

#### PROBLÈME DUAL

Le problème de cartographie demande de colorier des faces adjacentes d'un graphe planaire avec des couleurs distinctes.

Nous nous sommes intéressés au coloriage des sommets d'un graphe.

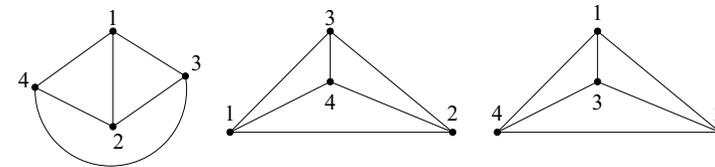


## THM. DES 4 COULEURS

Trace la plus ancienne du “problème des quatre couleurs” lettre de De Morgan à Hamilton, 23 octobre 1852 :

*“A student of mine (Francis Guthrie) asked me today to give him reason for a fact which I did not know was a fact and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored, so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but no more.”*

4 couleurs sont **nécessaires**

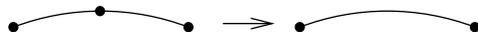


### THÉORÈME DES 5 COULEURS (PREUVE D'ORE)

Cinq couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

- On peut se restreindre à des multi-graphes **3-réguliers**

- ▶ les sommets de **degré 1** peuvent être éliminés, ils ne déterminent pas de face
- ▶ les sommets de **degré 2** peuvent être éliminés,

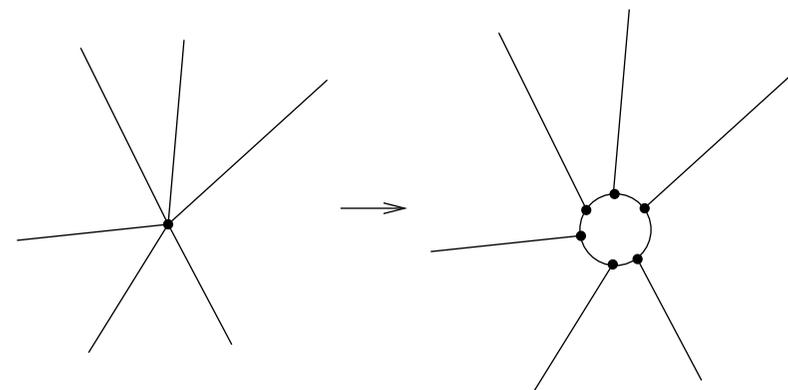


le graphe résultant possède un coloriage valide si et seulement si le graphe de départ en possède un

- ▶ les sommets de **degré  $\geq 4$** ...

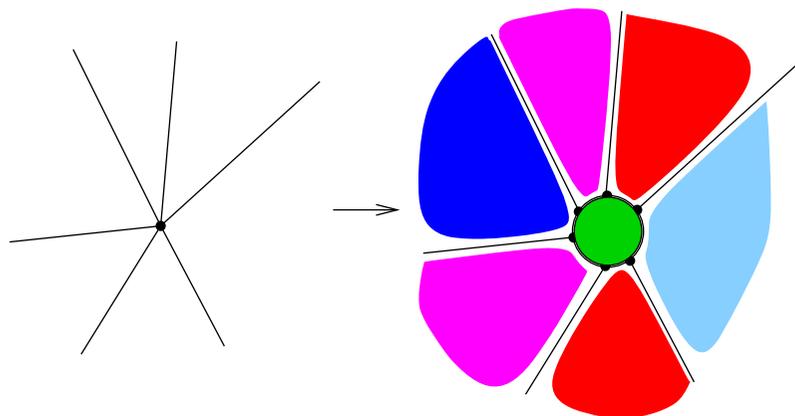
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré  $\geq 4$ .

Si le graphe résultant possède un coloriage valide, alors le graphe de départ aussi.



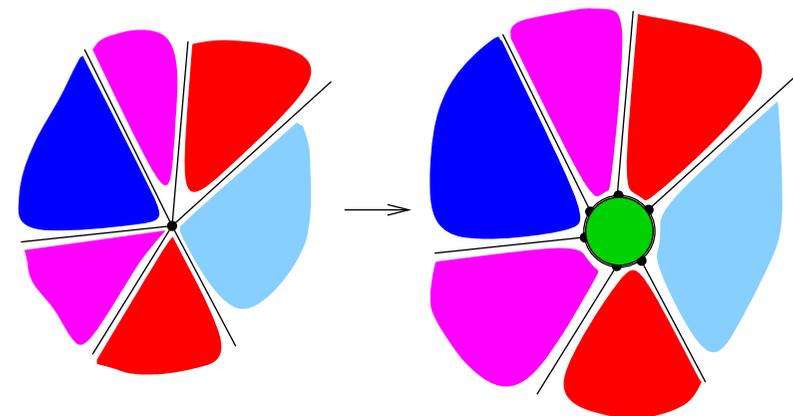
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré  $\geq 4$ .

Si le graphe résultant possède un coloriage valide, alors le graphe de départ aussi.



Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré  $\geq 4$ .

Si le graphe résultant possède un coloriage valide, alors le graphe de départ aussi.



### A CE STADE

Nous pouvons considérer avoir un graphe planaire 3-régulier  $G$ .

Si nous sommes capables de colorier les graphes planaires 3-réguliers, nous serons capables de colorier n'importe quel graphe planaire.

$\varphi_i$  : nombre de faces de  $G$  dont la frontière est déterminée par exactement  $i$  arêtes (ou par  $i$  sommets)

Le graphe 3-régulier, chaque sommet appartient à 3 faces.

Si pour chaque face, nous en comptons les sommets

$$3s = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \dots$$

Si pour chaque face, nous en comptons les arêtes

$$2a = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \dots$$

Si on compte les faces

$$f = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots$$

$$12 = 6s - 6a + 6f$$

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \dots$$

Or  $\varphi_i \geq 0$ .



## A CE STADE

Tout multi-graphe planaire 3-régulier contient une face dont la frontière est délimitée par 2, 3, 4 ou 5 arêtes.

### BUT : réduction

Considérer, dans  $G$ , une face délimitée par 2, 3, 4 ou 5 arêtes et en supprimer une arête.

On obtient un graphe  $G'$  ayant **une face de moins** que le graphe  $G$  de départ.

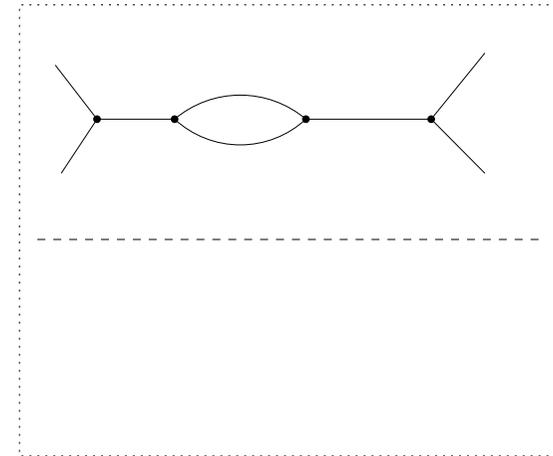
**R.1** La construction préserve le caractère 3-régulier (on pourra donc l'appliquer itérativement).

**R.2** Si  $G'$  peut être colorié avec au plus 5 couleurs,  $G$  aussi.



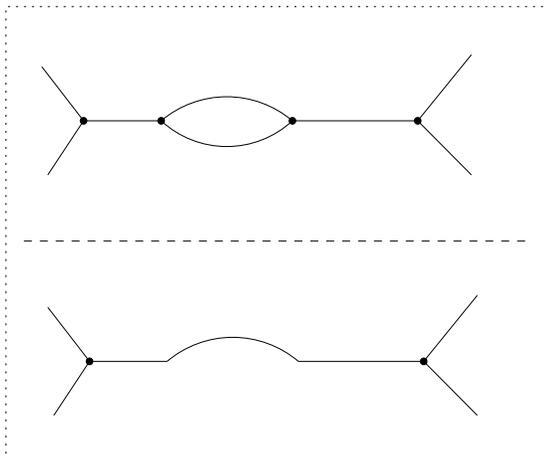
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

### • Réduction d'une face délimitée par deux arêtes



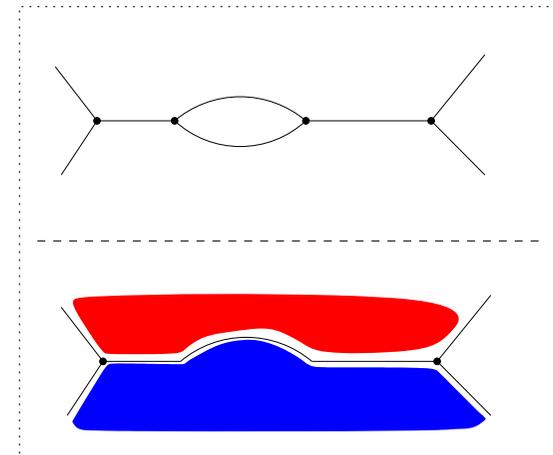
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

### • Réduction d'une face délimitée par deux arêtes



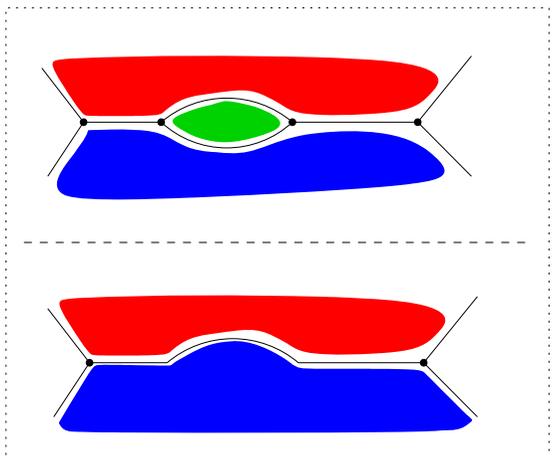
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

### • Réduction d'une face délimitée par deux arêtes

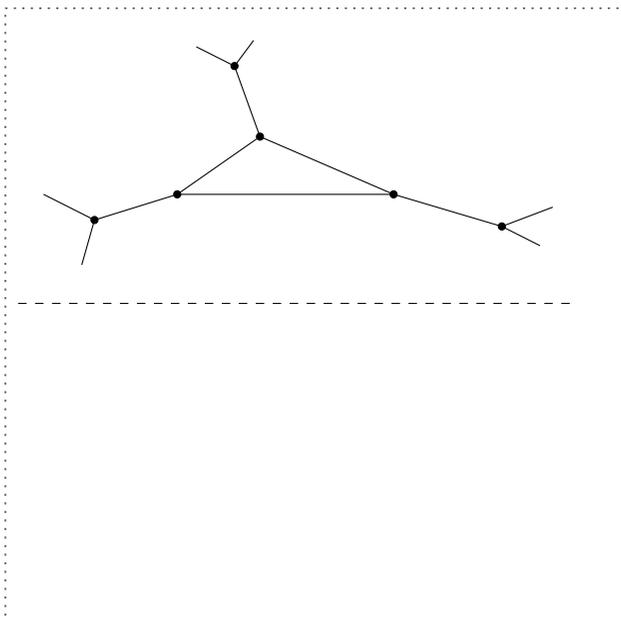


On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

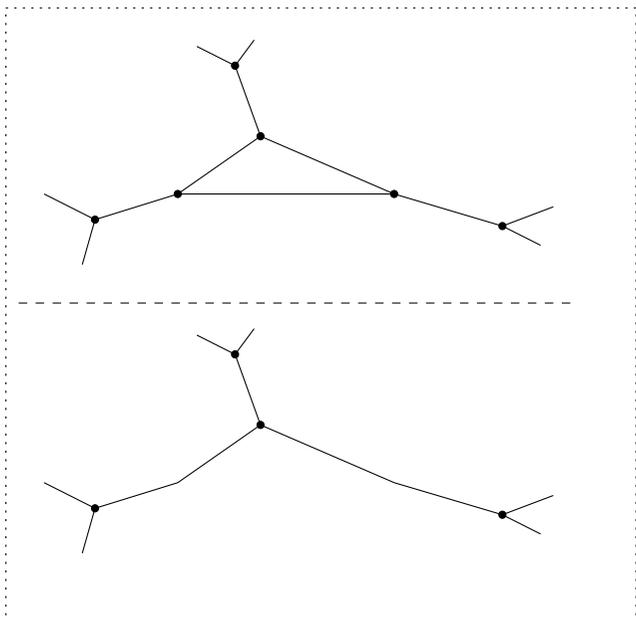
• Réduction d'une face délimitée par deux arêtes



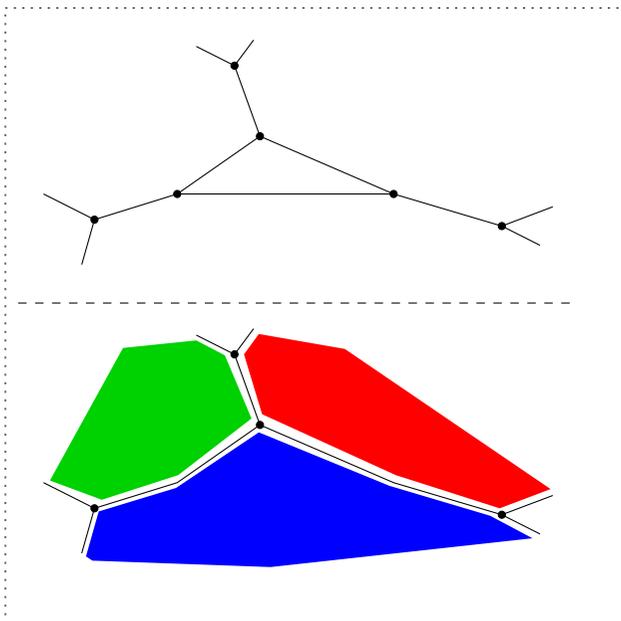
• Réduction d'une face délimitée par trois arêtes



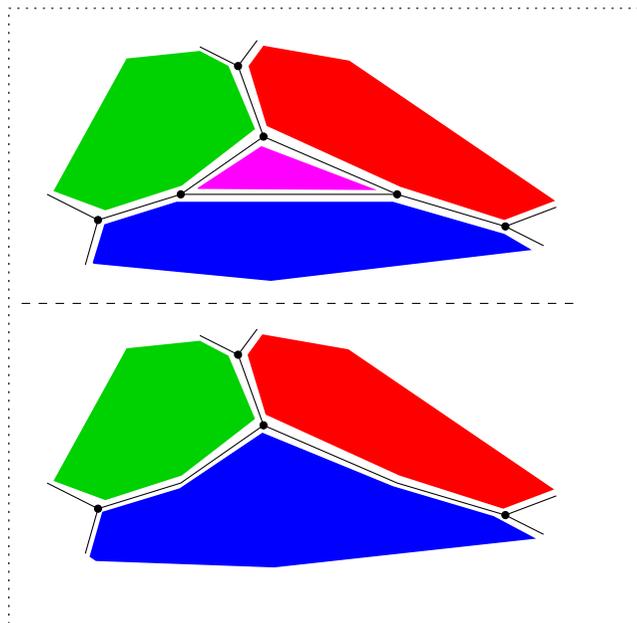
• Réduction d'une face délimitée par trois arêtes



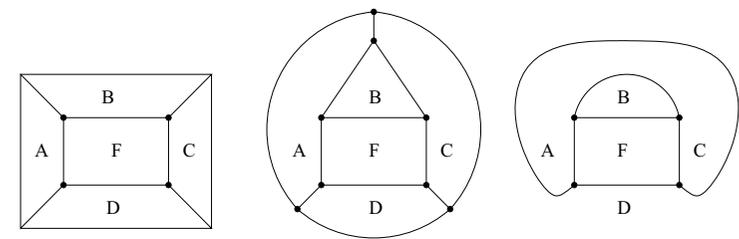
• Réduction d'une face délimitée par trois arêtes



• Réduction d'une face délimitée par trois arêtes



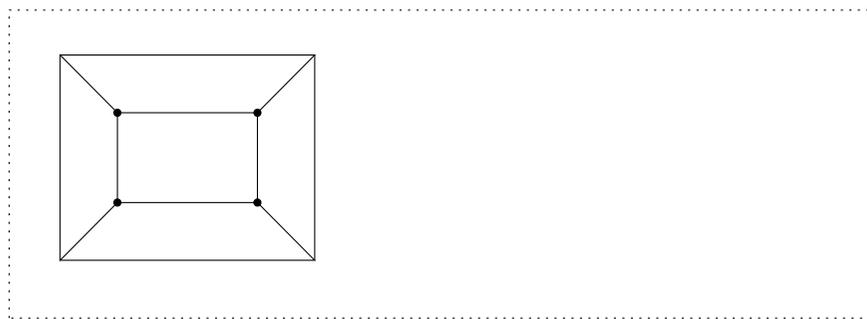
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



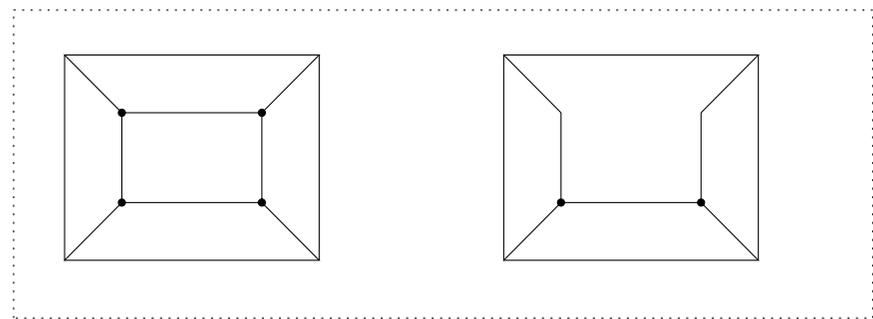
On peut supprimer certains sommets et arêtes pour obtenir les configurations de la figure

Il existe toujours deux faces opposées :  $B$  et  $D$ , adjacentes à une face carrée  $F$  t.q.  $B$  et  $D$  ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes

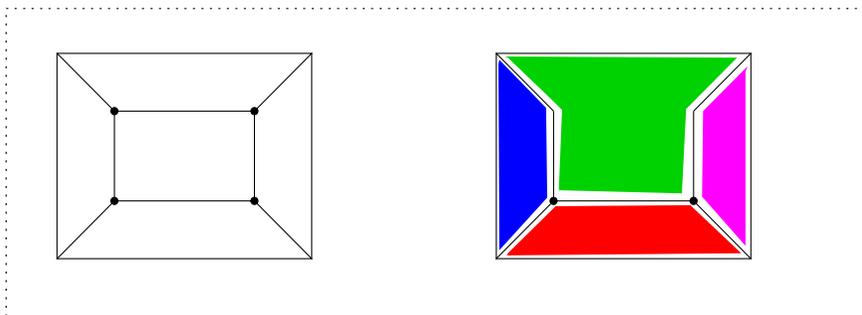
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



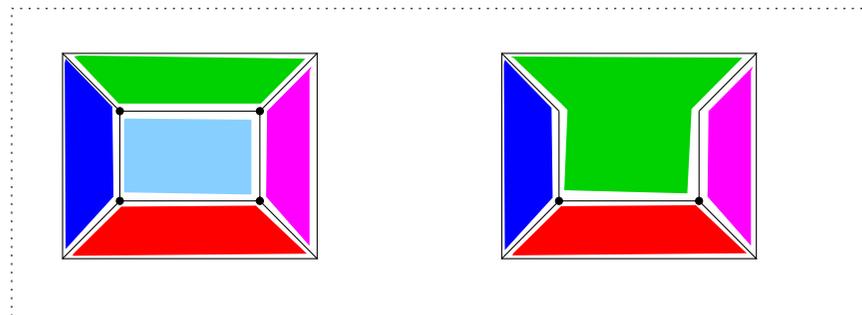
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



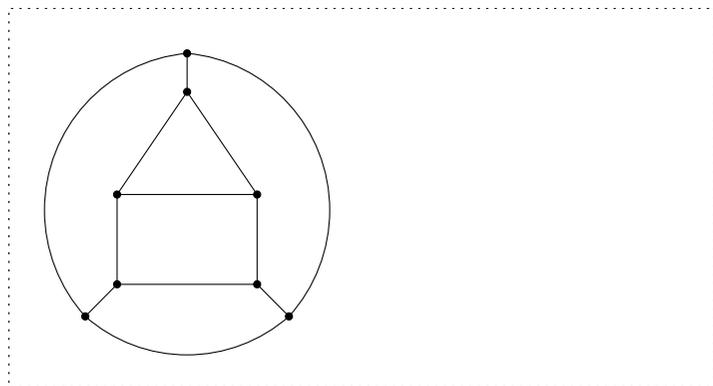
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



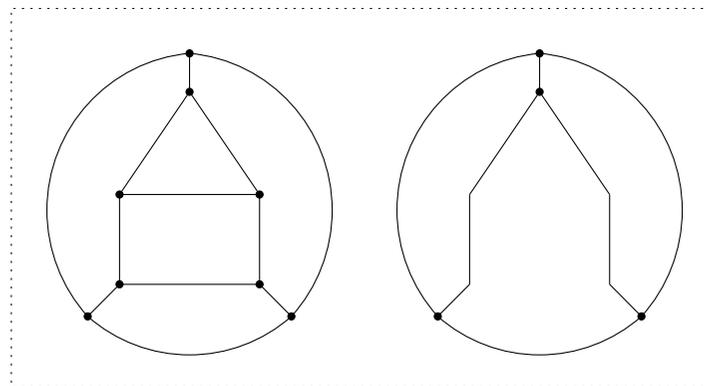
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



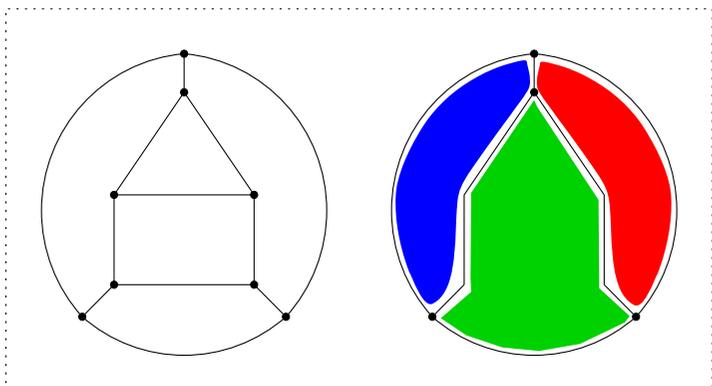
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



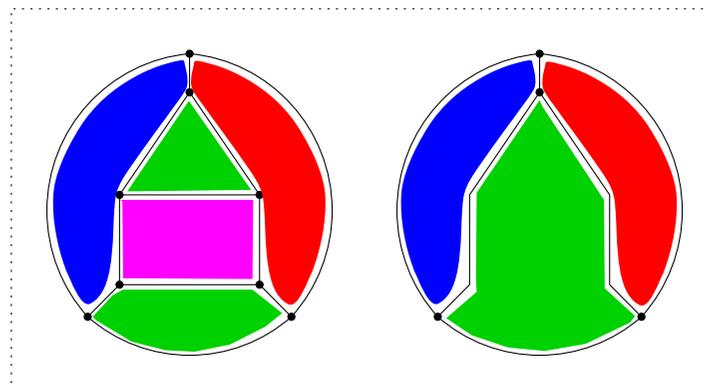
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



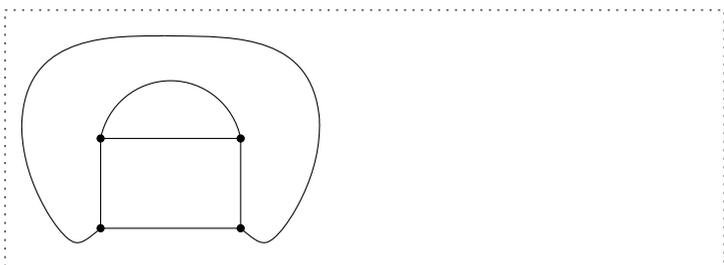
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



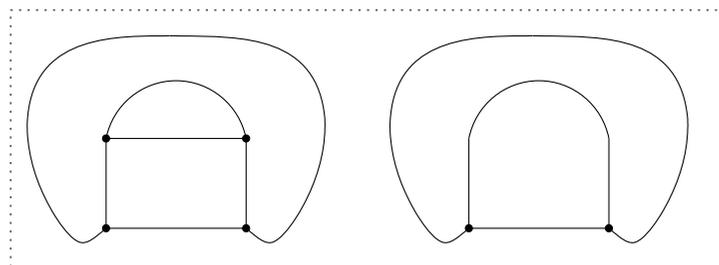
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



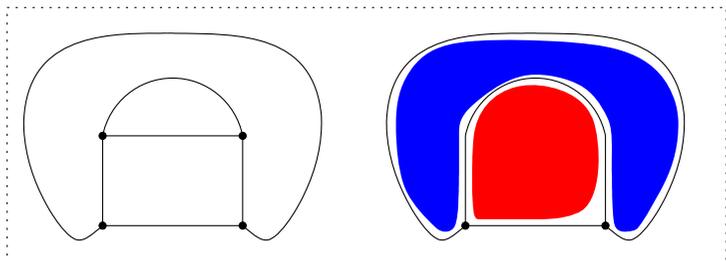
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



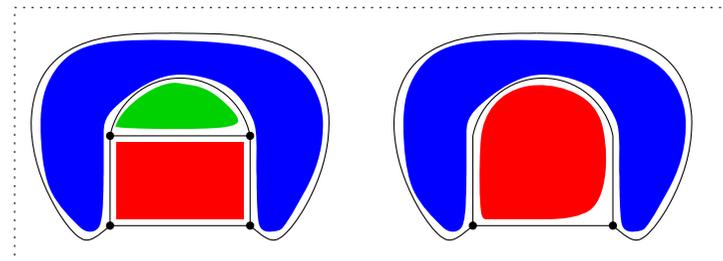
• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes

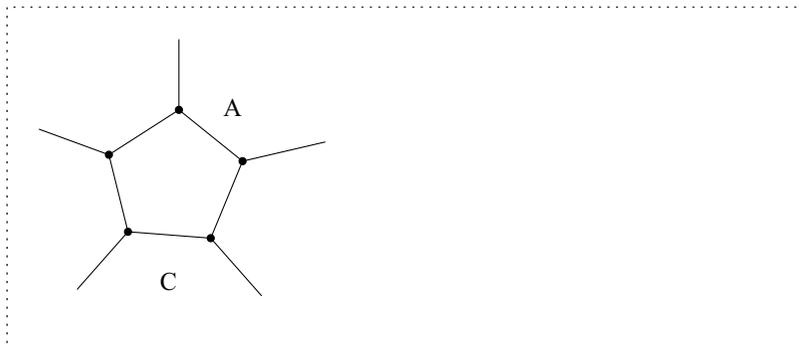


• Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes



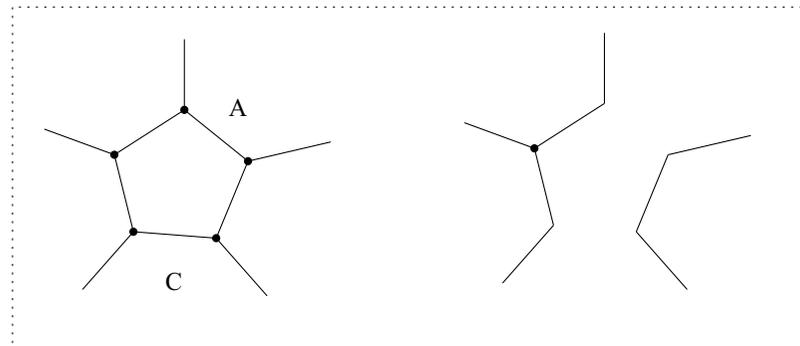
• Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :  $A$  et  $C$ , adjacentes à une face pentagonale  $F$  t.q.  $A$  et  $C$  ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



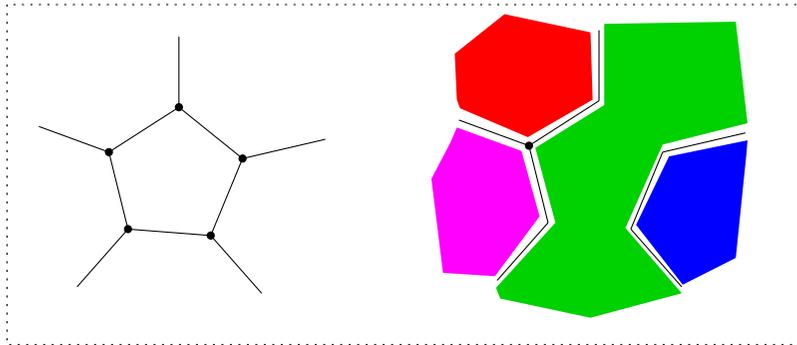
• Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :  $A$  et  $C$ , adjacentes à une face pentagonale  $F$  t.q.  $A$  et  $C$  ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



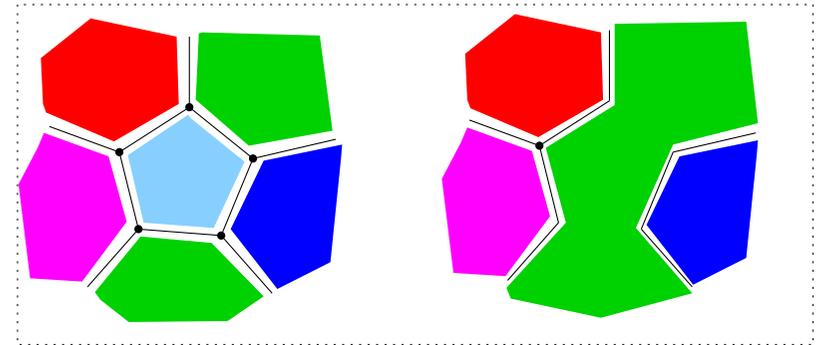
● Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



● Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



**K. APPEL, W. HAKEN (1976)**

Quatre couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

La preuve originale de K. Appel et W. Haken utilisait quant à elle près de 2000 configurations inévitables.

Le nombre de configurations à considérer est de l'ordre de 600 pour la preuve fournie par N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour et R. Thomas (1996).

Le *genre* d'une surface est un invariant topologique. Il s'agit du nombre maximum de courbes simples fermées que l'on peut tracer sur la surface sans la disconnecter.

**FORMULE D'HEAWOOD (1980)**

Si un graphe peut être représenté de manière planaire sur une surface de genre  $g$ , alors ses faces peuvent être colorées avec  $c_g$  couleurs où

$$c_g = \left\lceil \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48g}) \right\rceil .$$

La partie délicate consiste à montrer qu'il existe effectivement un graphe nécessitant ce nombre de couleurs.

Pour  $g = 0, 1$ , on retrouve le théorème des 4 et des 7 couleurs.

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_g$	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14

TAB.: Les première valeurs de  $c_g$ .

## DÉFINITIONS

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté ayant  $n$  sommets.

$m_{k,G}$  = nombre de coloriage propres distincts de  $G$  utilisant **exactement**  $k$  couleurs

$$z^{\underline{k}} = z(z-1)\cdots(z-k+1).$$

Le **polynôme chromatique** de  $G$  est donné par

$$\begin{aligned} \pi_G(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,G}}{i!} z^{\underline{i}} \\ &= \frac{m_{1,G}}{1!} z + \frac{m_{2,G}}{2!} z(z-1) + \frac{m_{3,G}}{3!} z(z-1)(z-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{m_{n,G}}{n!} z(z-1)\cdots(z-n+1). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré  $n$  en la variable  $z$ .

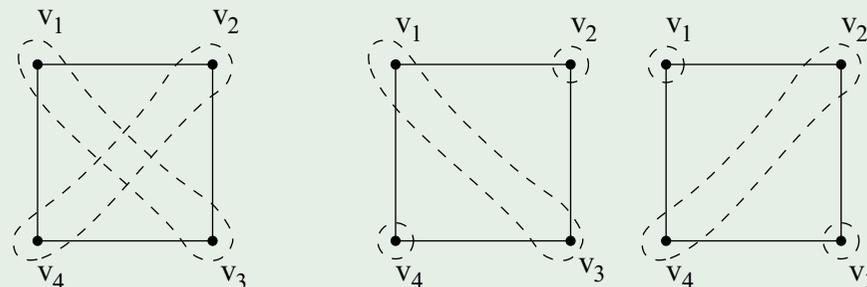
## REMARQUE

$$\frac{m_{k,G}}{k!}$$

est le nombre de partitions de  $V$  en  $k$  sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriage propres possibles de  $G$  utilisant exactement  $k$  couleurs.

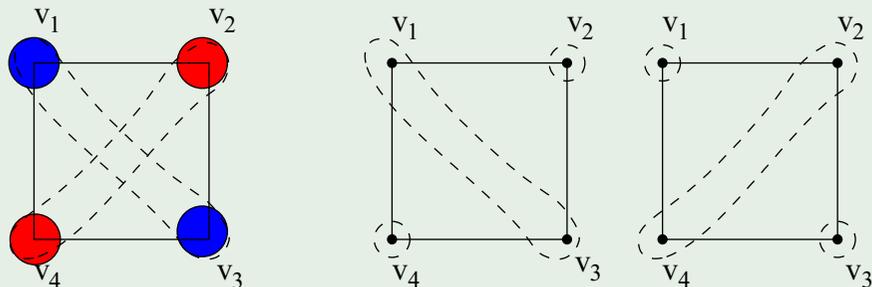
En fait, cette quantité équivaut au *nombre de partitions de  $V$  en  $k$  sous-ensembles (disjoints et non vides) de sommets indépendants*.

## EXEMPLE



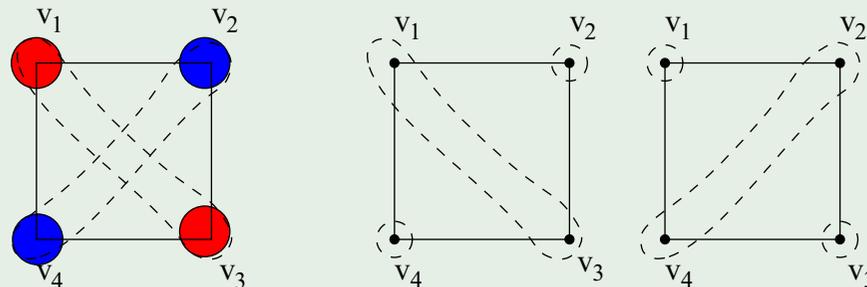
$$m_{2,G} = 2 \text{ et } m_{2,G}/2! = 1, \quad m_{3,G} = 12 \text{ et } m_{3,G}/3! = 2, \\ m_{4,G}/4! = 1$$

EXEMPLE



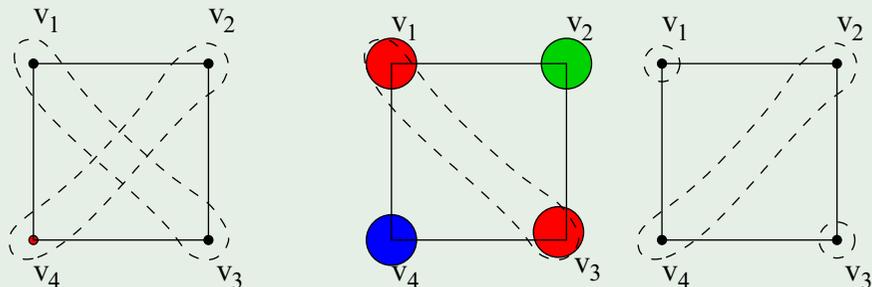
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



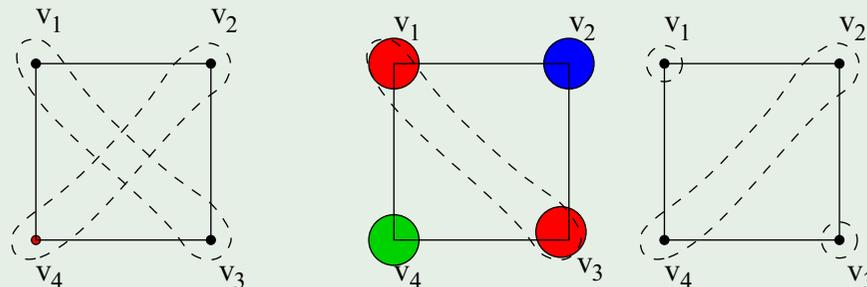
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



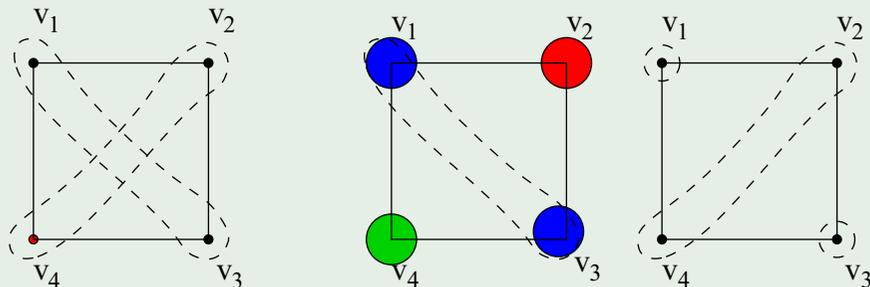
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



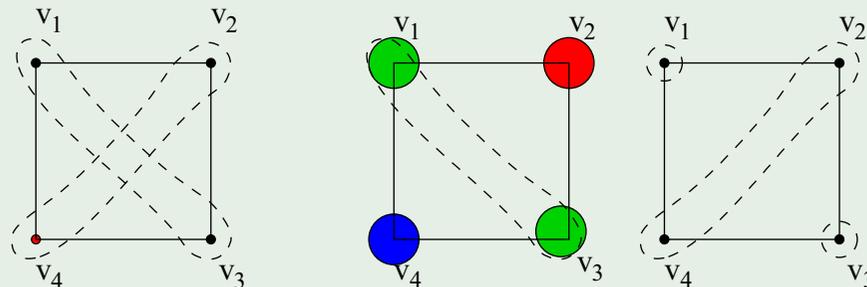
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



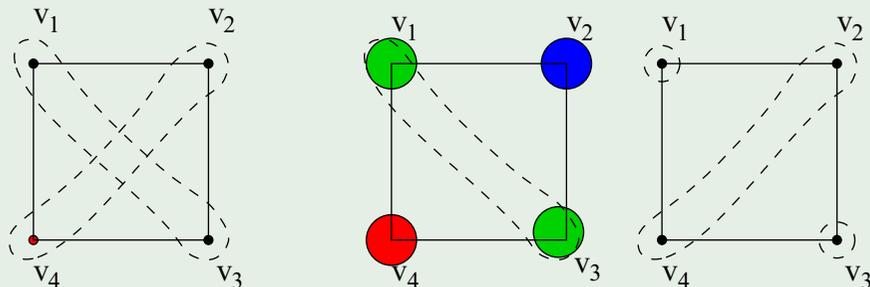
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



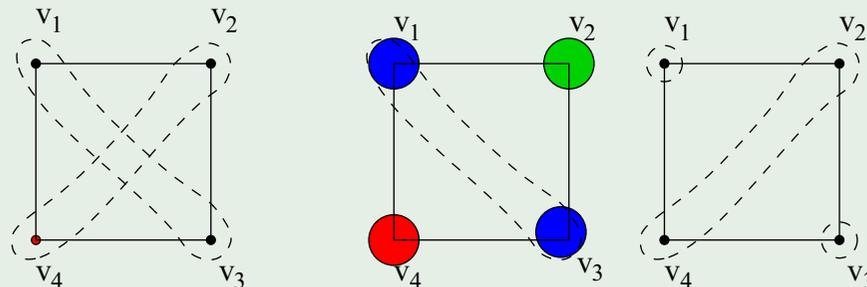
$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

EXEMPLE



$m_{2,G} = 2$  et  $m_{2,G}/2! = 1$ ,  $m_{3,G} = 12$  et  $m_{3,G}/3! = 2$ ,  
 $m_{4,G}/4! = 1$

$$\underbrace{m_{1,G}}_{=0} z + \underbrace{\frac{m_{2,G}}{2!}}_{=1} z(z-1) + \underbrace{\frac{m_{3,G}}{3!}}_{=2} z(z-1)(z-2) + \underbrace{\frac{m_{4,G}}{4!}}_{=1} z(z-1)(z-2)(z-3)$$

ou encore

$$\pi_G(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 3z.$$

### POUR LE GRAPHE COMPLET $K_n$

les seuls ensembles de sommets indépendants sont les singletons. Ainsi, pour tout  $k \leq n$ ,

$$\frac{m_{k,K_n}}{n!} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_{K_n}(z) = z^n.$$

- ▶ Si  $G$  possède  $n$  sommets, alors  $m_{n,G} = n!$  car on assigne une couleur par sommet. On en déduit que le polynôme chromatique est monique.
- ▶ Si  $G$  n'est pas connexe mais possède 2 composantes  $G_1$  et  $G_2$ , alors

$$\pi_G(z) = \pi_{G_1}(z) \cdot \pi_{G_2}(z).$$

Cela résulte du fait que les sommets de  $G_1$  peuvent être colorés indépendamment de ceux de  $G_2$ .

- ▶ Il est clair que  $\pi_G(0) = 0$  pour tout graphe  $G$ .

### PROPOSITION

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Le nombre  $\pi_G(k)$  est le nombre de coloriage propres de  $G$  utilisant **au plus**  $k$  couleurs.

### SUITE DE L'EXEMPLE

$\pi_G(4) = 84$  et donc, il y est possible de colorier proprement  $G$  avec au plus 4 couleurs de 84 façons distinctes

Inutile de considérer les termes d'exposant  $> k$ ,

$$\pi_G(k) = \sum_{i=1}^k \frac{m_{i,G}}{i!} z^i.$$

Un coloriage propre de  $G$  avec  $i \leq k$  couleurs choisies parmi  $\{1, \dots, i\}$  donne lieu à des coloriage propres avec  $i$  couleurs choisies parmi  $\{1, \dots, k\}$ .

On dispose de  $\frac{m_{i,G}}{i!}$  partitions de  $V$  en  $i$  sous-ensembles de sommets indépendants.

Pour chaque partition  $C_1 \cup \dots \cup C_i$  de  $V$ ,

- ▶ à  $C_1$ , on peut choisir une couleur parmi  $k$  couleurs,
- ▶ à  $C_2$ , on peut choisir une couleur parmi  $k - 1$  couleurs,
- ▶ ...
- ▶ à  $C_i$ , on peut choisir une couleur parmi  $k - i + 1$  couleurs.

Ainsi, chacune des  $\frac{m_{i,G}}{i!}$  partitions de  $V$  en  $i$  sous-ensembles donnent  $k^i$  coloriage utilisant exactement  $i$  des  $k$  couleurs disponibles.

## SUITE DE L'EXEMPLE

le nombre de coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs vaut

$$\pi_G(3) = \underbrace{m_{1,G}}_{=0} 3 + \frac{m_{2,G}}{2!} 3 \cdot 2 + \frac{m_{3,G}}{3!} 3 \cdot 2 \cdot 1 = 0 + 6 + 2 \cdot 6 = 18.$$

Ces coloriage sont donnés par

V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>
1	2	1	2
2	1	2	1
1	3	1	3
3	1	3	1
2	3	2	3
3	2	3	2

V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>
1	2	1	3
1	3	1	2
2	1	2	3
2	3	2	1
3	1	3	2
3	2	3	1

V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>
2	1	3	1
3	1	2	1
1	2	3	2
3	2	1	2
1	3	2	3
2	3	1	3

## COROLLAIRE

Le nombre chromatique de  $G$  est le plus petit  $k$  tel que  $\pi_G(k) \neq 0$ .

## UNE FORMULE "À LA CAYLEY"

Si  $e$  est une arête de  $G$  (qui n'est pas une boucle), alors le polynôme chromatique satisfait la relation

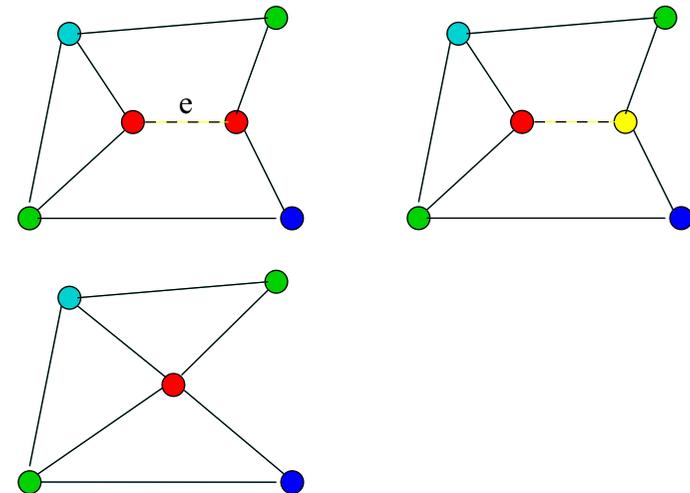
$$\pi_G(z) = \pi_{G-e}(z) - \pi_{G \cdot e}(z).$$

Si on considère tous les coloriage propres de  $G - e$  avec exactement  $k$  couleurs. Il y en a de deux types :

- ▶ ceux pour lesquels on assigne aux extrémités de  $e$  une même couleur
- ▶ (resp. deux couleurs distinctes)

Ceux du premier type sont en bijection avec les coloriage propres de  $G \cdot e$  utilisant  $k$  couleurs.

Ceux du second type sont en bijection avec les coloriage propres de  $G$  utilisant  $k$  couleurs.



## COROLLAIRE

Le polynôme chromatique d'un arbre  $T$  à  $n$  sommets vaut

$$\pi_T(z) = z(z-1)^{n-1}.$$

Récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est immédiat.

Supposons le résultat acquis pour  $n \geq 1$  et vérifions-le pour  $n + 1$ .

Si un arbre possède  $n + 1$  sommets, il a au moins un sommet de degré 1 et soit  $e$ , l'arête incidente à ce sommet.



$T - e$  possède deux composantes :

- ▶ un sommet isolé dont le polynôme chromatique vaut  $z$
- ▶ un arbre à  $n$  sommets (qui n'est autre que la contraction  $T \cdot e$ ) de polynôme chromatique  $z(z-1)^{n-1}$  (par hypothèse de récurrence)

$$\pi_{T-e}(z) = z \pi_{T \cdot e}(z).$$

Par la proposition précédente,

$$\pi_T(z) = \pi_{T-e}(z) - \pi_{T \cdot e}(z) = (z-1) \pi_{T \cdot e}(z) = z(z-1)^n.$$



## THÉORÈME DE RAMSEY

Etant donné un entier  $s$ , existe-t-il un entier  $n$  (dépendant de  $s$ ) tel pour tout coloriage des arêtes de  $K_n$  avec deux couleurs,  $K_n$  contient un sous-graphe  $K_s$  formé d'arêtes d'une même couleur ?

Il n'est pas évident qu'*a priori* cette question possède une solution.

### APPLICATIONS...

théorie des nombres, analyse harmonique, géométrie...

V. Rosta, *Ramsey Theory Applications*,

<http://www.combinatorics.org/Surveys/ds13.pdf>



Nous allons définir le nombre  $R(s, t)$  comme étant le plus petit  $n$  tel que  $K_n$  contienne une copie de  $K_s$  rouge ou une copie de  $K_t$  bleue. Il nous faudra bien sûr **montrer que ces nombres existent**

### THÉORÈME DE RAMSEY (1930)

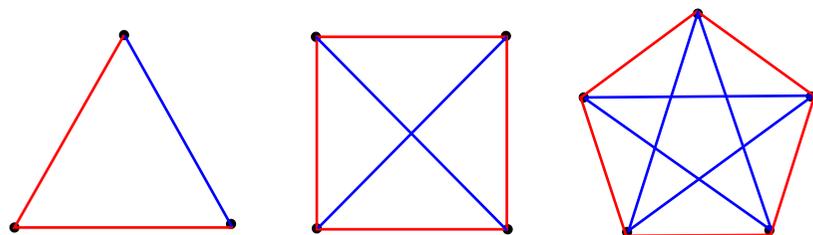
Il existe un plus petit entier  $R(s, t)$  tel que pour tout  $n \geq R(s, t)$ , tout coloriage de  $K_n = (V, E)$ ,  $c : E \rightarrow \{\mathcal{R}, \mathcal{B}\}$ , est tel que  $G$  contient une copie de  $K_s$  colorée en  $\mathcal{R}$  ou une copie de  $K_t$  colorée en  $\mathcal{B}$ .

$$R(s, t) = R(t, s)$$

$R(s, 2) = R(2, s) = s$  : dans tout coloriage des arêtes de  $K_s$ , au moins une arête est bleue ou alors elles sont toutes rouges et aucune valeur inférieure à  $s$  ne peut convenir.



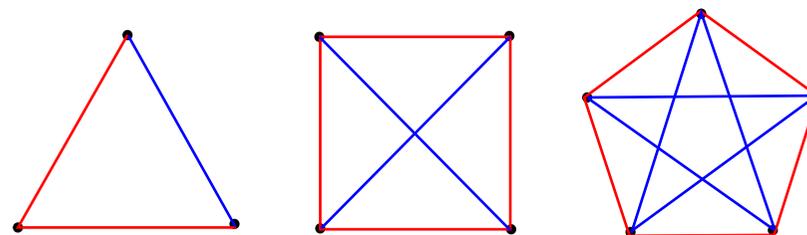
$$R(3, 3) > 5$$



Pour vérifier que  $R(3, 3) = 6$ , il faut passer en revue tous les coloriage de  $K_6$  et s'assurer qu'ils contiennent tous une copie de  $K_3$  monochromatique!



$$R(3, 3) > 5$$



Pour vérifier que  $R(3, 3) = 6$ , il faut passer en revue tous les coloriage de  $K_6$  et s'assurer qu'ils contiennent tous une copie de  $K_3$  monochromatique!



$K_n$  contient  $C_n^2$  arêtes pouvant chacune être coloriée en rouge ou en bleu. Le tableau suivant reprend le nombre de coloriage possibles des arêtes de  $K_n$  pour les première valeurs de  $n$ ,

$n$	$2^{C_n^2}$
3	8
4	64
5	1024
6	32768
7	2097152
8	268435456
9	68719476736
10	35184372088832
11	36028797018963968
12	73786976294838206464
13	302231454903657293676544
14	2475880078570760549798248448



### THÉORÈME D'ERDŐS–SZEKERES (1935)

Pour tous  $s, t \geq 2$ , le nombre  $R(s, t)$  existe.

De plus, on a

$$R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$$

et si  $s, t \geq 3$ , alors

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1).$$



Par récurrence sur  $s + t$ .

$R(2, t)$  et  $R(s, 2)$  existent toujours.

Donc,  $R(s, t)$  existe si  $s + t \leq 5$  ( $4 = 2 + 2$ ,  $5 = 2 + 3$  ou  $5 = 3 + 2$ ).

Supposons que  $R(s, t)$  existe pour tous  $s, t$  tels que  $s + t < N$  et montrons que  $R(s, t)$  existe pour  $s + t = N$ , avec  $N \geq 6$ .

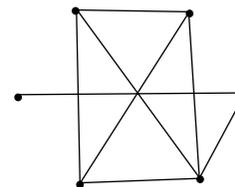
Si  $s = 2$  ou  $t = 2$ , le résultat est démontré. Nous pouvons donc supposer  $s, t \geq 3$ .

Il nous suffit de trouver un entier  $n$  tel que tout coloriage de  $K_n$  contient toujours une copie de  $K_s$  rouge ou de  $K_t$  bleue. De cette manière, on aura majoré  $R(s, t)$ .

**Thèse** : tout graphe à  $n = R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$  sommets contient

- ▶ un sous-graphe isomorphe à  $K_s$  ou
- ▶ un ensemble de  $t$  sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc.,  $R(s - 1, t)$  et  $R(s, t - 1)$  existent.

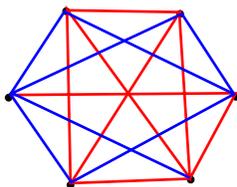


Il nous suffit de trouver un entier  $n$  tel que tout coloriage de  $K_n$  contient toujours une copie de  $K_s$  rouge ou de  $K_t$  bleue. De cette manière, on aura majoré  $R(s, t)$ .

**Thèse** : tout graphe à  $n = R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$  sommets contient

- ▶ un sous-graphe isomorphe à  $K_s$  ou
- ▶ un ensemble de  $t$  sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc.,  $R(s - 1, t)$  et  $R(s, t - 1)$  existent.



Soit  $v$  un sommet de  $G$ ,

$$A_v = V \setminus (\nu(v) \cup \{v\})$$

ensemble des sommets  $\neq v$  et non-voisins de  $v$ .

$$\#V \setminus \{v\} = n - 1 = R(s - 1, t) + R(s, t - 1) - 1$$

$$\#\nu(v) \geq R(s - 1, t) \quad \text{ou} \quad \#A_v \geq R(s, t - 1).$$

En effet,  $\nu(v)$  et  $A_v$  partitionnent  $V \setminus \{v\}$  donc  $\#\nu(v) + \#A_v = \#V \setminus \{v\}$ .

Sinon,  $\#\nu(v) \leq R(s - 1, t) - 1$  et  $\#A_v \leq R(s, t - 1) - 1$  donc  $\#\nu(v) + \#A_v \leq n - 2$ , impossible!

- Si  $\#v(v) \geq R(s-1, t)$ .

Par définition de  $R(s-1, t)$ , le sous-graphe de  $G$  induit par  $v(v)$  contient

- ▶ un sous-graphe  $B$  isomorphe à  $K_{s-1}$  ou
- ▶ un ensemble de sommets indépendants de taille  $t$ .

Dans le premier cas, le sous-graphe induit par  $B \cup \{v\}$  est isomorphe à  $K_s$  (car  $v$  est adjacent à tous les sommets de  $B$ ).

Dans le second cas, on dispose directement d'un sous-ensemble de sommets indépendants de taille  $t$ .



- Si  $\#A_v \geq R(s, t-1)$ .

Par définition de  $R(s, t-1)$ , le sous-graphe de  $G$  induit par  $A_v$  contient

- ▶ un sous-graphe isomorphe à  $K_s$  (ce qui suffit) ou
- ▶ un ensemble  $C$  de sommets indépendants de taille  $t-1$ .

Dans ce cas,  $C \cup \{v\}$  est un ensemble de sommets indépendants de taille  $t$  ( $v$  n'est adjacent à aucun sommet de  $C$ ).



Thèse :  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$

Par récurrence sur  $s+t$ . Pour  $s=2$  (ou  $t=2$ ),

$$\underbrace{R(2, t)}_{=t} \leq \underbrace{C_t^1}_{=t}.$$

Supposons que  $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$  pour tous  $s, t$  tels que  $s+t < N$  et vérifions-le pour  $s+t = N$ .

Une fois encore, nous pouvons supposer  $s, t \geq 3$ .

Par la première partie de la preuve et en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \leq C_{s+t-3}^{s-2} + C_{s+t-3}^{s-1}.$$

On conclut par la formule du triangle de Pascal.



### REMARQUE

La détermination précise de  $R(s, t)$  est extrêmement complexe (il est difficile d'un point de vue combinatoire d'énumérer tous les coloriage de  $K_n$ ).

Par exemple, la détermination de  $R(3, 3)$  date de 1955, alors que l'estimation de  $R(3, 12)$  reprise ci-contre date de 2001.

$j$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R(3, j)$	6	9	14	18	23	28	36	[40, 43]	[46, 51]	[52, 59]

"Small Ramsey Number, S. P. Radziszowski",  
<http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1.pdf>  
 donne un état de l'art en la matière.

