Théorie des graphes (6)

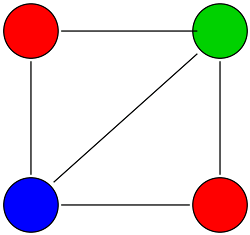
Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2007–2008

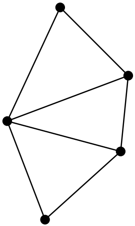
UNIVERSITÉ de Liège

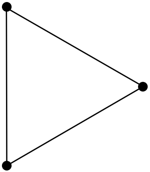
- $c : V \to \Sigma$ coloriage, Σ= ens. des couleurs
- coloriage propre
- graphe k-colorable
- nombre chromatique $\chi(G)$



Lemme

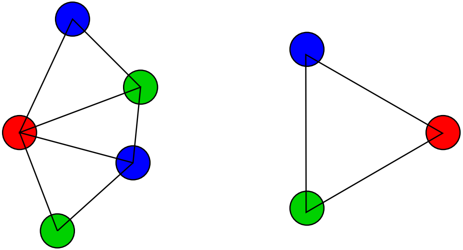
Le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$ (non orienté et simple) est le plus petit entier n tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K_n.





Lemme

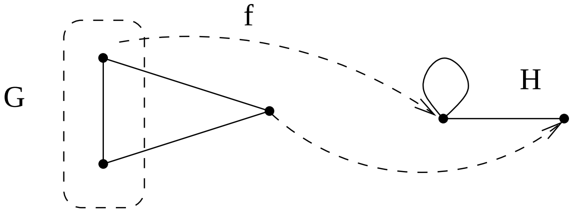
Le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$ (non orienté et simple) est le plus petit entier n tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K_n.



Soient $H = (V', E')$ un graphe simple et $f : V \to V'$ un homomorphisme de graphes. Pour tout $y \in V'$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in V : f(x) = y\}.$$

Puisque H est simple, $f^{-1}(V)$ est formé de sommets indépendants.

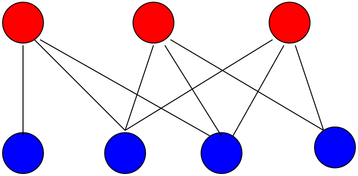


S’il existe un homomorphisme de G vers un graphe simple à n sommets (comme K_n), alors G est n-colorable ($\chi(G) \leq n$).

Réciproquement, si G est n-colorable, alors l’application qui envoie les sommets de G d’une même couleur sur un sommet de K_n est un homomorphisme.

Remarque

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti SSI il est 2-colorable.



Remarque

Un graphe $G = (V, E)$ est 1-colorable SSI $E = \emptyset$.

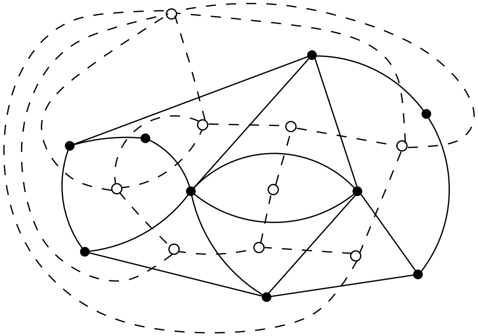
Remarque

Tout problème de planarité ou de coloriage de graphes sur la sphère revient à un problème analogue dans le plan.

Problème dual

Le problème de cartographie demande de colorier des faces adjacentes d'un graphe planaire avec des couleurs distinctes.

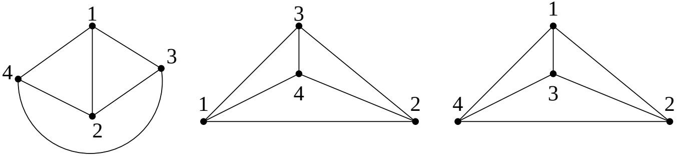
Nous nous sommes intéressés au coloriage des sommets d'un graphe.



Trace la plus ancienne du “problème des quatre couleurs” lettre de De Morgan à Hamilton, 23 octobre 1852 :

“*A student of mine (Francis Guthrie) asked me today to give him reason for a fact which I did not know was a fact and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored, so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but no more.*”

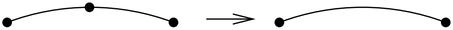
4 couleurs sont nécessaires



Théorème des 5 couleurs (preuve d'Ore)

Cinq couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

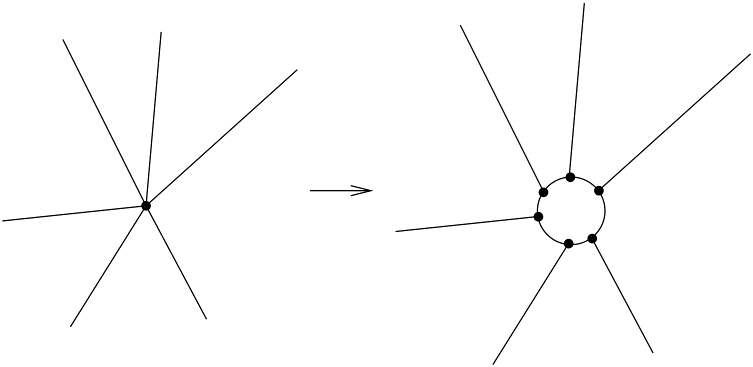
- On peut se restreindre à des multi-graphes **3-réguliers**
  - les sommets de degré 1 peuvent être éliminés, ils ne déterminent pas de face
  - les sommets de degré 2 peuvent être éliminés,

    le graphe résultant possède un coloriage valide si et seulement si le graphe de départ en possède un
  - les sommets de degré ≥ 4...

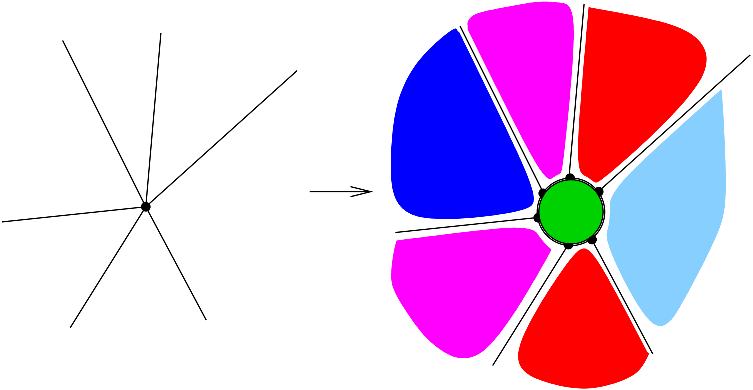
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



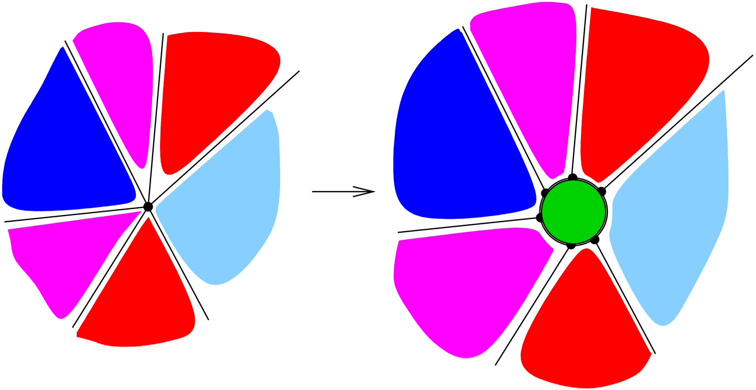
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



A CE STADE

Nous pouvons considérer avoir un graphe planaire 3-régulier G.

Si nous sommes capables de colorier les graphes planaires 3-réguliers, nous serons capables de colorier n'importe quel graphe planaire.

φ_i : nombre de faces de G dont la frontière est déterminée par exactement i arêtes (ou par i sommets)

Le graphe 3-régulier, chaque sommet appartient à 3 faces.

Si pour chaque face, nous en comptons les sommets

$$3s = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \cdots .$$

Si pour chaque face, nous en comptons les arêtes

$$2a = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \cdots .$$

Si on compter les faces

$$f = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots .$$

$12 = 6s - 6a + 6f$

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots .$$

Or $\varphi_i \geq 0$.

A CE STADE

Tout multi-graphe planaire 3-régulier contient une face dont la frontière est délimitée par $2, 3, 4$ ou 5 arêtes.

BUT : réduction

Considérer, dans G, une face délimitée par $2, 3, 4$ ou 5 arêtes et en supprimer une arête.

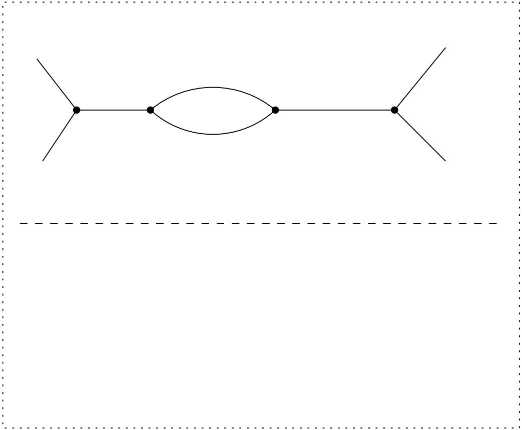
On obtient un graphe G' ayant **au moins une face de moins** que le graphe G de départ.

R.1 La construction préserve le caractère 3-régulier (on pourra donc l'appliquer itérativement).

R.2 Si G' peut être colorié avec au plus 5 couleurs, G aussi.

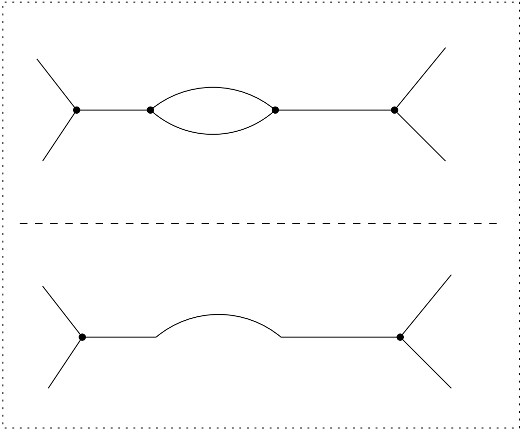
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

• **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



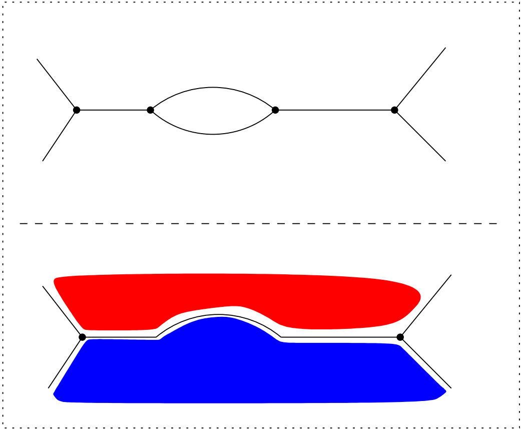
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

• **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



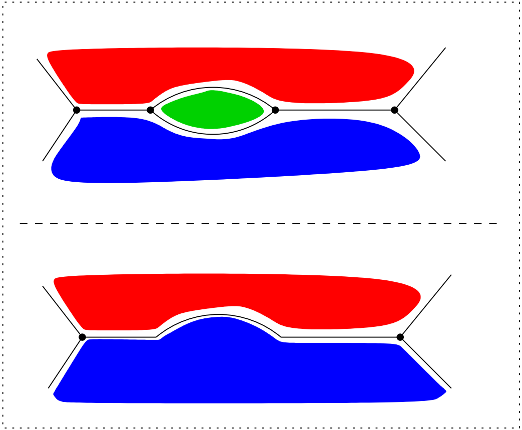
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**

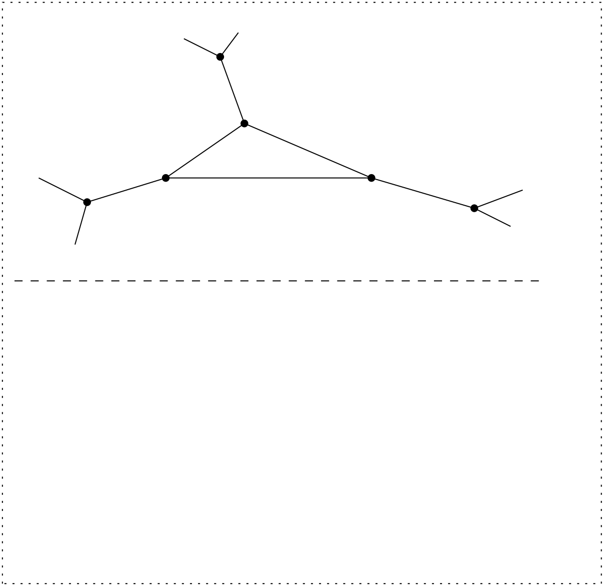


On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

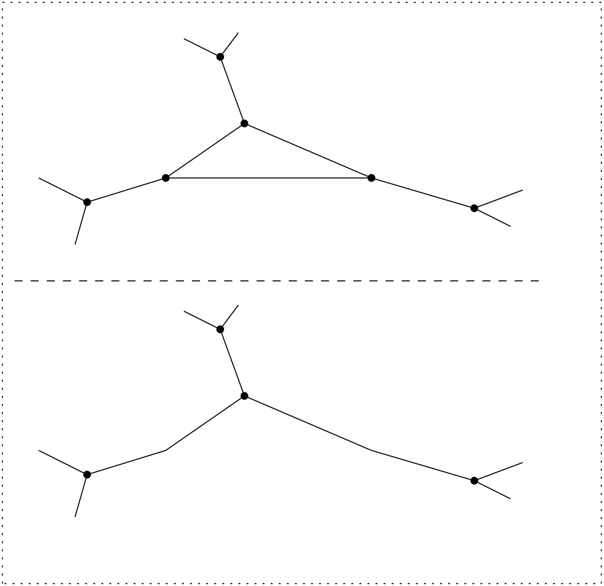
- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



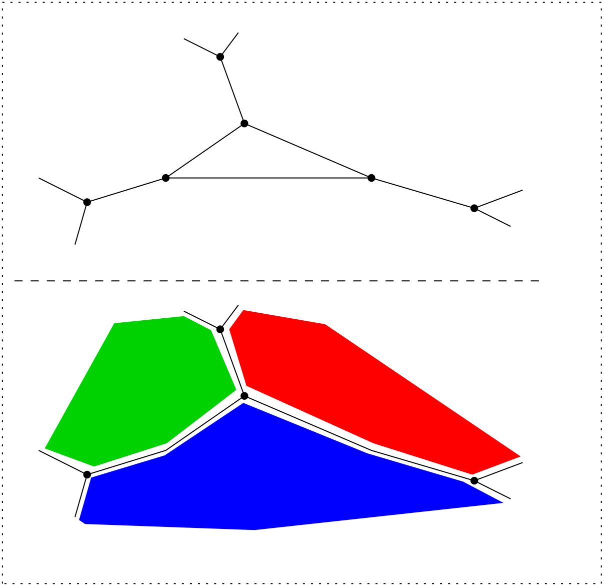
• **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



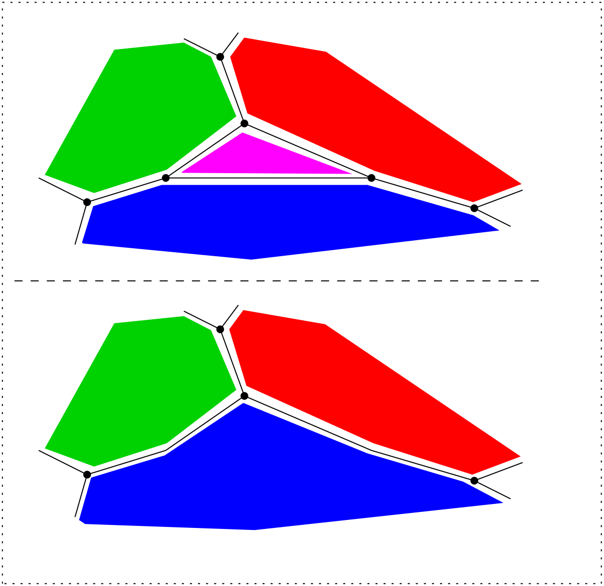
• **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



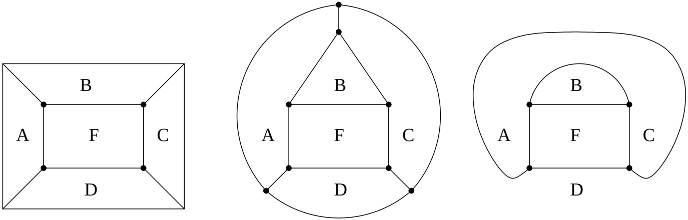
- **Réduction d’une face délimitée par trois arêtes**



- **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



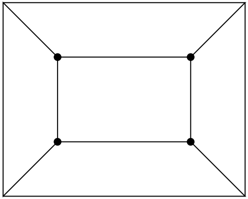
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



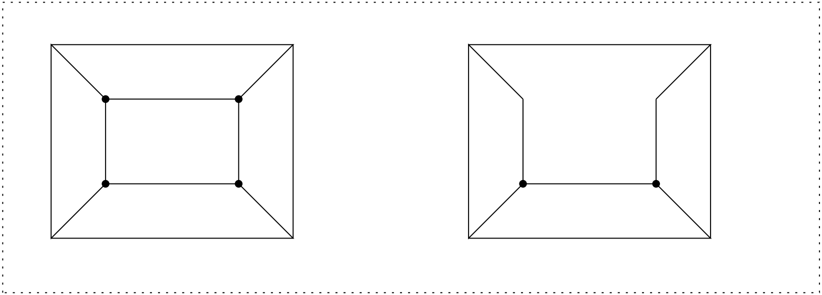
On peut supprimer certains sommets et arêtes pour obtenir les configurations de la figure

Il existe toujours deux faces opposées : B et D, adjacentes à une face carrée F t.q. B et D ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes

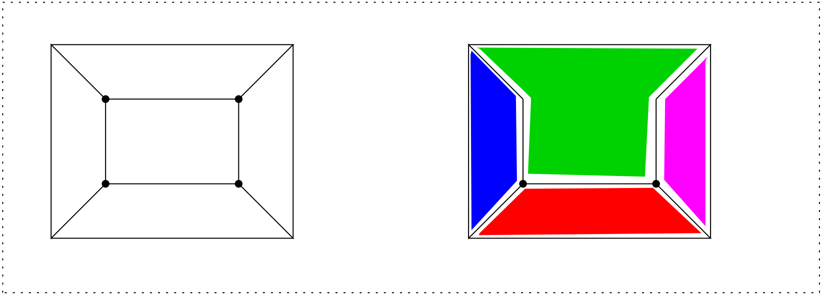
• **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



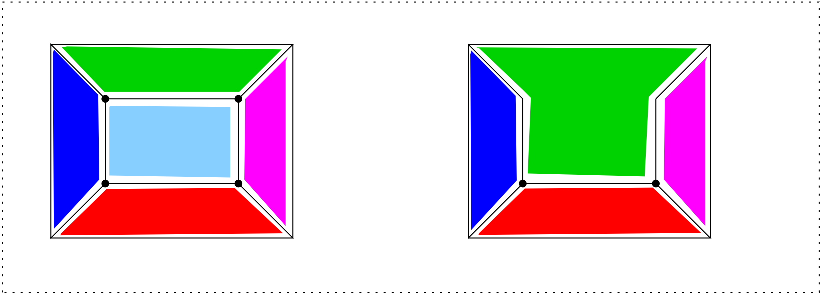
• **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



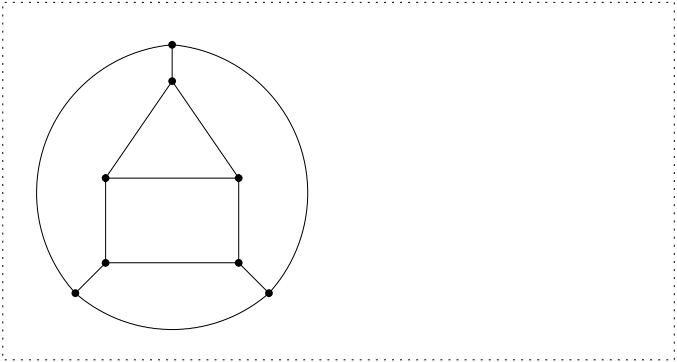
• **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**



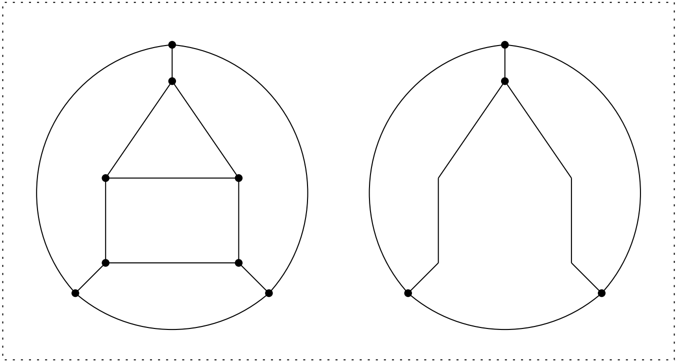
- **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**



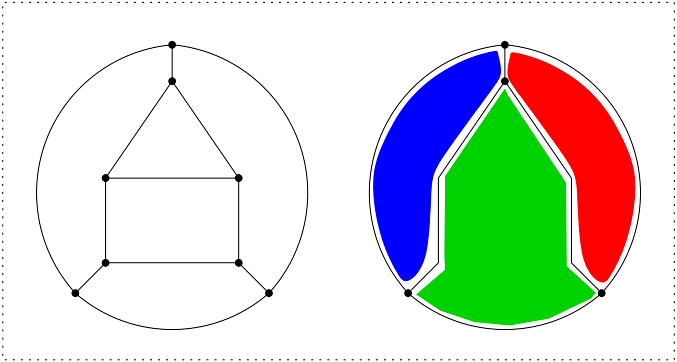
• **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**



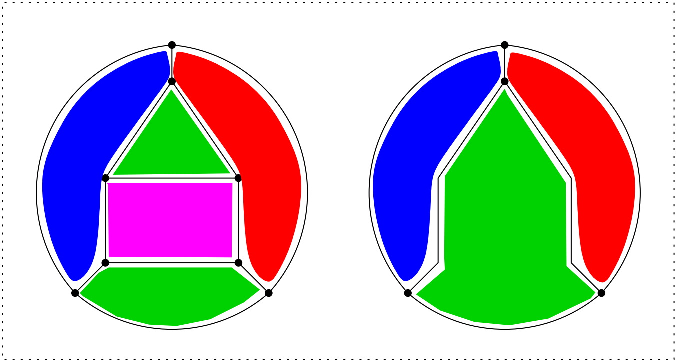
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



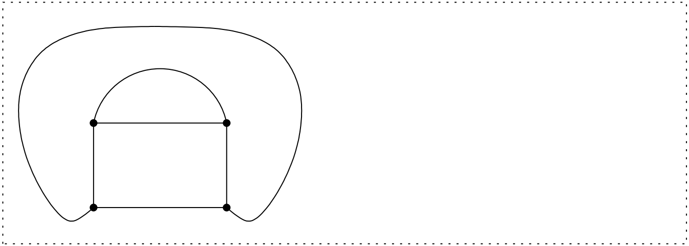
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



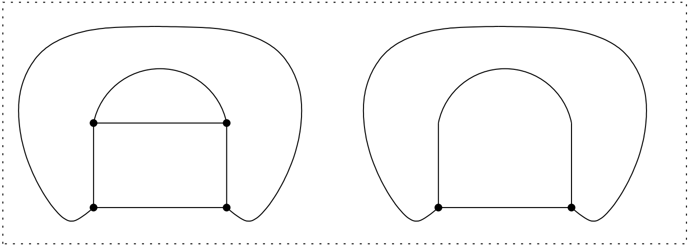
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



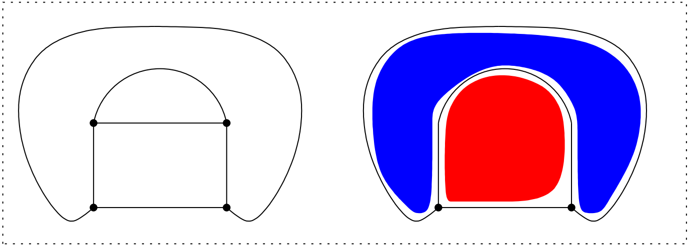
- **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**



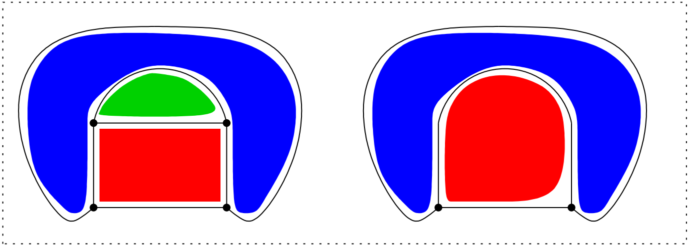
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



- **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**

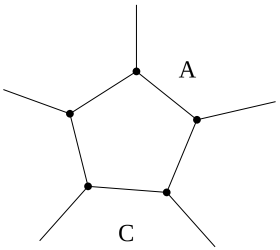


- **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**

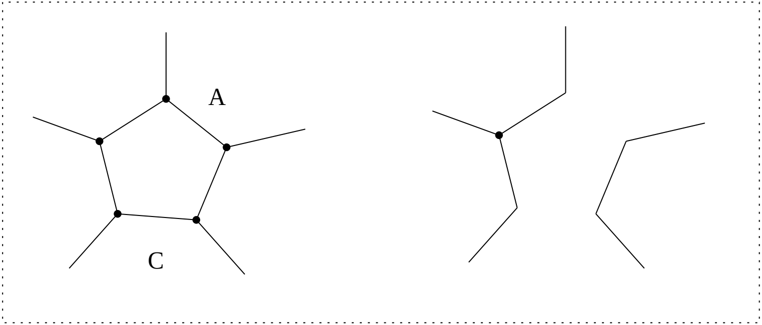


• **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes

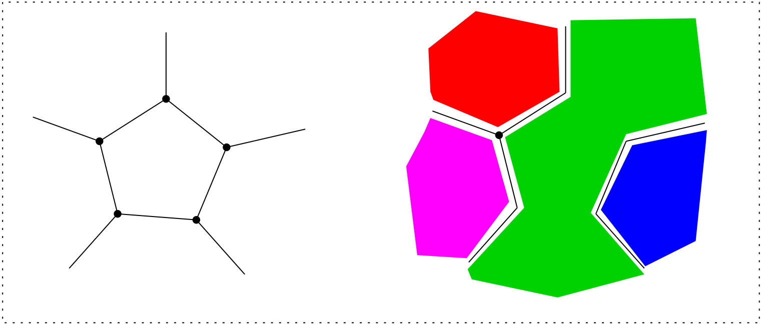


• **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**
Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



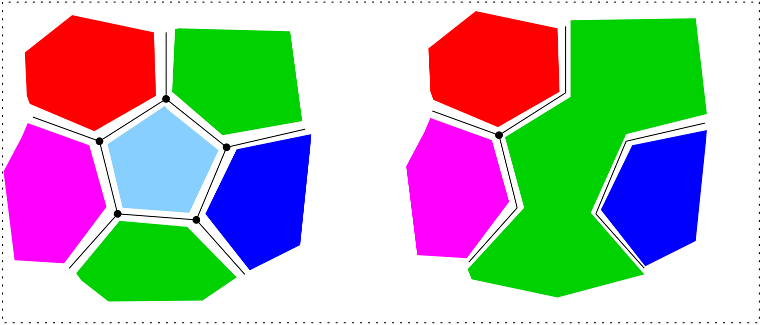
• **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



• Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



K. Appel, W. Haken (1976)

Quatre couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

La preuve originale de K. Appel et W. Haken utilisait quant à elle près de 2000 configurations inévitables.

Le nombre de configurations à considérer est de l'ordre de 600 pour la preuve fournie par N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour et R. Thomas (1996).

Le *genre* d'une surface est un invariant topologique. Il s'agit du nombre maximum de courbes simples fermées que l'on peut tracer sur la surface sans la disconnecter.

FORMULE D'HEAWOOD (1980)

Si un graphe peut être représenté de manière planaire sur une surface de genre g, alors ses faces peuvent être colorées avec c_g couleurs où

$$c_g = \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48\,g}) \right\rfloor .$$

La partie délicate consiste à montrer qu'il existe effectivement un graphe nécessitant ce nombre de couleurs.

Pour $g = 0, 1$, on retrouve le théorème des 4 et des 7 couleurs.

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_g	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14

TAB.: Les première valeurs de c_g.

DÉFINITIONS

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté ayant n sommets.

$m_{k,G}$ = nombre de coloriages propres distincts de G utilisant **exactement** k couleurs

$z^{\underline{k}} = z\,(z-1)\cdots(z-k+1)$.

Le polynôme chromatique de G est donné par

$$\begin{aligned}\pi_G(z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,G}}{i!}\, z^{\underline{i}} \\ &= \frac{m_{1,G}}{1!}\, z + \frac{m_{2,G}}{2!}\, z(z-1) + \frac{m_{3,G}}{3!}\, z(z-1)(z-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{m_{n,G}}{n!} z(z-1)\cdots(z-n+1).\end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n en la variable z.

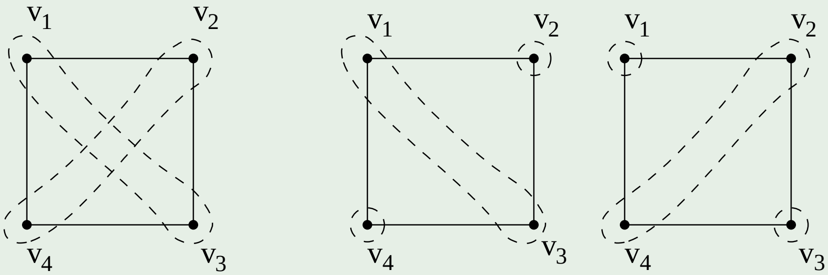
Remarque

$$\frac{m_{k,G}}{k!}$$

est le nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriages propres possibles de G utilisant exactement k couleurs.

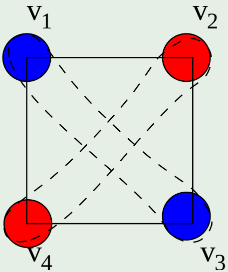
En fait, cette quantité équivaut au *nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) de sommets indépendants*.

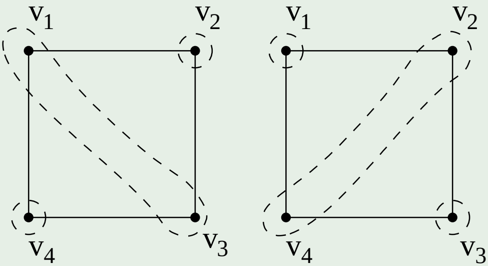
Exemple



$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

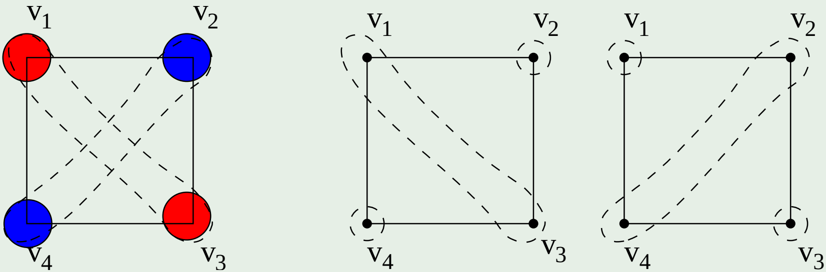
EXEMPLE





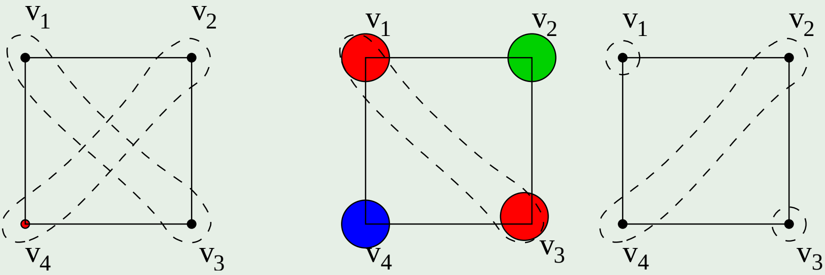
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$, $m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



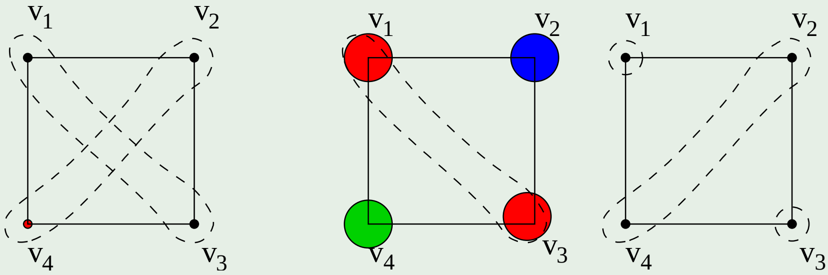
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



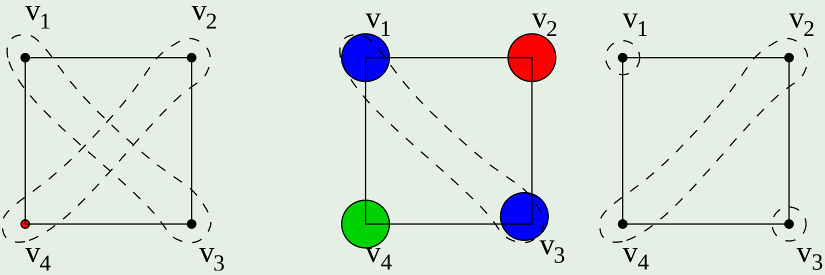
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $\quad m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



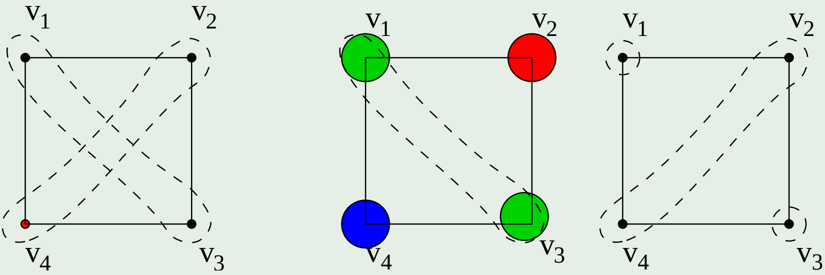
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $\quad m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



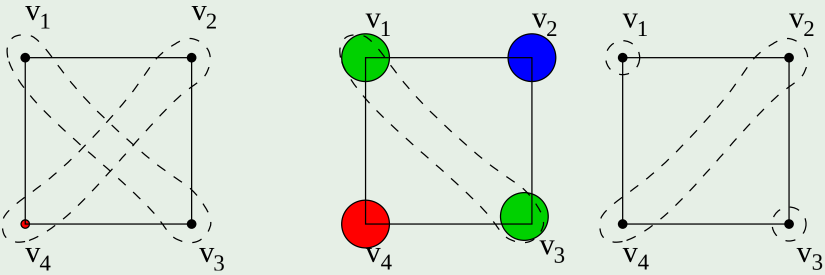
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



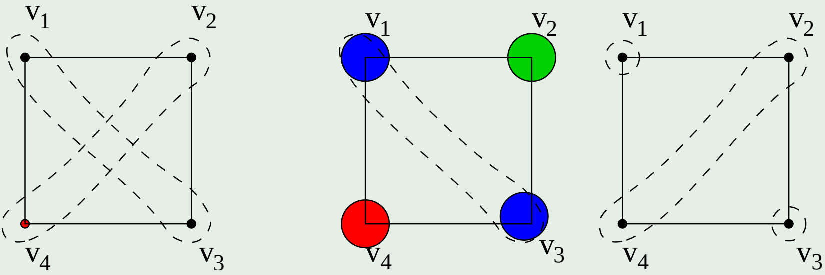
$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $\quad m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $\quad m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$, $m_{4,G}/4! = 1$

Exemple



$m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$, $\quad m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$,
$m_{4,G}/4! = 1$

$$\underbrace{m_{1,G}}_{=0} z + \underbrace{\frac{m_{2,G}}{2!}}_{=1} z(z-1) + \underbrace{\frac{m_{3,G}}{3!}}_{=2} z(z-1)(z-2) + \underbrace{\frac{m_{4,G}}{4!}}_{=1} z(z-1)(z-2)(z-3$$

ou encore

$$\pi_G(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 3z.$$

Pour le graphe complet K_n

les seuls ensembles de sommets indépendants sont les singletons. Ainsi, pour tout $k < n$,

$$\frac{m_{k,K_n}}{k!} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_{K_n}(z) = z^{\underline{n}}.$$

- Si G possède n sommets, alors $m_{n,G} = n!$ car on assigne une couleur par sommet. On en déduit que le polynôme chromatique est monique.
- Si G n'est pas connexe mais possède 2 composantes G_1 et G_2, alors
$$\pi_G(z) = \pi_{G_1}(z).\pi_{G_2}(z).$$
Cela résulte du fait que les sommets de G_1 peuvent être colorés indépendamment de ceux de G_2.
- Il est clair que $\pi_G(0) = 0$ pour tout graphe G.

Proposition

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le nombre $\pi_G(k)$ est le nombre de coloriages propres de G utilisant au plus k couleurs.

Suite de l'exemple

$\pi_G(4) = 84$ et donc, il y est possible de colorier proprement G avec au plus 4 couleurs de 84 façons distinctes

Inutile de considérer les termes d'exposant $> k$,

$$\pi_G(k) = \sum_{i=1}^{\mathbf{k}} \frac{m_{i,G}}{i!} z^{\underline{i}}.$$

Un coloriage propre de G avec $i \leq k$ couleurs choisies parmi $\{1, \ldots, i\}$ donne lieu à des coloriages propres avec i couleurs choisies parmi $\{1, \ldots, k\}$.

On dispose de $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles de sommets indépendants.

Pour chaque partition $C_1 \cup \cdots \cup C_i$ de V,

- à C_1, on peut choisir une couleur parmi k couleurs,
- à C_2, on peut choisir une couleur parmi $k - 1$ couleurs,
- ...
- à C_i, on peut choisir une couleur parmi $k - i + 1$ couleurs.

Ainsi, chacune des $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles donnent $k^{\underline{i}}$ coloriages utilisant exactement i des k couleurs disponibles.

Suite de l'exemple

le nombre de coloriages du graphe utilisant au plus 3 couleurs vaut

$$\pi_G(3) = \underbrace{m_{1,G}}_{=0} 3 + \frac{m_{2,G}}{2!} 3.2 + \frac{m_{3,G}}{3!} 3.2.1 = 0 + 6 + 2.6 = 18.$$

Ces coloriages sont donnés par

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	2
2	1	2	1
1	3	1	3
3	1	3	1
2	3	2	3
3	2	3	2

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	3
1	3	1	2
2	1	2	3
2	3	2	1
3	1	3	2
3	2	3	1

v_1	v_2	v_3	v_4
2	1	3	1
3	1	2	1
1	2	3	2
3	2	1	2
1	3	2	3
2	3	1	3

Corollaire

Le nombre chromatique de G est le plus petit k tel que $\pi_G(k) \neq 0$.

Une formule “à la Cayley”

Si e est une arête de G (qui n’est pas une boucle), alors le polynôme chromatique satisfait la relation

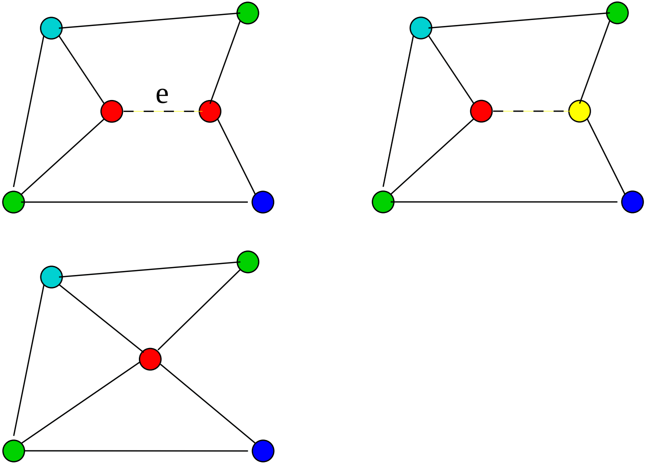
$$\pi_G(z) = \pi_{G-e}(z) - \pi_{G\cdot e}(z).$$

Si on considère tous les coloriages propres de $G - e$ avec exactement k couleurs. Il y en a de deux types :

- ceux pour lesquels on assigne aux extrémités de e une même couleur
- (resp. deux couleurs distinctes)

Ceux du premier type sont en bijection avec les coloriages propres de $G \cdot e$ utilisant k couleurs.

Ceux du second type sont en bijection avec les coloriages propres de G utilisant k couleurs.


e

Corollaire

Le polynôme chromatique d'un arbre T à n sommets vaut

$$\pi_T(z) = z\,(z-1)^{n-1}.$$

Récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat.

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 1$ et vérifions-le pour $n + 1$.

Si un arbre possède $n + 1$ sommets, il a au moins un sommet de degré 1 et soit e, l'arête incidente à ce sommet.

$T - e$ possède deux composantes :

- un sommet isolé dont le polynôme chromatique vaut z
- un arbre à n sommets (qui n'est autre que la contraction $T \cdot e$) de polynôme chromatique $z(z-1)^{n-1}$ (par hypothèse de récurrence)

$$\pi_{T-e}(z) = z\,\pi_{T \cdot e}(z).$$

Par la proposition précédente,

$$\pi_T(z) = \pi_{T-e}(z) - \pi_{T \cdot e}(z) = (z-1)\,\pi_{T \cdot e}(z) = z(z-1)^n.$$

Théorème de Ramsey

Etant donné un entier s, existe-t-il un entier n (dépendant de s) tel pour tout coloriage des arêtes de K_n avec deux couleurs, K_n contient un sous-graphe K_s formé d'arêtes d'une même couleur ?

Il n'est pas évident qu'*a priori* cette question possède une solution.

Applications...

théorie des nombres, analyse harmonique, géométrie...

V. Rosta, *Ramsey Theory Applications*, `http ://www.combinatorics.org/Surveys/ds13.pdf`

Nous allons définir le nombre $R(s,t)$ comme étant le plus petit n tel que K_n contienne une copie de K_s rouge ou une copie de K_t bleue. Il nous faudra bien sûr **montrer que ces nombres existent**

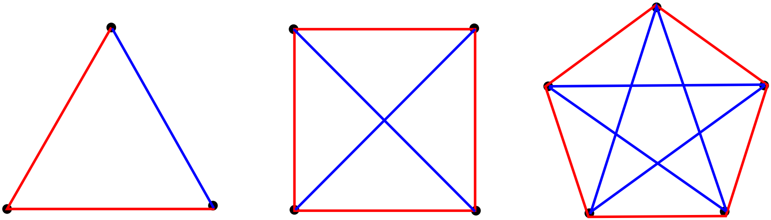
Théorème de Ramsey (1930)

Il existe un plus petit entier $R(s,t)$ tel que pour tout $n \geq R(s,t)$, tout coloriage de $K_n = (V,E)$, $c : E \to \{\mathcal{R}, \mathcal{B}\}$, est tel que G contient une copie de K_s colorée en $\mathcal{R}$ ou une copie de K_t colorée en $\mathcal{B}$.

$R(s,t) = R(t,s)$

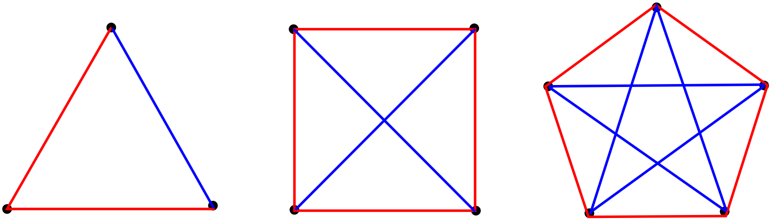
$R(s,2) = R(2,s) = s$: dans tout coloriage des arêtes de K_s, au moins une arête est bleue ou alors elles sont toutes rouges et aucune valeur inférieure à s ne peut convenir.

$R(3,3) > 5$



Pour vérifier que $R(3,3) = 6$, il faut passer en revue tous les coloriages de K_6 et s'assurer qu'ils contiennent tous une copie de K_3 monochromatique !

$R(3,3) > 5$



Pour vérifier que $R(3,3) = 6$, il faut passer en revue tous les coloriages de K_6 et s’assurer qu’ils contiennent tous une copie de K_3 monochromatique !

K_n contient C_n^2 arêtes pouvant chacune être coloriée en rouge ou en bleu. Le tableau suivant reprend le nombre de coloriages possibles des arêtes de K_n pour les première valeurs de n,

n	$2^{\mathrm{C}_n^2}$
3	8
4	64
5	1024
6	32768
7	2097152
8	268435456
9	68719476736
10	35184372088832
11	36028797018963968
12	73786976294838206464
13	302231454903657293676544
14	2475880078570760549798248448

Théorème d'Erdös–Szekeres (1935)

Pour tous $s, t \geq 2$, le nombre $R(s, t)$ existe.

De plus, on a

$$R(s, t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$$

et si $s, t \geq 3$, alors

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

Par récurrence sur $s + t$.

$R(2, t)$ et $R(s, 2)$ existent toujours.

Donc, $R(s, t)$ existe si $s + t \leq 5$ ($4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 3$ ou $5 = 3 + 2$).

Supposons que $R(s, t)$ existe pour tous s, t tels que $s + t < N$ et montrons que $R(s, t)$ existe pour $s + t = N$, avec $N \geq 6$.

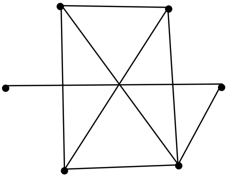
Si $s = 2$ ou $t = 2$, le résultat est démontré. Nous pouvons donc supposer $s, t \geq 3$.

Il nous suffit de trouver un entier n tel que tout coloriage de K_n contient toujours une copie de K_s rouge ou de K_t bleue. De cette manière, on aura majoré $R(s, t)$.

Thèse : tout graphe à $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$ sommets contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s ou
- un ensemble de t sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc., $R(s-1, t)$ et $R(s, t-1)$ existent.

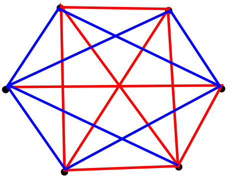


Il nous suffit de trouver un entier n tel que tout coloriage de K_n contient toujours une copie de K_s rouge ou de K_t bleue. De cette manière, on aura majoré $R(s,t)$.

Thèse : tout graphe à $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ sommets contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s ou
- un ensemble de t sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc., $R(s-1,t)$ et $R(s,t-1)$ existent.



Soit v un sommet de G,

$$A_v = V \setminus (\nu(v) \cup \{v\})$$

ensemble des sommets $\neq v$ et non-voisins de v.

$$\#V \setminus \{v\} = n - 1 = R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$$

$$\#\nu(v) \geq R(s-1,t) \quad \text{ou} \quad \#A_v \geq R(s,t-1).$$

En effet, $\nu(v)$ et A_v partitionnent $V \setminus \{v\}$
donc $\#\nu(v) + \#A_v = \#V \setminus \{v\}$.

Sinon, $\#\nu(v) \leq R(s-1,t) - 1$ et $A_v \leq R(s,t-1) - 1$
donc $\#\nu(v) + \#A_v \leq n - 2$, impossible !

- Si $\#\nu(v) \geq R(s-1,t)$.

Par définition de $R(s-1,t)$, le sous-graphe de G induit par $\nu(v)$ contient

- un sous-graphe B isomorphe à K_{s-1} ou
- un ensemble de sommets indépendants de taille t.

Dans le premier cas, le sous-graphe induit par $B \cup \{v\}$ est isomorphe à K_s (car v est adjacent à tous les sommets de B).

Dans le second cas, on dispose directement d'un sous-ensemble de sommets indépendants de taille t.

• Si $\#A_v \geq R(s, t-1)$.

Par définition de $R(s, t-1)$, le sous-graphe de G induit par A_v contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s (ce qui suffit) ou
- un ensemble C de sommets indépendants de taille $t-1$.

Dans ce cas, $C \cup \{v\}$ est un ensemble de sommets indépendants de taille t (v n'est adjacent à aucun sommet de C).

Thèse : $R(s,t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$

Par récurrence sur $s+t$. Pour $s=2$ (ou $t=2$),

$$\underbrace{R(2,t)}_{=t} \leq \underbrace{\mathrm{C}_{t}^{1}}_{=t}.$$

Supposons que $R(s,t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$ pour tous s,t tels que $s+t<N$ et vérifions-le pour $s+t=N$.

Une fois encore, nous pouvons supposer $s,t \geq 3$.

Par la première partie de la preuve et en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$R(s,t) \leq R(s-1,t)+R(s,t-1) \leq \mathrm{C}_{s+t-3}^{s-2}+\mathrm{C}_{s+t-3}^{s-1}.$$

On conclut par la formule du triangle de Pascal.

Remarque

La détermination précise de $R(s, t)$ est extrêmement complexe (il est difficile d'un point de vue combinatoire d'énumérer tous les coloriages de K_n).

Par exemple, la détermination de $R(3, 3)$ date de 1955, alors que l'estimation de $R(3, 12)$ reprise ci-contre date de 2001.

j	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R(3, j)$	6	9	14	18	23	28	36	$[40, 43]$	$[46, 51]$	$[52, 59]$

"Small Ramsey Number, S. P. Radziszowski",
`http ://www.combinatorics.org/Surveys/ds1.pdf`
donne un état de l'art en la matière.