

# THÉORIE DES GRAPHS (5)

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>

Année 2007–2008



Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté.

$\mathcal{A}_G$  : algèbre (sur  $\mathbb{C}$ ) des polynômes en la matrice d'adjacence de  $G$  : **algèbre d'adjacence** de  $G$ .

## RAPPEL

Une algèbre  $A$  sur  $\mathbb{K}$

- ▶  $A$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$  et  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times A \rightarrow A$
- ▶ produit "raisonnable"  $\cdot$  :  $A \times A \rightarrow A$

## PROPOSITION

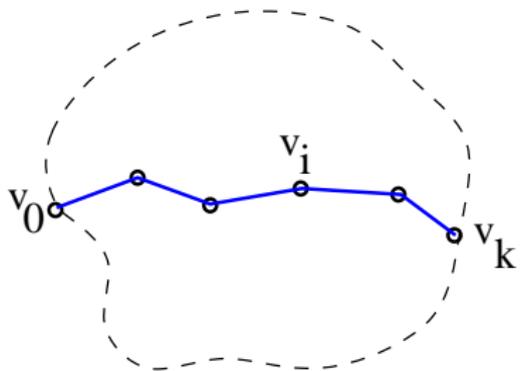
Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté connexe.  
 $A(G)$  matrice d'adjacence et  $\mathcal{A}_G$  algèbre d'adjacence.

Si  $\text{diam}(G) = k$ , alors  $\dim \mathcal{A}_G \geq k + 1$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux sommets réalisant le diamètre de  $G$

$$\{a = v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k = b\}$$

un chemin de longueur  $k$  réalisant ce diamètre (en particulier, les  $v_i$  sont tous distincts).



$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ , il existe **un chemin de longueur  $i$**  joignant  $v_0$  à  $v_i$  mais aucun chemin de longueur inférieure.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $A^i$  (resp.  $A^j$ ,  $0 \leq j < i$ ) contient une entrée  $> 0$  (resp.  $= 0$ ) pour l'entrée correspondant à  $v_0, v_i$ .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} * & \geq 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & * & \geq 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^k = \begin{pmatrix} * & * & * & \geq 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$I, A, \dots, A^k$  sont linéairement indépendants

$\mathcal{A}_G$  contient  $\geq k + 1$  éléments lin. indépendants.

Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté connexe ayant  $A(G) = A$  comme matrice d'adjacence.

Puisque  $A(G)$  est **diagonalisable** (car symétrique),

- ▶ son polynôme minimum ne possède que des zéros simples
- ▶ son degré est égal au nombre de valeurs propres distinctes de  $G$ .

Si le polynôme minimum de  $A$  est de **degré  $d$** ,  
alors relation linéaire liant  $A^d, A^{d-1}, \dots, I$ .  **$\dim \mathcal{A}_G \leq d$** .

## COROLLAIRE

Soit  $G = (V, E)$ , un multi-graphe non orienté connexe  
 $A(G)$  matrice d'adjacence et  $\mathcal{A}_G$  algèbre d'adjacence.

Si  $\text{diam}(G) = k$ , alors  $G$  a au moins  $k + 1$  valeurs propres distinctes.

## PROPOSITION

Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe non orienté  $k$ -régulier. Alors

- ▶  $k$  est une valeur propre de  $G$ ,
- ▶ pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $G$ , on a  $|\lambda| \leq k$ ,
- ▶ si  $G$  est connexe,  $k$  est valeur propre simple (i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

## REMARQUE

Proposition OK dans le cas **orienté**.

Remplacer “connexe” par **f. connexe**.

1.  $(1, \dots, 1)$  est un vecteur propre de  $A(G)$  de valeur propre  $k$ .

2. considérons une valeur propre  $\lambda$  de  $A(G)$  ayant  $y \neq 0$  comme vecteur propre.

Soit  $y_j$  une composante de  $y$  de module maximum. On a

$$|\lambda| |y_j| = |[A(G)y]_j| \leq \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} |y_i| \leq |y_j| \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} = k |y_j|$$

et donc,  $|\lambda| \leq k$ .

3.  $G$  est connexe,  $A(G)$  est irréductible. Utiliser le **thm. de Perron-Frobenius**. La matrice  $A(G)$  possède une unique valeur propre réelle dominante et vu 2, il s'agit de  $k$ .

$J_n = J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Si on dispose d'un graphe  $k$ -régulier, alors

$$A(G).J = kJ = J.A(G).$$

## THÉORÈME DE HOFFMAN (1963)

$J \in \mathcal{A}_G$  SSI  $G$  est un multi-graphe (non orienté) connexe et régulier.

$\Rightarrow J \in \mathcal{A}_G$ . Puisque  $J$  est un polynôme de  $A(G) = A$ ,  $AJ = JA$ .  
On a

$$(AJ)_{i,j} = \deg(v_i) \quad \text{et} \quad (JA)_{i,j} = \deg(v_j).$$

Par conséquent,  $G$  est régulier.

Vérifier que  $G$  est connexe ?

**P.A.** Sinon, il existerait 2 sommets  $v_i$  et  $v_j$  qui ne seraient joints par aucun chemin de longueur  $\ell \geq 0$  :  $[A(G)^\ell]_{i,j} = 0$

Cette relation restant valable pour tout polynôme en  $A(G)$ ,  
conclusion :  $J \notin \mathcal{A}(G)$  !

⇐ Supposons  $G$  connexe et  $k$ -régulier.

Par la prop. préc.,  $k$  est une valeur propre de  $A(G)$  et le polynôme minimum de  $A(G)$  (qui ne possède que des zéros simples) est de la forme

$$\mathcal{M}(\lambda) = (\lambda - k) q(\lambda) \text{ avec } q(k) \neq 0.$$

En évaluant ce polynôme en  $A$ , on obtient

$$A q(A) = k q(A).$$

- Chaque colonne de  $q(A)$  est vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $k$ .
  - Puisque  $G$  est connexe,  $k$  est une **valeur propre simple** donc chaque colonne de  $q(A)$  est un multiple de  $(1, \dots, 1)^\top$ .
  - Puisque  $A$  est symétrique,  $q(A)$  aussi et donc toutes les colonnes de  $q(A)$  sont égales à un même multiple de  $(1, \dots, 1)^\top$ .
- Conclusion :  $q(A)$  est un multiple de  $J$  et donc  $J \in \mathcal{A}_G$ .

A symétrique (hermitienne) n'a que des v.p. réelles

## COROLLAIRE

Soit  $G$  un multi-graphe non orienté connexe et  $k$ -régulier possédant  $n$  sommets et ayant  $k = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$  comme valeurs propres distinctes. Si

$$q(\lambda) = \prod_{i=2}^s (\lambda - \lambda_i), \text{ alors } J = \frac{n}{q(k)} q(A(G)).$$

preuve précédente,  $q(A) = \alpha J$ .

Les valeurs propres de  $q(A)$  sont les  $q(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Si  $i \neq 1$ , alors  $q(\lambda_i) = 0$ .

- $q(A)$  a comme seule valeur propre non nulle  $q(k)$ .
- $\alpha J$  a pour valeur propre  $\alpha n$ .

On en conclut que  $q(k) = \alpha n$  ou encore que  $1/\alpha = n/q(k)$ .

# SOUS-ARBRE COUVRANT

Rechercher un sous-arbre couvrant d'un graphe (simple) connexe. Ce problème est immédiatement réglé par une *recherche en profondeur*

## RECHERCHE D'UN SOUS-ARBRE COUVRANT

Choisir un sommet  $v_0 \in V$

Visite :=  $\{v_0\}$ , A :=  $\emptyset$

$t := 0$ ,  $j := 1$

Tant que Visite  $\neq V$ , répéter

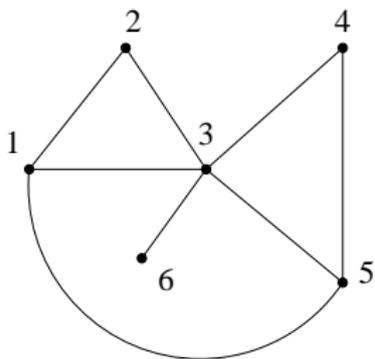
Peut-on choisir un élément  $v_j \in \nu(v_t) \setminus \text{Visite}$ ?

Si un tel choix est impossible,

il existe  $k < t$  maximum tel que  $\{v_k, v_t\} \in E$   
et poser  $t := k$

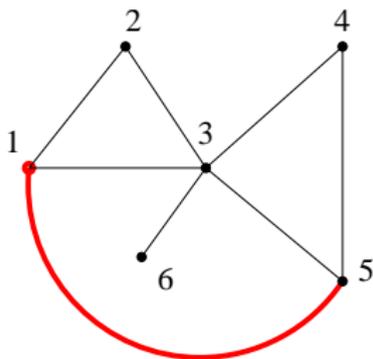
Si un tel choix est possible,

Visite :=  $\{v_0, \dots, v_j\}$ , A :=  $A \cup \{\{v_t, v_j\}\}$ ,  $t := j$   
et  $j := j + 1$



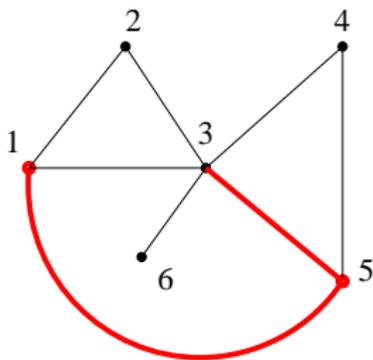
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |



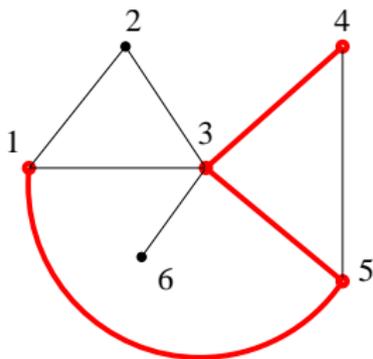
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |



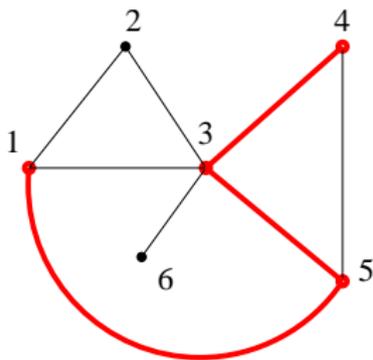
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t | j |
|----------------------|--|---|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0 | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1 | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2 | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3 | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 2 | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4 | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 2 | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5 | 6 |



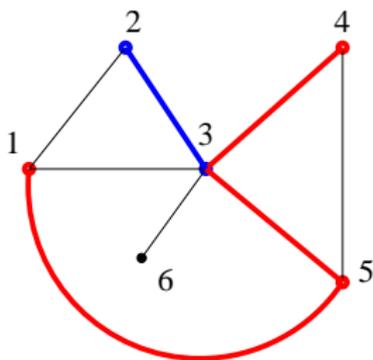
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t | j |
|----------------------|--|---|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0 | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1 | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2 | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3 | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 2 | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4 | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 2 | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5 | 6 |



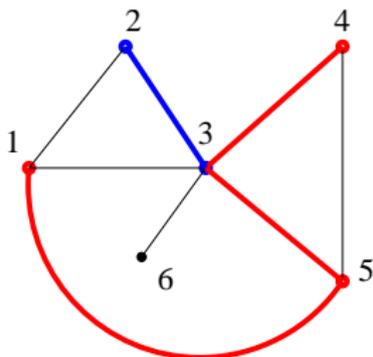
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |



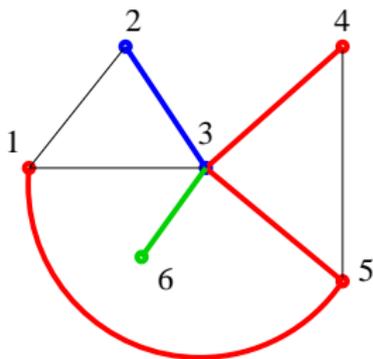
## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |



## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |



## EXAMPLE

| Visite               | A  | t        | j |
|----------------------|--|----------|---|
| $\{v_0 = 1\}$        | $\emptyset$  | 0        | 1 |
| $\{\dots, v_1 = 5\}$ | $\{\{1, 5\}\}$   | 1        | 2 |
| $\{\dots, v_2 = 3\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}\}$                               | 2        | 3 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | 3        | 4 |
| $\{\dots, v_3 = 4\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}\}$                     | <b>2</b> | 4 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | 4        | 5 |
| $\{\dots, v_4 = 2\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}\}$           | <b>2</b> | 5 |
| $\{\dots, v_5 = 6\}$ | $\{\{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}\}$ | 5        | 6 |

## QUESTION

Compter le nombre  $\tau(G)$  de sous-arbres couvrants.

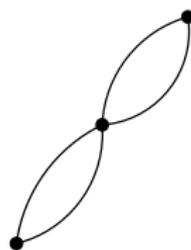
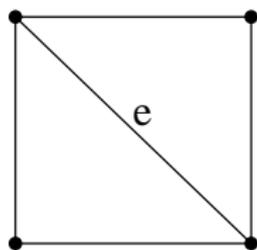
# UNE FORMULE DE CAYLEY

une formule récursive pour obtenir  $\tau(G)$ ...

## DÉFINITION

Soient  $G = (V, E)$  un multi-graphe (non orienté) et  $e \in E$ .

Supprimer l'arête  $e$  et identifier les extrémités de celle-ci, **contraction** de  $G$  (pour l'arête  $e$ ) :  $G \cdot e$ .



## REMARQUE

Si  $G$  est connexe et si  $e$  est une arête qui n'est pas une boucle,  $G \cdot e$  connexe aussi et contient une arête et un sommet de moins que  $G$ .

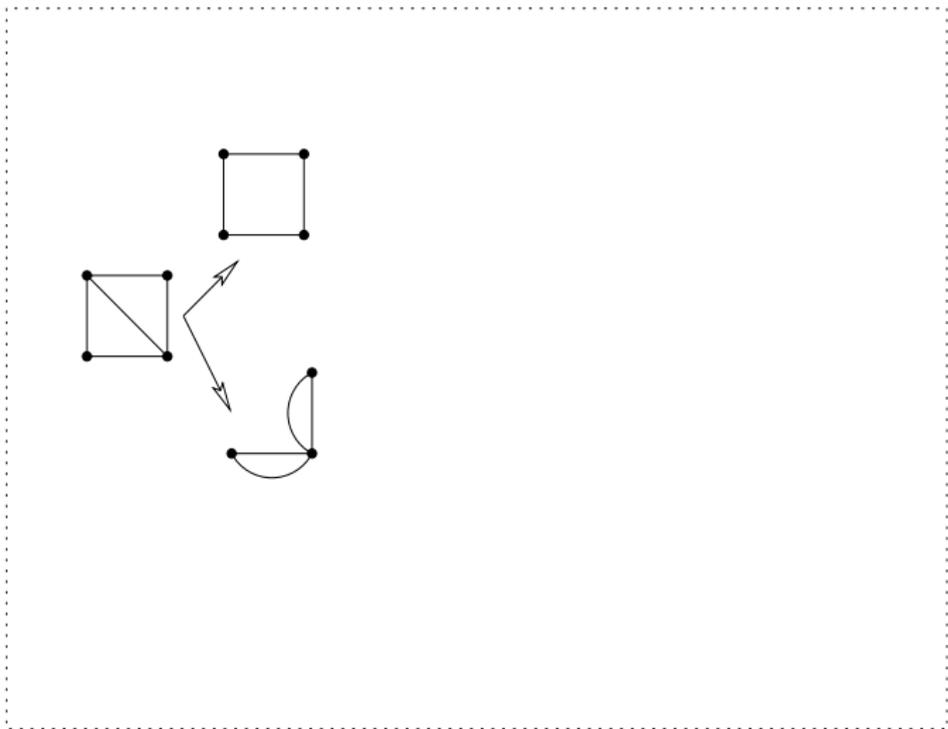
## PROPOSITION (CAYLEY)

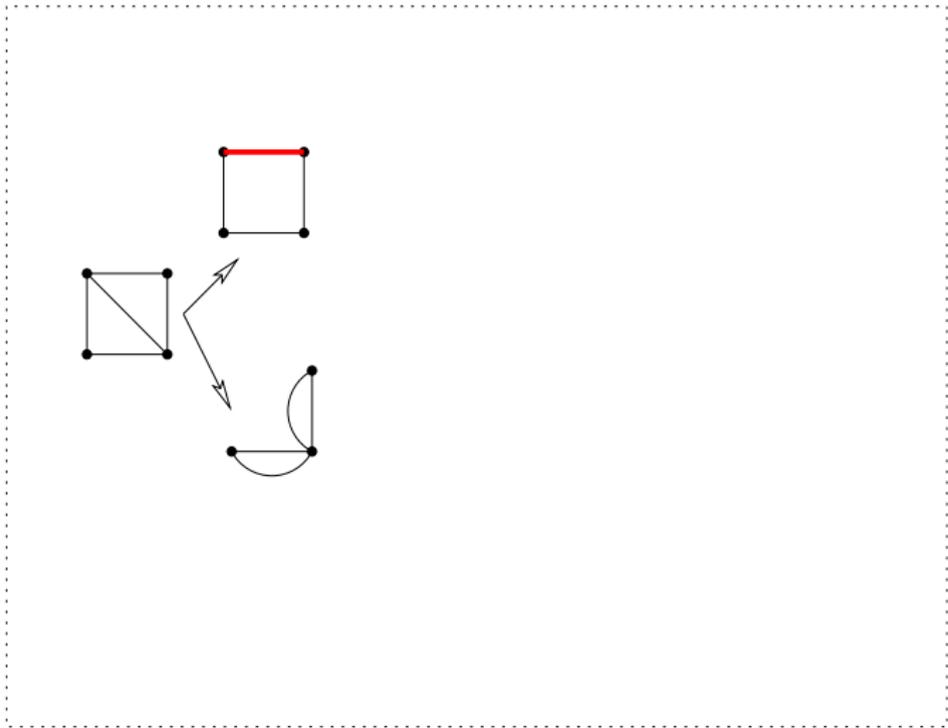
Si  $e$  est une arête (qui n'est pas une boucle) d'un multi-graphe connexe (non orienté), alors

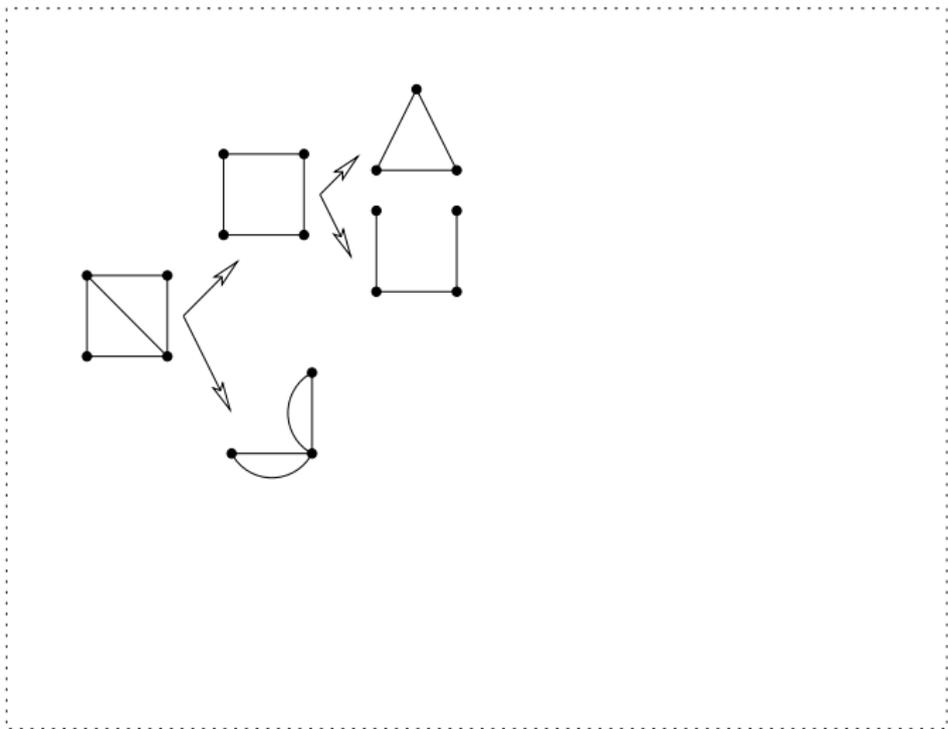
$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

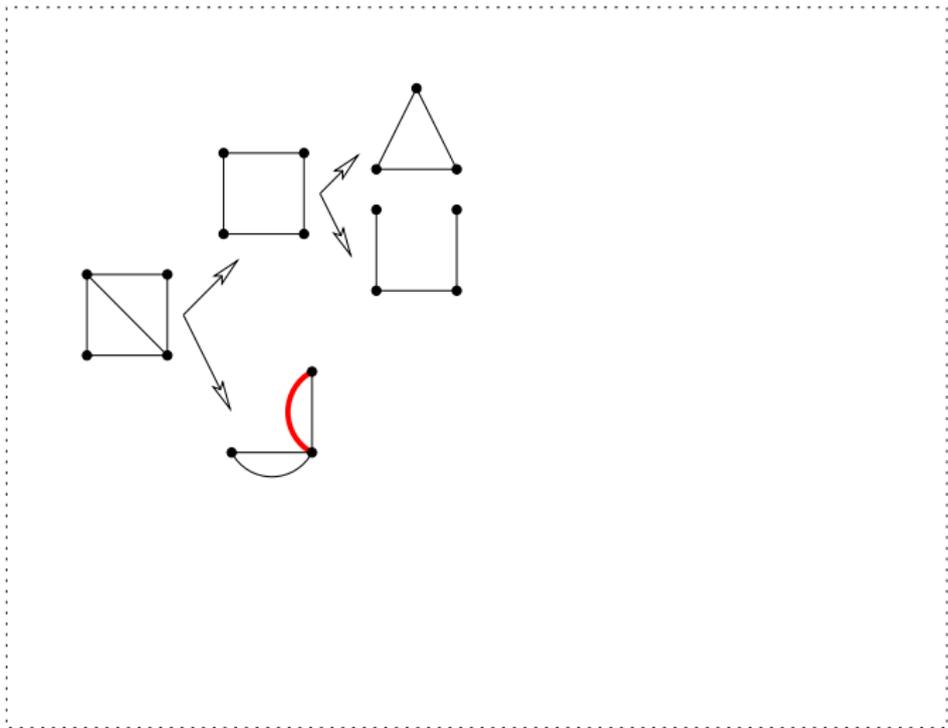
On arrête la procédure lorsque la suppression d'une arête rend le graphe non connexe (autrement dit, lorsqu'on a un "pseudo"-arbre ne tenant pas compte des éventuelles boucles)

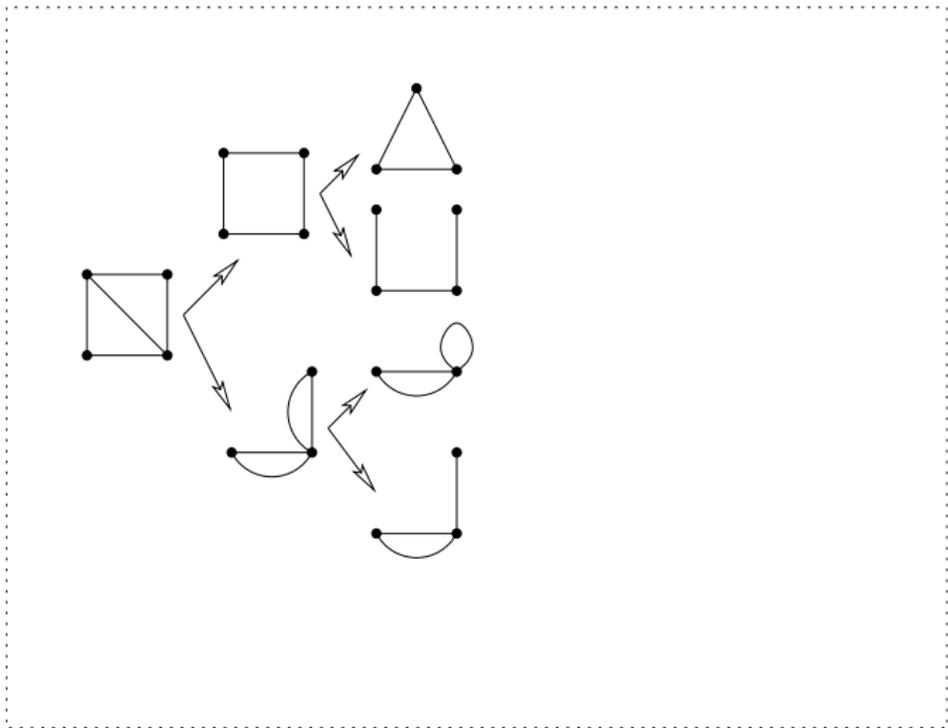


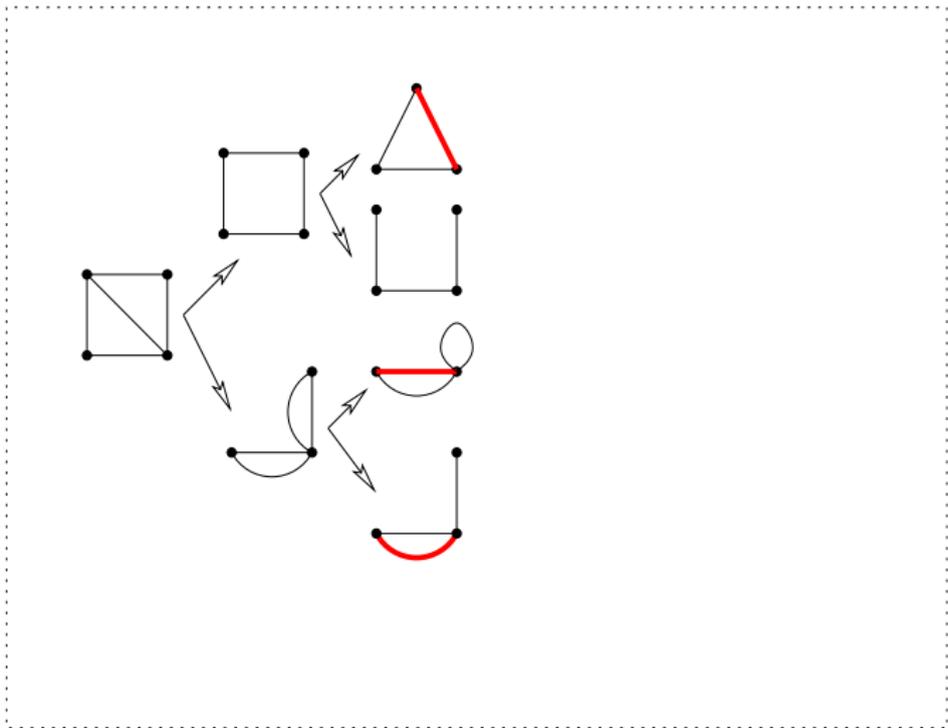


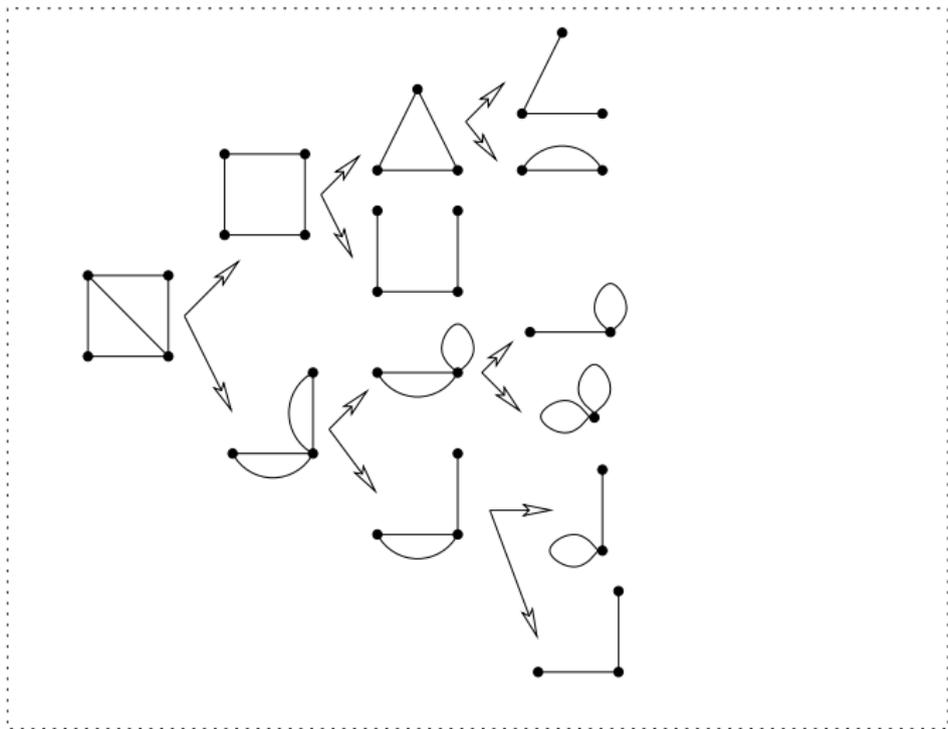






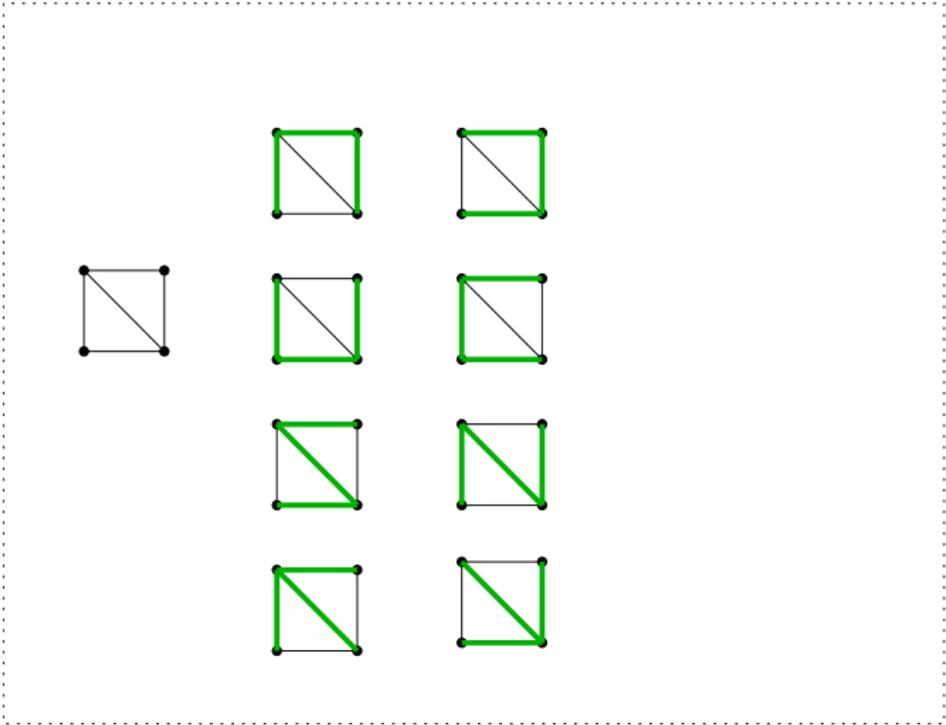












$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Tout sous-arbre couvrant de  $G$  qui ne contient pas  $e$  est aussi un sous-arbre couvrant de  $G - e$ .

$\tau(G - e)$  compte les sous-arbres couvrants de  $G$  qui ne contiennent pas  $e$ .

A chaque sous-arbre couvrant  $A$  de  $G$  qui contient  $e$ , il correspond un sous-arbre couvrant  $A \cdot e$  de  $G \cdot e$  et cette correspondance est une bijection.

$\tau(G \cdot e)$  compte les sous-arbres couvrants de  $G$  qui contiennent  $e$ .

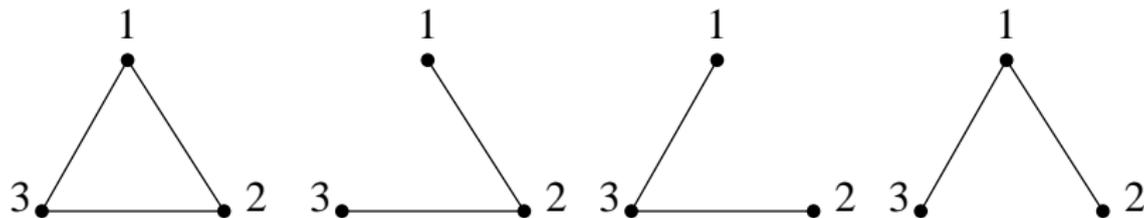
# UNE PREUVE BIJECTIVE

## THÉORÈME (CAYLEY 1897)

Le nombre de sous-arbres couvrants  $K_n$  vaut  $n^{n-2}$ .

(Le nombre d'arbres à  $n$  sommets de labels distincts  $\{1, \dots, n\}$  vaut  $n^{n-2}$ .)

i.e., chaque sommet du graphe est pourvu d'un label.



## REMARQUE

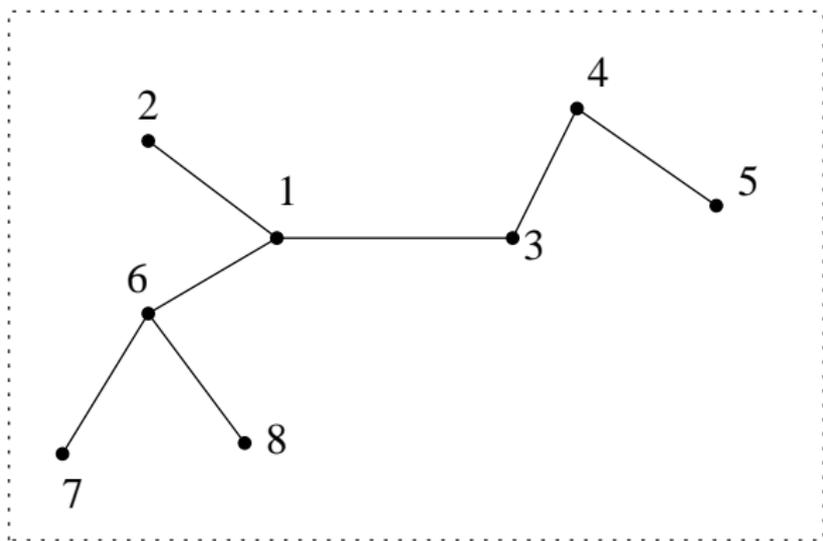
Numérotons les sommets de  $K_n$  de 1 à  $n$ .

Le nombre de sous-arbres couvrant  $K_n$  = nombre d'arbres distincts construits avec des sommets numérotés de 1 à  $n$ .  
Il nous suffit de compter ces arbres.

encodage (i.e., une bijection) d'un arbre  $A$  par une **suite  $s$  de  $n - 2$  symboles appartenant à  $\{1, \dots, n\}$** . Le nombre de telles suites =  $n^{n-2}$ .

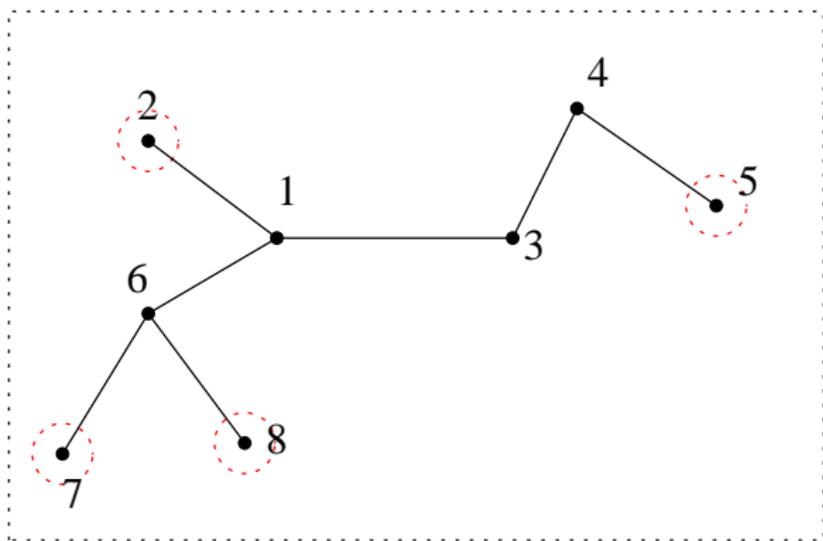
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



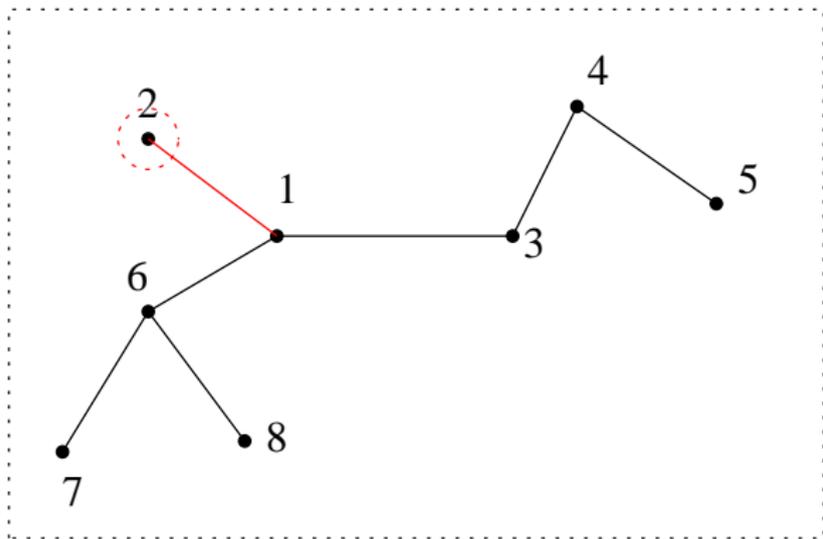
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



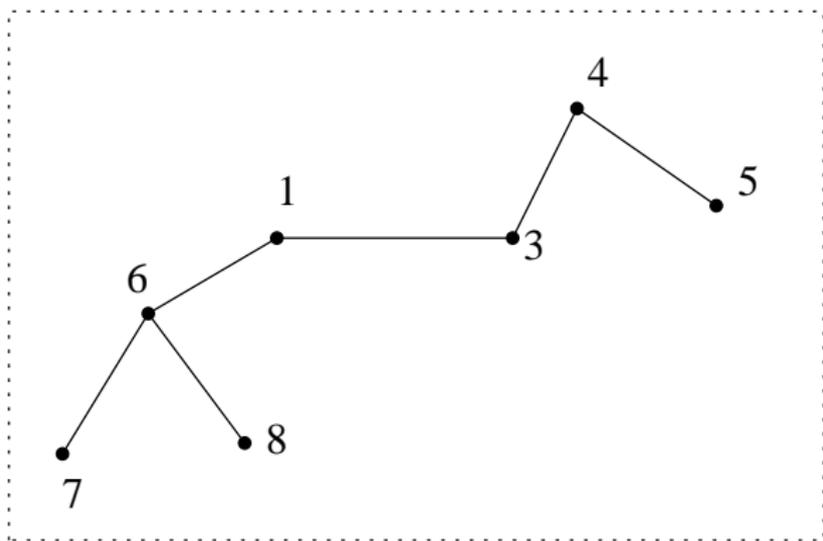
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



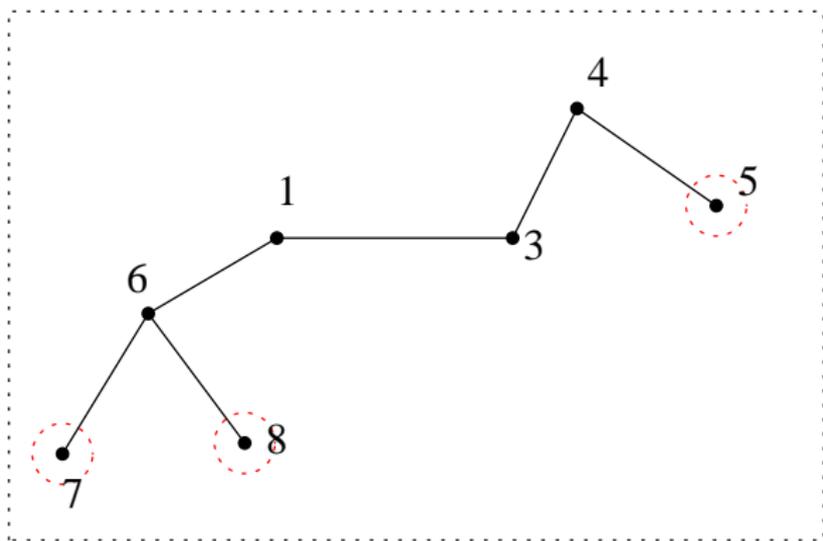
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



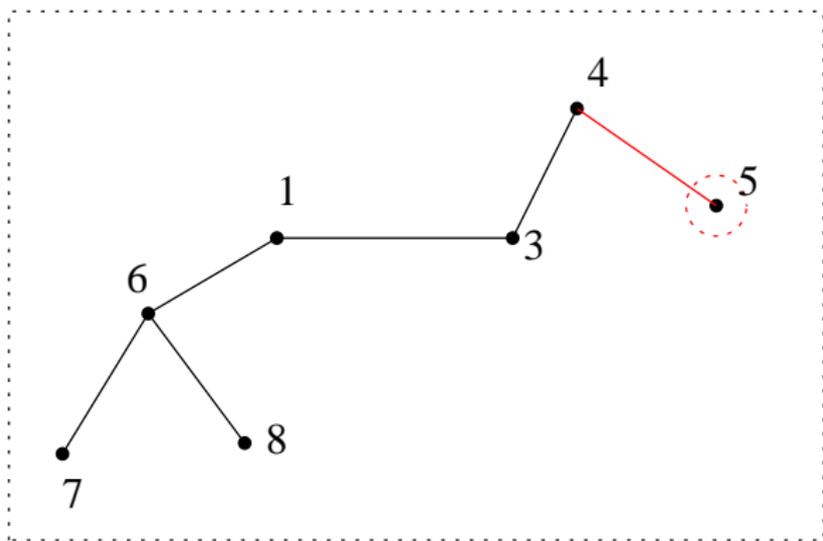
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



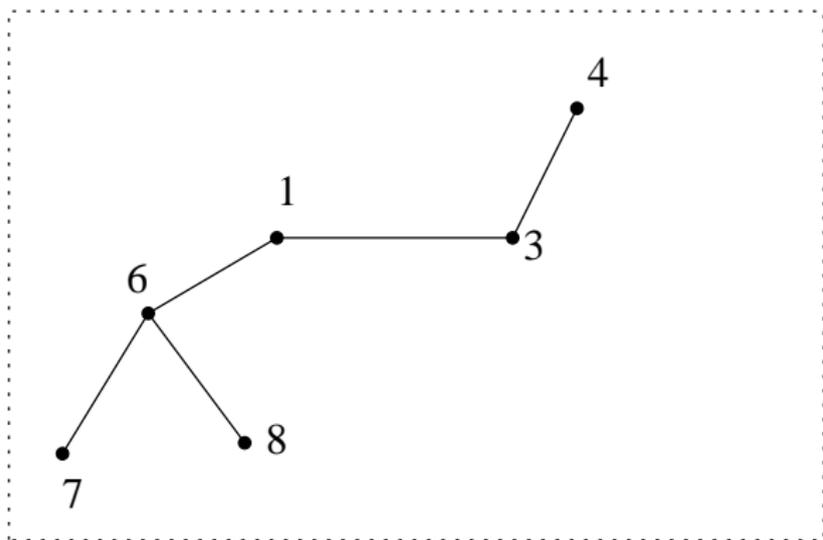
Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

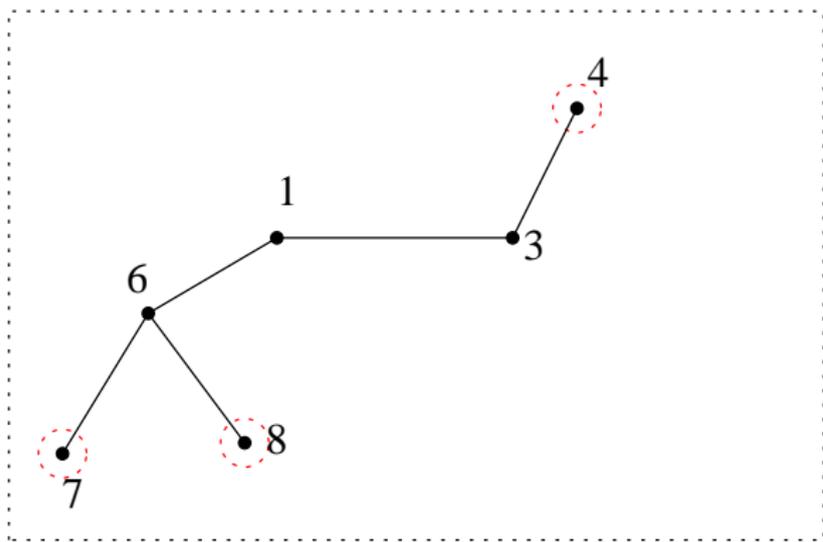
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1,4

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

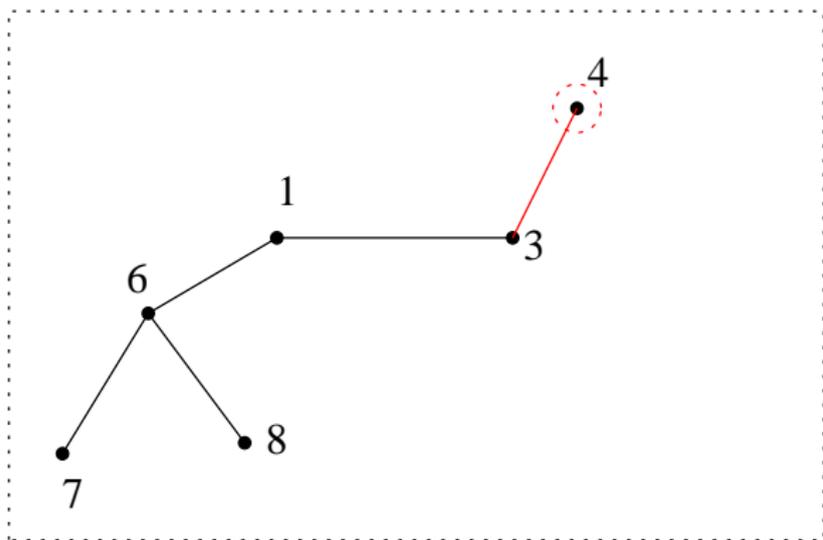
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1,4

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

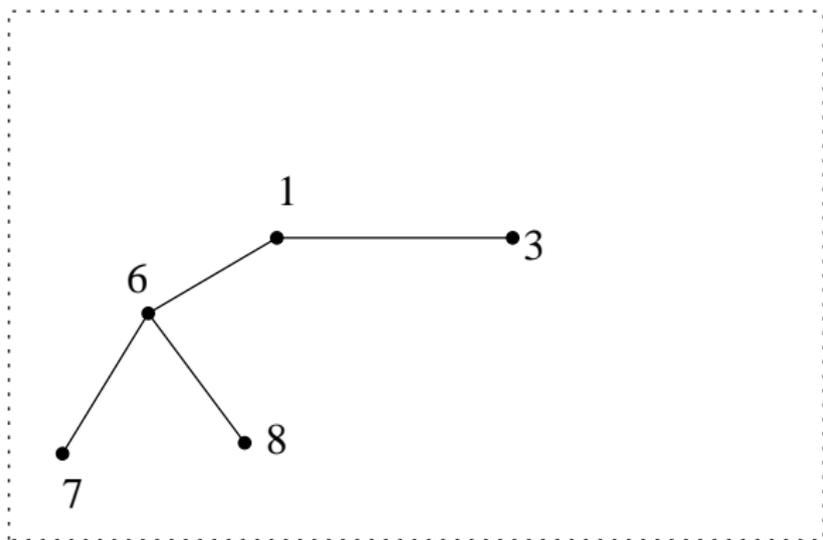
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1,4

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

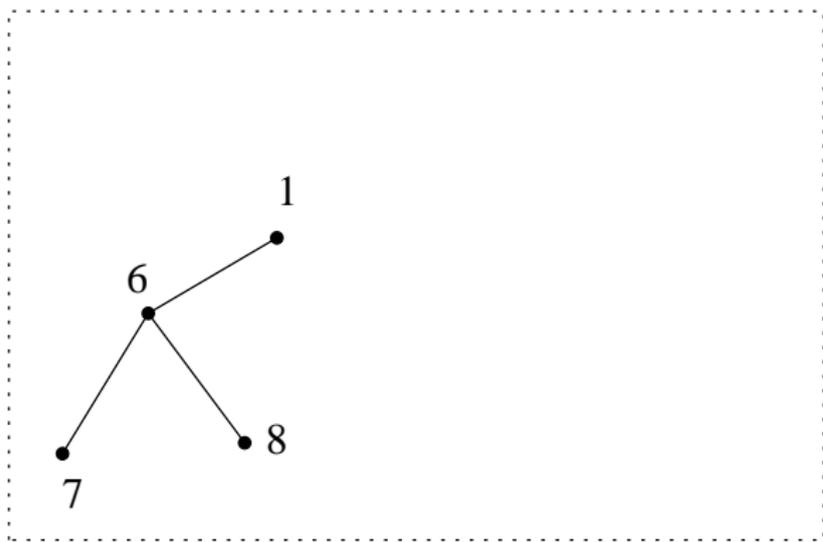
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

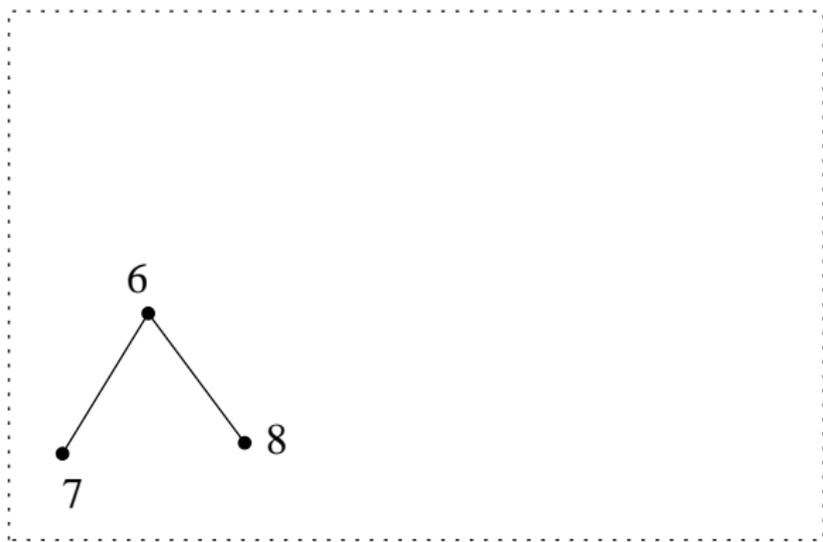
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3, 1

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

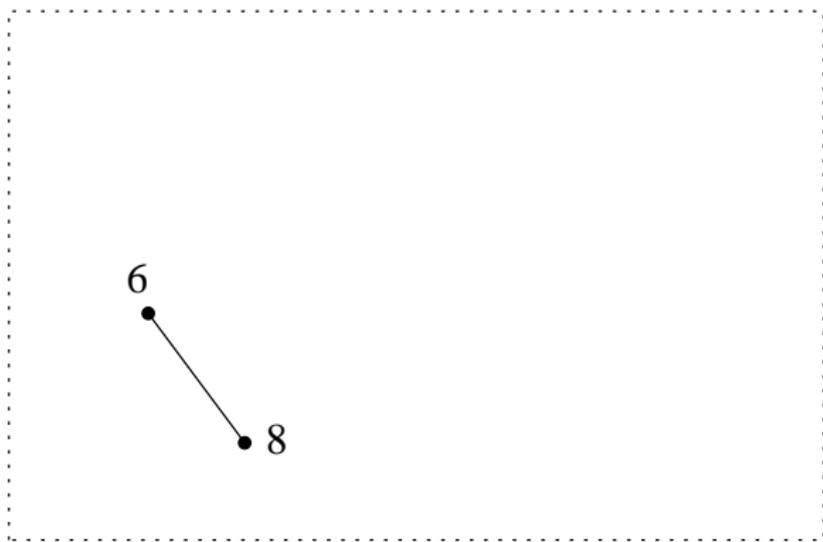
- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3, 1, 6

Pour obtenir le  $j$ -ième élément de  $s$ ,

- ▶ on supprime de  $A$  le plus petit sommet  $a_j$  de degré 1
- ▶ le  $j$ -ième élément de  $s$  est le sommet adjacent à  $a_j$ .



1, 4, 3, 1, 6, 6

# RÉCIPROQUEMENT...

Si on se donne une suite  $s = (s_1, \dots, s_{n-2})$  de  $n - 2$  éléments de  $V = \{1, \dots, n\}$ , il lui correspond un arbre  $A$  à  $n$  sommets dont  $s$  est l'encodage.

## REMARQUE

$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$  est l'ensemble des sommets de degré 1.

Soit  $i_1$  le plus petit élément de  $V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$ . L'arête  $\{i_1, s_1\}$  appartient à  $A$ .

On recommence : soit  $i_2$  le plus petit élément de  $(V \setminus \{i_1\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\}$ . L'arête  $\{i_2, s_2\}$  appartient à  $A$ .

A la fin de la procédure, il reste deux sommets et on ajoute  $A$  l'arête formée par ceux-ci.

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{2, 5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$V \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\} = \{2, 5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$(V \setminus \{2\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$(V \setminus \{2\}) \setminus \{s_2, \dots, s_{n-2}\} = \{5, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 5\}) \setminus \{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{4, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{s_3, s_4, s_5, s_6\} = \{1, 3, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 5\}) \setminus \{s_3, \dots, s_{n-2}\} = \{4, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{s_4, s_5, s_6\} = \{1, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 4, 5\}) \setminus \{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{3, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{s_4, s_5, s_6\} = \{1, 6\}$$

$$(V \setminus \{2, 4, 5\}) \setminus \{s_4, \dots, s_{n-2}\} = \{3, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 3\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{s_5, s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{1, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{s_5, s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_5, \dots, s_{n-2}\} = \{1, 7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

arête  $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$

$$s = (1, 4, 3, 1, 6, 6)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{s_6\} = \{6\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \setminus \{s_6, \dots, s_{n-2}\} = \{7, 8\}$$

$$\text{arête } \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{6, 7\}$$

$$(V \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}) = \{6, 8\}$$

Ce résultat est un corollaire d'un résultat plus général...

## THÉORÈME (BERGE)

Le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets de label respectif  $x_1, \dots, x_n$  et dont les degrés sont donnés par  $\deg(x_1) = d_1, \dots, \deg(x_n) = d_n$  vaut le coefficient multinomial

$$T_{n,d_1,\dots,d_n} := \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!},$$

à condition qu'un arbre ayant de telles spécificités existe

## EXEMPLE

Il y a un seul arbre à 3 sommets de label 1, 2, 3 et de degré respectif 2, 1, 1 (il y en a aussi un pour les degrés 1, 2, 1 et 1, 1, 2). La formule donne bien

$$\binom{3-2}{2-1, 1-1, 1-1} = \frac{1!}{1!0!0!} = 1.$$

Si on compte juste le nombre d'arbres ayant  $n$  sommets (quel que soit leur degré), cela revient à calculer

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 - 1 + \dots + d_n - 1 = n - 2}} \binom{n - 2}{d_1 - 1, \dots, d_n - 1} &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n = n - 2}} \binom{n - 2}{i_1, \dots, i_n} \\ &= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \times}^{n - 2} = n^{n - 2}. \end{aligned}$$

Rem :  $d_1 + \dots + d_n = 2(n - 1)$ ,  $n - 1 =$  nombre d'arêtes

## THM. MULTINOMIAL

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \binom{n}{i_1, \dots, i_k} a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}$$

# NOMBRE DE SOUS-ARBRES COUVRANTS

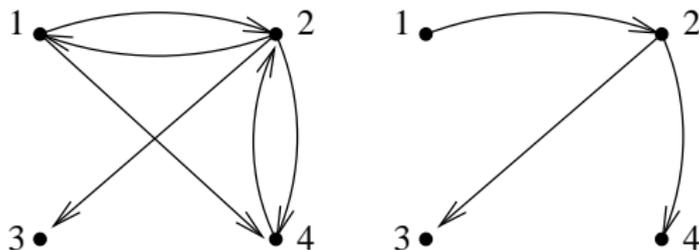
Etendre le problème initial : compter les sous-arbres couvrants, pointés et orientés depuis la racine dans un **multi-graphe orienté**  $G = (V, E)$  où  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Nous supposons le multi-graphe **sans boucle**.

## DÉFINITION

Un arbre pointé est **orienté depuis la racine** si les arcs de celui-ci sont tous orientés des sommets de niveau  $i$  vers les sommets de niveau  $i + 1$

Le graphe non orienté sous-jacent est lui-même un arbre.



## DÉFINITION

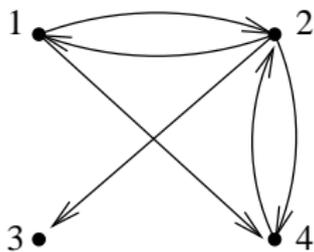
Soit  $G = (V, E)$  un multi-graphe orienté sans boucle dont les sommets sont ordonnés par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

La **matrice  $D(G)$  de demi-degré entrant** est définie par

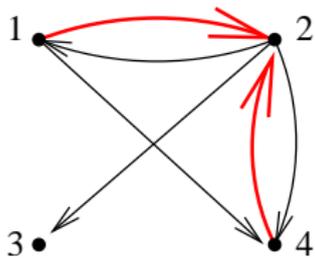
$$[D(G)]_{j,j} = d^-(v_j) \text{ et } [D(G)]_{i,j} = -(\#(\omega^+(v_i) \cap \omega^-(v_j))), \text{ si } i \neq j.$$

Autrement dit,  $[D(G)]_{i,j}$  est l'opposé du nombre d'arcs joignant  $v_i$  à  $v_j$ , si  $i \neq j$ .

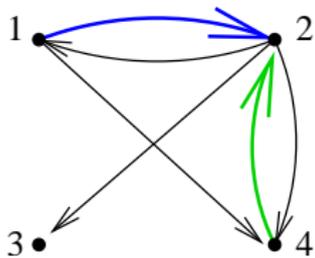
La somme des éléments de toute colonne de  $D(G)$  est nulle.



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

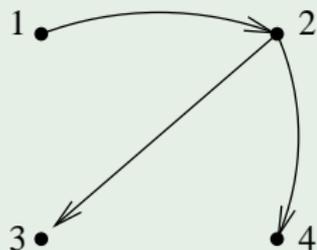
## REMARQUE : COND. NÉCESSAIRE MAIS PAS SUFFISANTE

La matrice de demi-degré entrant **associée à un sous-arbre couvrant pointé et orienté** possède, à l'exception de la colonne correspondant à la racine,

- ▶ exactement un “-1” dans chaque colonne
- ▶ une diagonale formée de 1

La colonne correspondant à la racine est nulle.

### EXEMPLE



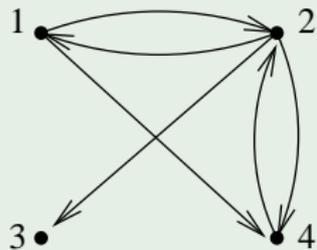
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $G^{(i)} = (V, E \setminus \omega^-(v_i))$ , le sous-graphe obtenu en supprimant les arcs de  $G$  entrant dans  $v_i$ .

## REMARQUE

Un tel sous-graphe revient à sélectionner une racine pour un arbre couvrant **potentiel**

## EXEMPLE



$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si  $[D(G^{(i)})]_{k,k} = r_k^{(i)} \geq 2$ , alors la  $k$ -ième colonne de  $D(G^{(i)})$  s'écrit de manière unique comme une somme de  $r_k^{(i)}$  vecteurs-colonnes

$$C_{k,1}^{(i)}, \dots, C_{k,r_k^{(i)}}^{(i)}$$

dont la  $k$ -ième composante vaut 1 et dont toutes les autres composantes sont nulles, exceptée une d'elles valant  $-1$ .

## REMARQUE

Une telle décomposition revient à **sélectionner pour chaque sommet un seul arc entrant**, dans l'optique de construire un potentiel arbre couvrant .

## EXEMPLE

$$D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_{2,1}^{(3)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C_{2,2}^{(3)}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_{4,1}^{(3)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_{4,2}^{(3)}}.$$

Soient  $k_1^{(i)}, \dots, k_p^{(i)}$  les indices des colonnes de  $D(G^{(i)})$  pour lesquelles  $[D(G^{(i)})]_{k,k} = r_k^{(i)} \geq 2$ . Si on choisit pour chacune de ces colonnes un des vecteurs  $C_{k_j, n}^{(i)}$ , pour  $j = 1, \dots, p$  et  $n = 1, \dots, r_{k_j}^{(i)}$ .

Le nombre total de tels choix possibles vaut donc  $m^{(i)} = r_{k_1}^{(i)} \cdots r_{k_p}^{(i)} \geq 2^p$  et à chacun de ces choix, il correspond une matrice

$$D^{(i)}_1, \dots, D^{(i)}_{m^{(i)}}.$$

En particulier, il est clair, par linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, que

$$\det(D(G^{(i)})) = \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \det(D^{(i)}_j). \quad (1)$$

Remarquons aussi que pour un multi-graphe, il se peut que plusieurs matrices  $D^{(i)}_j$  soient identiques. Il faut en tenir compte pour compter exactement le nombre de sous-arbres couvrants.

$[D(G^{(3)})]_{2,2} = [D(G^{(3)})]_{4,4} = 2$  et on a donc  $m^{(3)} = 4$  matrices

$$D_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telles que  $\det(D(G^{(3)})) = \sum_{i=1}^4 \det(D_i^{(3)})$ .

$$D(G^{(3)}) = \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} + C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(D(G^{(3)})) &= \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} + C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(D(G^{(3)})) &= \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} A & C_{2,1}^{(3)} & B & C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,1}^{(3)} \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} A & C_{2,2}^{(3)} & B & C_{4,2}^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## CE QU'IL FAUT COMPRENDRE !

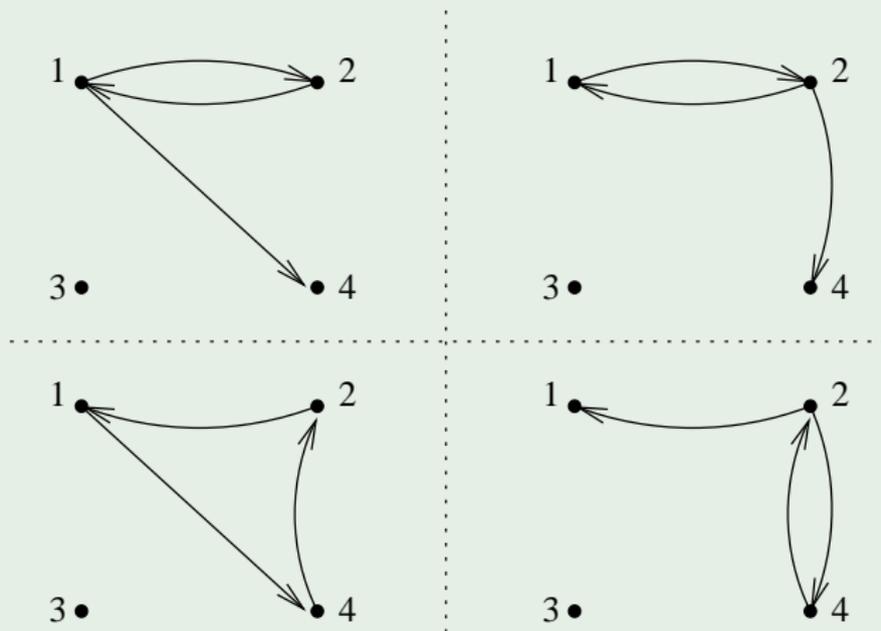
A ce stade, à chaque matrice  $D(G_\ell^{(k)})$  correspond

- ▶ une sélection d'une racine et
- ▶ une sélection d'un arc entrant pour chaque sommet distinct de la racine

Pour un sélection convenable, il s'agira d'un arbre couvrant...

## SUITE DE L'EXEMPLE

Aux matrices  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$ ,  $D_3^{(3)}$  et  $D_4^{(3)}$  correspondent



## IDÉE

Supposons qu'un sous-arbre couvrant pointé en  $v_j$  et orienté existe. La matrice associée à cet arbre est exactement égale à une des matrices  $D^{(i)}_1, \dots, D^{(i)}_{m(i)}$ .

Pour compter le nombre de sous-arbres couvrants pointés en  $v_j$ , il suffit de **pouvoir distinguer les matrices  $D^{(i)}_j$  qui correspondent à un sous-arbre couvrant !**

## REMARQUE / RAPPEL

Toute matrice  $D^{(i)}_j$  est une matrice de demi-degré entrant pour un certain sous-graphe de  $G$ , noté  $G^{(i)}_j$ , dont chaque sommet a un demi-degré entrant valant au plus 1.

## THÉORÈME

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté dont le demi-degré entrant de chaque sommet vaut au plus 1.

Le mineur  $M_{t,t}(G)$  de la matrice  $D(G)$  obtenu en supprimant la ligne et la colonne correspondant à  $v_t$  vaut

$$\begin{cases} 1, & \text{si } G \text{ contient un sous-arbre couvrant pointé en } v_t \text{ et orienté;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

le nombre de sous-arbres **couvrant**  $G^{(i)}$  pointés en  $v_i$  vaut

$$\sum_{j=1}^{m^{(i)}} M_{i,i}(G^{(i)}_j) = M_{i,i}(G^{(i)}).$$

Ce nombre est aussi égal au nombre de sous-arbres **couvrant**  **$G$  tout entier** et pointés en  $v_i$ .

Les matrices  $D(G^{(i)})$  et  $D(G)$  étant égales à l'exception de la  $i$ -ème colonne, on a

### THÉORÈME DE BOTT-MAYBERRY (1954)

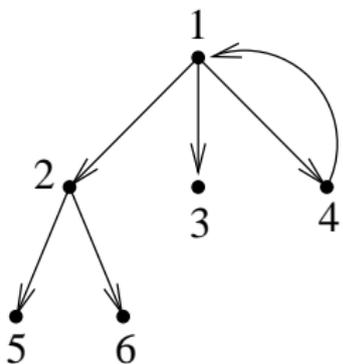
Soit  $G$  un multi-graphe orienté sans boucle.

Le nombre de sous-arbres couvrant  $G$  pointés au sommet  $v_i$  et orientés est égal au mineur  $M_{i,i}(G)$  de la matrice de demi-degré entrant de  $G$ .

Il reste à démontrer le “premier” théorème...

Supposons que  $G$  contienne un sous-arbre couvrant  $A$  orienté et pointé en  $v_t$ .

Par hypothèse, le demi-degré entrant de chaque sommet vaut au plus 1, alors  $G = A$  ou bien  $G = A + e$  où  $e$  est une arête entrant dans  $v_t$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut renuméroter les sommets de  $A$  (donc de  $G$ ) par un **parcours en largeur** de l'arbre.

Ainsi, l'arête  $v_t$  devient  $v_1$  et  $[D(G)]_{1,1} \leq 1$ .

Pour  $i \geq 2$ ,  $[D(G)]_{i,i} = 1$  et

$$\text{si } i > j \geq 2, \text{ alors } [D(G)]_{i,j} = 0$$

(c'est une conséquence de la renumérotation des sommets).

Si  $G = A + e$ , alors  $D(G)$  contient un “-1” dans la première colonne, mais cela n'a guère d'importance pour la suite.

On conclut que **la matrice  $D(G)$  privée de sa première ligne et de sa première colonne est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1.**

Supposons à présent que  $G$  ne contienne pas de sous-arbre couvrant orienté et pointé en  $v_t$ .

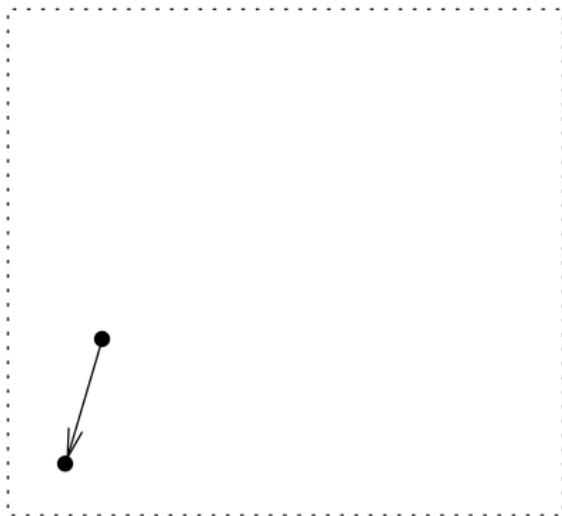
Si pour  $j \neq t$ ,  $d^-(v_j) = 0$ , alors la  $j$ -ième colonne de  $D(G)$  est nulle et on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

Nous pouvons donc supposer que pour tout  $j \neq t$ ,  $d^-(v_j) = 1$ .

Soit  $j_1 \neq t$ . Puisque  $d^-(v_{j_1}) = 1$ , il existe un indice  $j_2$  et un arc joignant  $v_{j_2}$  à  $v_{j_1}$ . En continuant de la sorte, on obtient des sommets tous distincts  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$  tels que

$$v_{j_k} \longrightarrow v_{j_{k-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{j_2} \longrightarrow v_{j_1}.$$

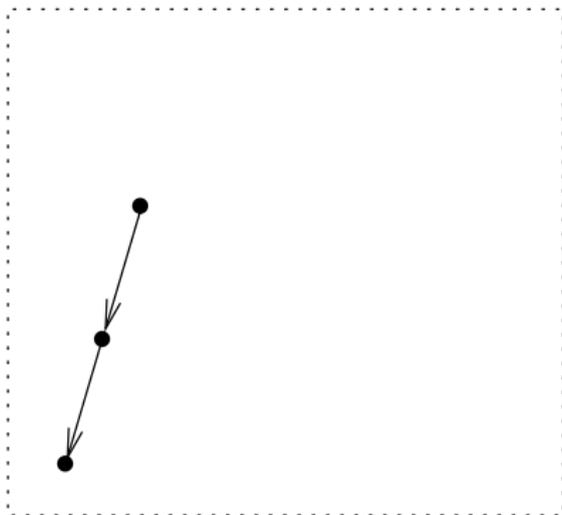
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .**

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

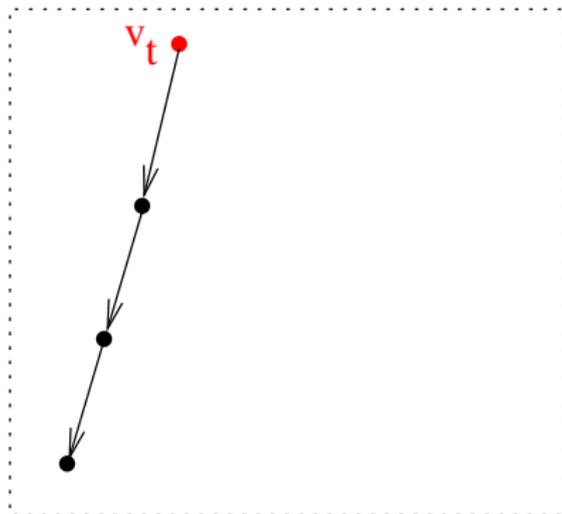
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

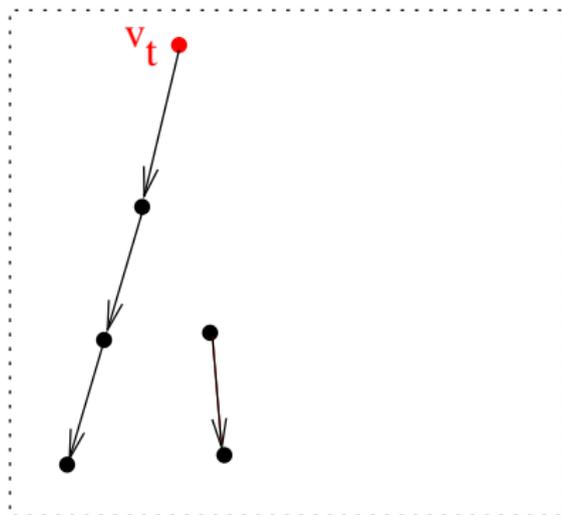
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .**

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

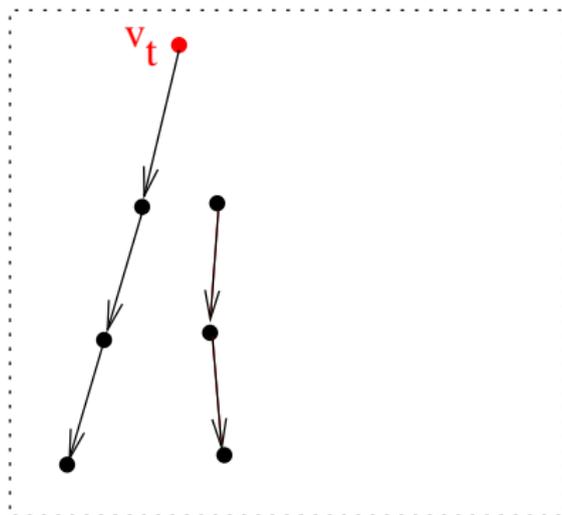
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

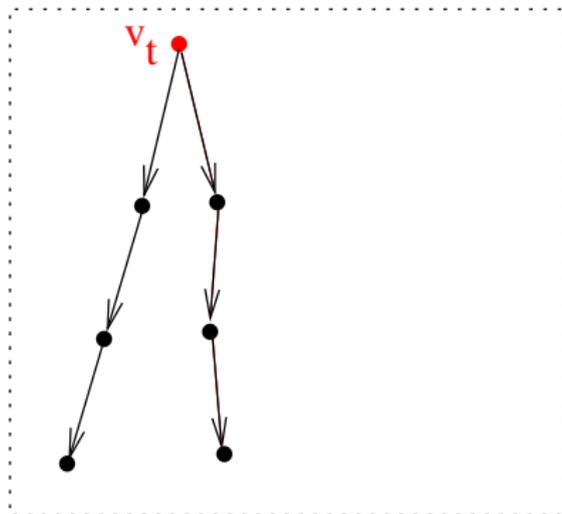
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

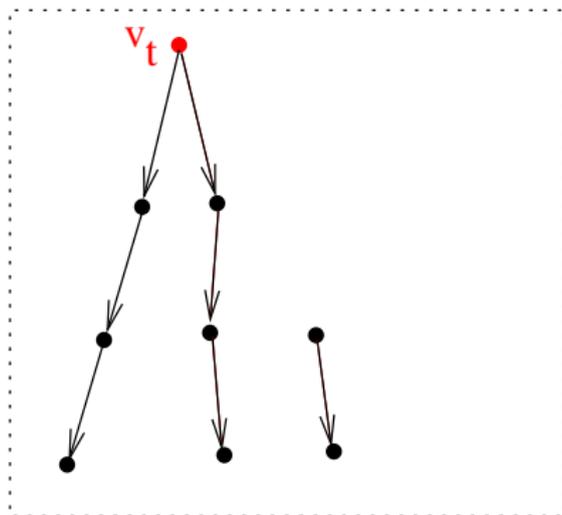
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

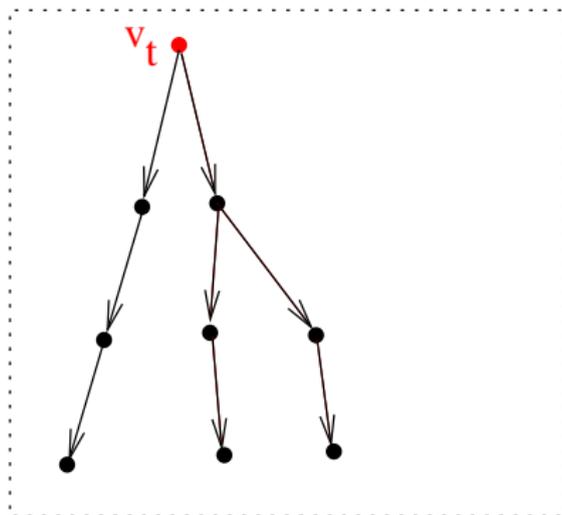
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$** .

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

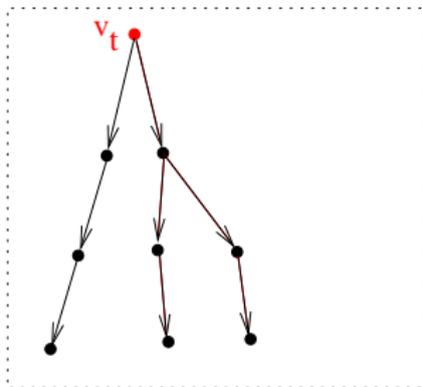
Si en effectuant cette construction, on rencontre le sommet  $v_t$ , on considère alors un autre sommet que  $v_{j_1}$  pour initialiser la construction.



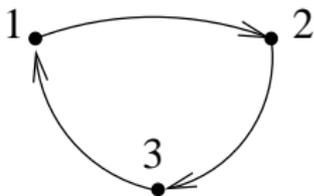
Il existe au moins un sommet de  $G$  pour lequel **la construction ne rencontrera pas  $v_t$ .**

Sinon, on aurait identifié à chaque fois un sous-arbre pointé en  $v_t$  et on obtiendrait un sous-arbre couvrant pointé en  $v_t$ !

Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.

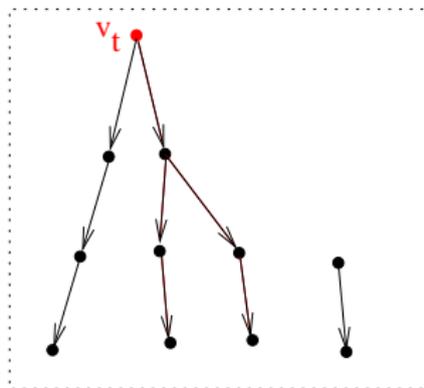


Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

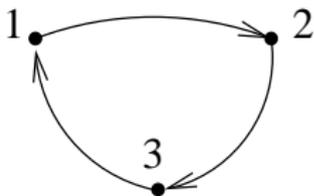


$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.

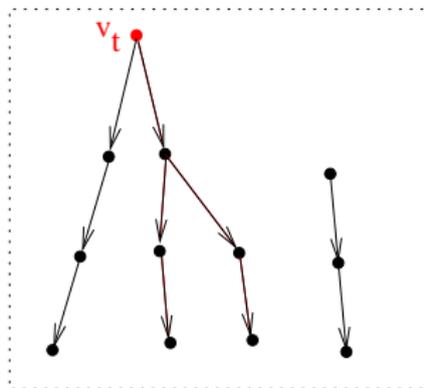


Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

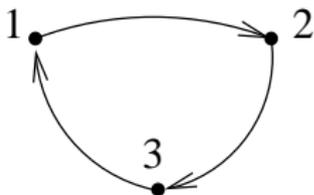


$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.

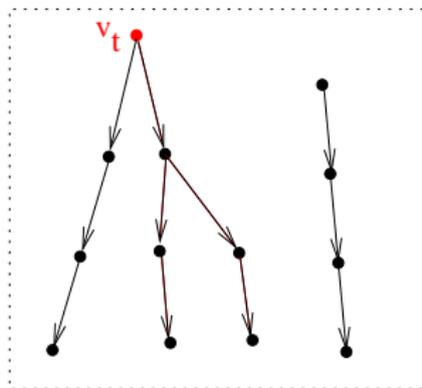


Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

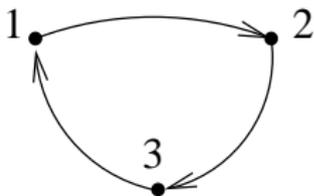


$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.

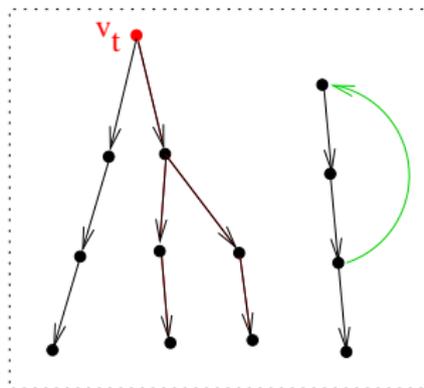


Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .

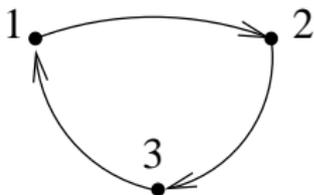


$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la construction de  $v_{j_k}, \dots, v_{j_1}$ , puisque le graphe contient un nombre fini de sommets, on finit par identifier un cycle.



Les colonnes de  $D(G)$  correspondant aux sommets de ce cycle sont linéairement dépendantes car leur somme fait zéro. De là, on en conclut que  $M_{t,t}(G) = 0$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reconsidérer le problème initial concernant des graphes non orientés.

A un graphe non orienté  $G = (V, E)$  correspond un graphe orienté  $G = (V, E')$  où chaque arête  $\{u, v\}$  de  $G$  donne lieu aux arcs  $(u, v)$  et  $(v, u)$  dans  $G'$ .

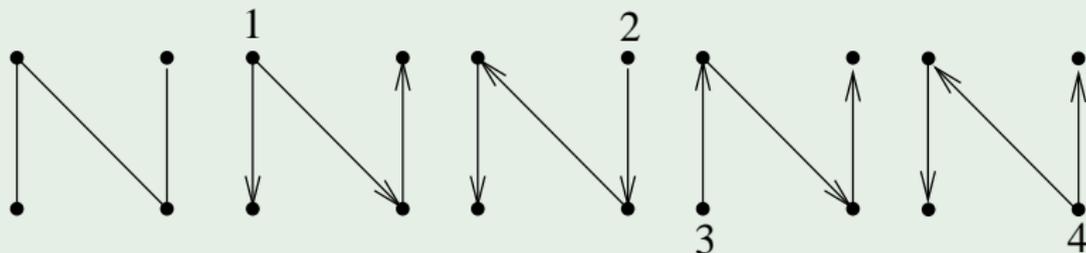
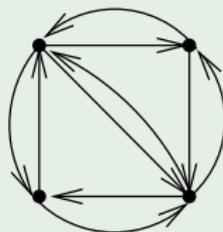
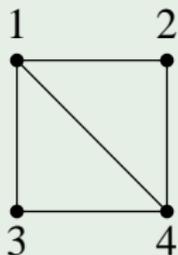
A tout arbre couvrant dans  $G$ , il correspond dans  $G'$  exactement un arbre couvrant pointé en  $a$  et orienté depuis  $a$  et ce, pour tout sommet  $a$  de  $G'$ .

La réciproque est également vraie. A tout arbre couvrant  $G'$  (pointé en un quelconque sommet et orienté), il correspond un arbre couvrant  $G$ .

## COROLLAIRE

Le nombre de sous-arbres couvrant un multi-graphe  $G = (V, E)$  non orienté sans boucle vaut  $M_{i,i}(G')$  quel que soit  $i$ , où  $G'$  est le graphe symétrique orienté déduit de  $G$ .

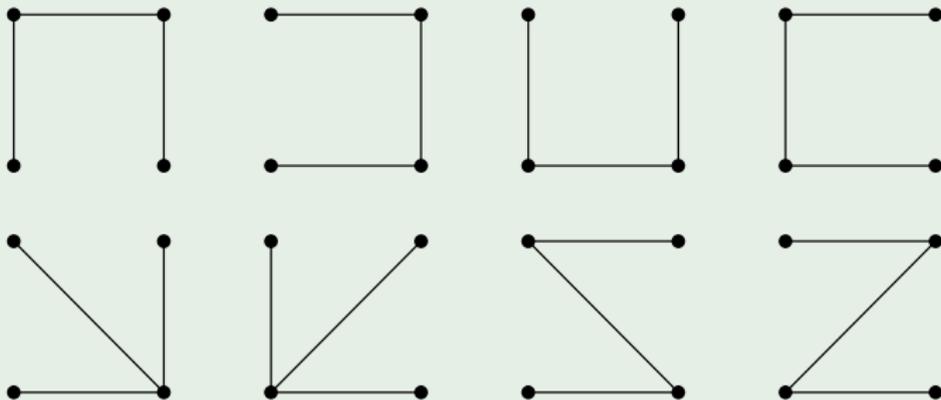
# EXEMPLE



$$D(G') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tous les mineurs principaux valent 8.

## EXEMPLE



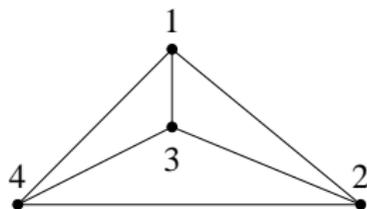
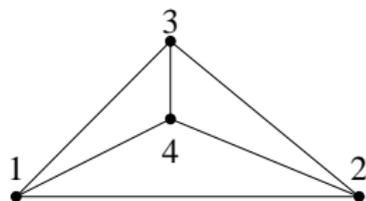
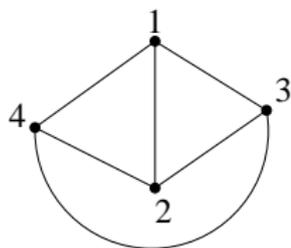
## REMARQUE

Nous avons compté l'ensemble des sous-arbres d'un graphe dont **les sommets ont été numérotés**. Ainsi, parmi les 8 arbres ci-dessus, seulement 3 sont 2 à 2 non isomorphes.

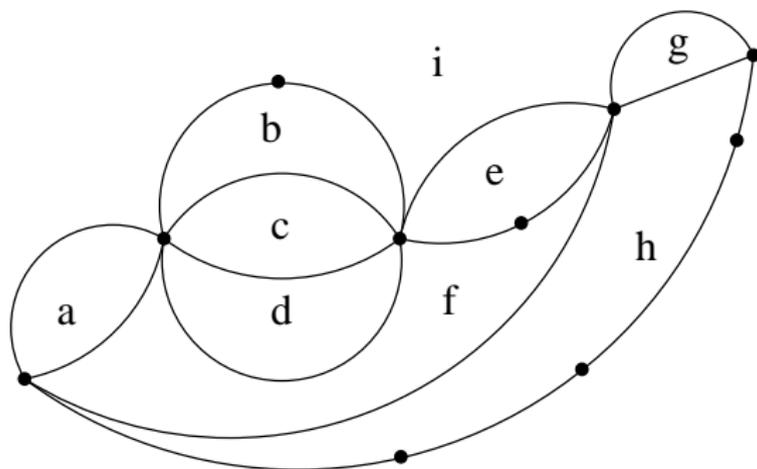
Arbres couvrants **de poids minimal** : Algo. Prim / Kruskal ...

# GRAPHES PLANAIRES

On considère l'ensemble quotient des représentations homéomorphes (au sens topologique du terme).  
Un graphe peut avoir plusieurs représentations



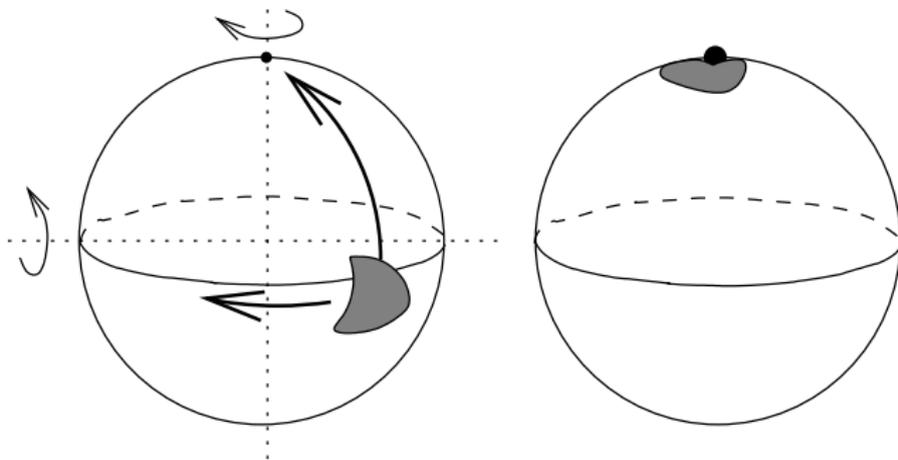
Face, frontière, faces adjacentes, face infinie...



## REMARQUE : THÉORÈME DE STEINITZ

Un graphe est le squelette d'un polyèdre convexe (borné) de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si c'est un graphe planaire au moins 3-connexe (i.e., ne pouvant pas être disconnecté en retirant moins de trois sommets,  $\kappa(G) \geq 3$ )

projection stéréographique



## THÉORÈME D'EULER

Dans un multi-graphe planaire connexe (fini) possédant  $s$  sommets,  $a$  arêtes et  $f$  faces, on a

$$s - a + f = 2.$$

Récurrance sur  $f$ .

Si  $f = 1$ , le graphe possède uniquement une face infinie.  
Le graphe connexe ne possède aucun cycle, c'est un arbre.  
Ainsi,  $s = a + 1$ , formule OK.

OK pour  $< f$ , OK ? pour  $f \geq 2$  ?.

Soit  $e$  une arête d'un cycle.

$e$  appartient à la frontière de deux faces  $A$  et  $B$ .

Si on supprime  $e$ , on obtient un graphe ayant

- ▶  $a - 1$  arêtes,
- ▶ le même nombre  $s$  de sommets,
- ▶  $f - 1$  faces.

Par hypothèse de récurrence, on a  $s - (a - 1) + f - 1 = 2$ ,  
ce qui suffit.



# GRAPHES PLANAIRES

$G$  est simple, la frontière de toute face contient  $\geq 3$  arêtes.

En comptant le nombre de faces, on compte à chaque fois au moins 3 arêtes, ainsi,  $3f \leq a$ .

De plus, chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle apparaît dans la frontière de deux faces.

$$f \leq \frac{2a}{3}.$$

Procédons par l'absurde. Supposons que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $\deg(x) \geq 6$ . Dans ce cas,

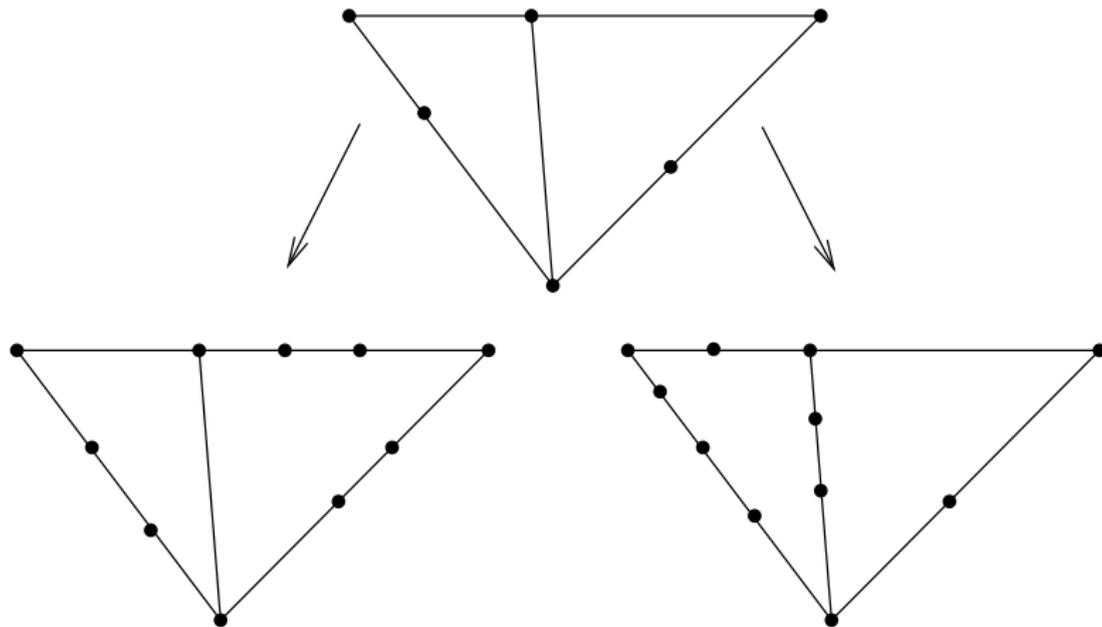
$$s \leq \frac{2a}{6}.$$

Si on applique la formule d'Euler,

$$2 = s - a + f \leq \frac{a}{3} - a + \frac{2a}{3} = 0!$$

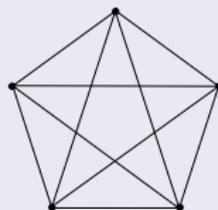
# GRAPHES PLANAIRES

Graphes homéomorphes



## PROPOSITION

Le graphe  $K_5$  n'est pas planaire.



Dans un graphe simple et planaire, de la relation  $3f \leq 2a$  démontrée dans la prop. préc. et de la formule d'Euler ( $3a - 3f = 3s - 6$ ), on tire que

$$a \leq 3s - 6.$$

Or,  $K_5$  est un graphe simple qui possède 5 sommets et 10 arêtes et  $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$ . On en conclut que  $K_5$  ne peut être planaire.

## PROPOSITION

Le graphe  $K_{3,3}$  n'est pas planaire.



Ici, graphe simple, planaire et biparti.

Chaque face a une frontière déterminée par au moins 4 arêtes et on en tire que  $4f \leq 2a$ , i.e.,  $2f \leq a$ . De la formule d'Euler,  $2a - 2f = 2s - 4$ , on en tire que

$$a \leq 2s - 4.$$

Or,  $K_{3,3}$  est un graphe biparti simple qui possède 6 sommets et 9 arêtes. Il ne peut donc pas être planaire car  $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$ .

Théorème d'exclusion caractérisant une famille de graphes :

## THÉORÈME DE KURATOWSKI

Un multi-graphe (non orienté) est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à  $K_5$  ou à  $K_{3,3}$ .