Théorie des graphes (4)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2007–2008

UNIVERSITÉ de Liège

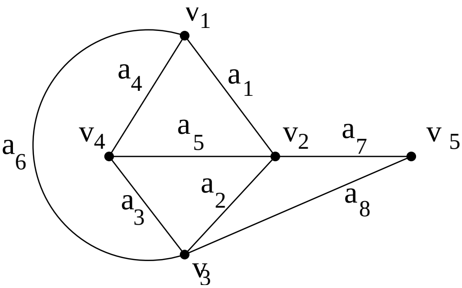
Théorie “algébrique” des graphes...

DÉFINITION

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
$A(G)$: matrice d’adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arêtes } \{v_i, v_j\} \text{ de } E.$$

$\rightarrow$ polynôme caractéristique de G, valeurs propres de G, spectre de G.



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Proposition

Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence.

DÉFINITION

Dans un graphe simple, on appelle triangle tout triplet d'arêtes distinctes deux à deux de la forme $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ (i.e., tout circuit de longueur trois formé d'arêtes distinctes).

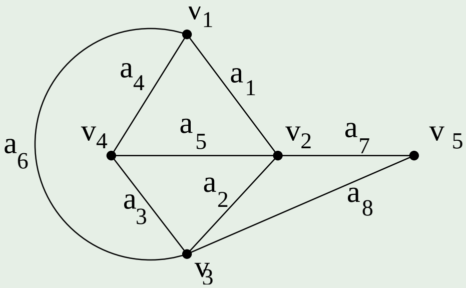
PROPOSITION

Si le polynôme caractéristique de $G = (V, E)$ est de la forme

$$\chi_G(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

- c_1 est le nombre de boucles de G, en particulier, si G est simple, $c_1 = 0$.
- Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G.
- Si G est simple, alors c_3 est le double du nombre de triangles de G.

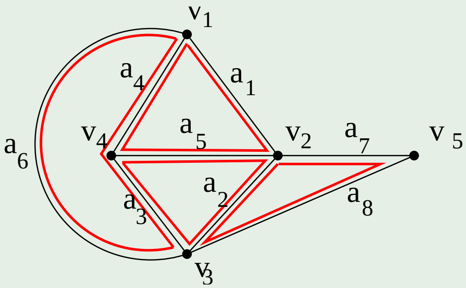
Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 - 8(-\lambda)^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0$, $c_2 = -8$, $c_3 = 10$

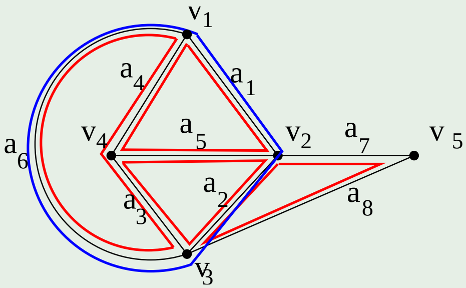
Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0$, $c_2 = 8$, $c_3 = 10$

Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0$, $c_2 = 8$, $c_3 = 10$

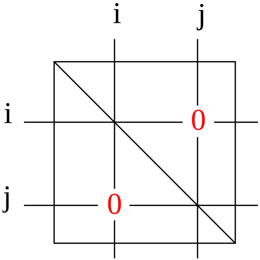
Rappel

Les coefficients c_i du polynôme caractéristique s'obtiennent comme somme des sous-matrices diagonales de dimension i.

$$A_{(i_1,\ldots,i_k;\, i_1,\ldots,i_k)}$$

Le premier point est immédiat. Le coefficient c_1 est la somme des éléments diagonaux de A_G.

Si G est simple, les sous-matrices diagonales de A_G de dimension 2 $A_{(i,j;i,j)}$ sont de la forme

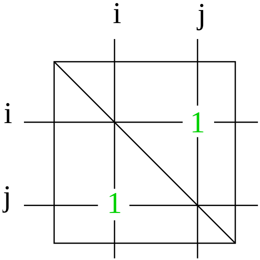


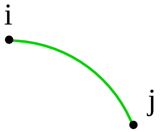
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient c_2 est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement -1 et 0, $c_2 = -\#E$.

Le premier point est immédiat. Le coefficient c_1 est la somme des éléments diagonaux de A_G.

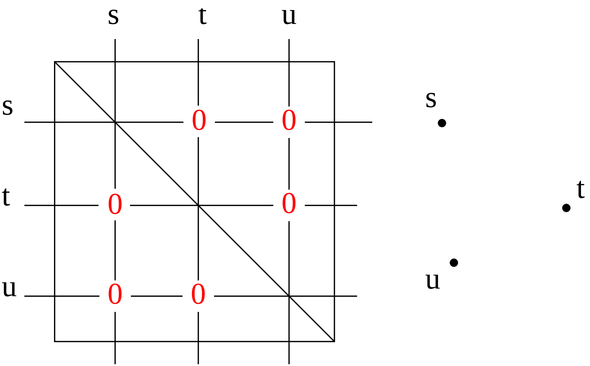
Si G est simple, les sous-matrices diagonales de A_G de dimension 2 $A_{(i,j;i,j)}$ sont de la forme



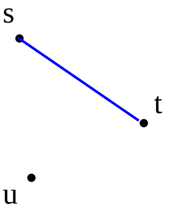


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

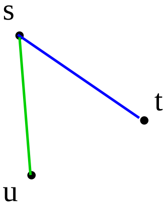
Le coefficient c_2 est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement -1 et 0, $c_2 = -\#E$.


s
t
u
s
t
u
0
0
0
0
0
0
s
t
u

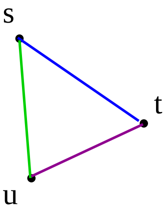
$$
\begin{array}{c|ccc}
 & s & t & u \\
\hline
s & & 1 & 0 \\
t & 1 & & 0 \\
u & 0 & 0 &
\end{array}
$$



$$\begin{array}{c|ccc} & s & t & u \\ \hline s & & 1 & 1 \\ t & 1 & & 0 \\ u & 1 & 0 & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} & s & t & u \\ \hline s & & 1 & 1 \\ t & 1 & & 1 \\ u & 1 & 1 & \end{array}$$



Les sous-matrices diagonales non nulles de A_G de dimension 3 sont d'une des formes suivantes $A_{(s,t,u;s,t,u)}$ (à une permutation des lignes et des colonnes près, ce qui ne change pas la valeur du déterminant)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ont un déterminant nul et la troisième a un déterminant égal à 2. c_3 est la somme des déterminants de ces sous-matrices = $2 * \#$ triangles.

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. Si λ est valeur propre de G, alors $-\lambda$ l'est aussi. Autrement dit, le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.

Par hypothèse, V se partitionne en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de manière telle que toute arête de G est de la forme $\{u, v\}$ avec $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Si on ordonne les sommets de V de manière à considérer tout d'abord les sommets de V_1, alors $A(G)$ a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de dimension $\#V_1 \times \#V_2$.

Soit x un vecteur propre non nul de $A(G)$ de valeur propre λ. Appelons x_1 (resp. x_2) le vecteur obtenu en considérant les $\#V_1$ premières (resp. les $\#V_2$ dernières) composantes de x. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

vecteur propre non nul de valeur propre $-\lambda$,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Définition (cas orienté)

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
$A(G)$: matrice d'adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arcs } (v_i, v_j) \text{ de } E.$$

Théorème

Soit $G=(V,E)$ un multi-graphe (orienté ou non) tel que $V=\{v_1,\ldots,v_k\}$. Pour tous $i,j\in\{1,\ldots,k\}$ et pour tout $n>0$,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

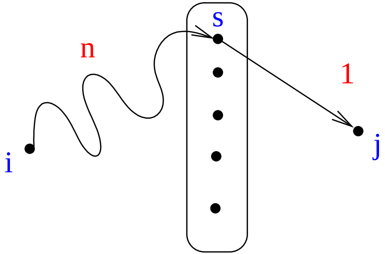
est le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j.

Par récurrence sur n. Le cas $n=1$, définition de la matrice d'adjacence.

Supposons OK pour $n>0$ et vérifions-le pour $n+1$.

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j}=\sum_{s=1}^{k}[A(G)^n]_{i,s}\,[A(G)]_{s,j}.$$

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} [A(G)^n]_{i,s}\, [A(G)]_{s,j}.$$



$[A(G)^n]_{i,s}$ = nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_s
$[A(G)]_{s,j}$ = nombre d'arcs/arêtes joignant v_s à v_j.
Par conséquent, $[A(G)^n]_{i,s}\, [A(G)]_{s,j}$ compte le nombre de chemins de longueur $n+1$ joignant v_i à v_j en passant par v_s.

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est irréductible si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $N(i,j)$ tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est primitive s'il existe N tel que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter $A^N > 0$

On remarque aussi que toute matrice primitive est irréductible.

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est irréductible si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $N(i,j)$ tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est primitive s'il existe N tel que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter $A^N > 0$

On remarque aussi que toute matrice primitive est irréductible.

$A, B \in \mathbb{R}_n^n$, commode d'écrire $A < B$ (resp. $\leq, \geq, >$) si l'inégalité a lieu composante à composante.

Proposition

Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) est fortement connexe (resp. connexe) SSI sa matrice d'adjacence est irréductible.

Remarque

Si la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) est primitive,

- le graphe est non seulement connexe et
- il existe N tel que, quelle que soit la paire de sommets considérée, il existe un chemin de longueur N les joignant.

Par abus de langage, on parle de graphe primitif

Théorème de Perron-Frobenius

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}\text{).}$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| \leq \lambda_A$.

SUITE

- Si μ est une valeur propre de A telle que $|\mu| = \lambda_A$, alors

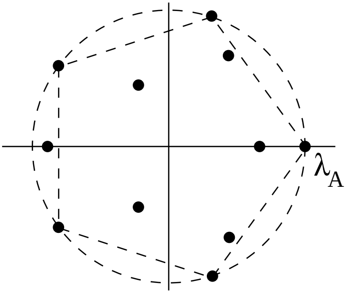
$$\mu = \lambda_A e^{2ik\pi/d}$$

pour un certain $d \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, d-1\}$. De plus, pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\lambda_A e^{2ik\pi/d}$ est une valeur propre de A.

- Soit B une matrice réelle à coefficients positifs ou nuls de même dimension que A. Si $B \leq A$, alors pour toute valeur propre μ de B, on a $|\mu| \leq \lambda_A$ et l'égalité a lieu si et seulement si $A = B$.

La valeur propre λ_A est la valeur propre de Perron de A.

Une matrice irréductible possède toujours une valeur propre réelle dominante λ_A.
On peut avoir **d'autres valeurs propres** de module égal à λ_A mais dans ce cas, celles-ci sont exactement obtenues par multiplication de λ_A par les racines d-ièmes de l'unité.

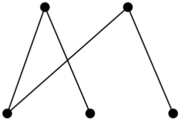


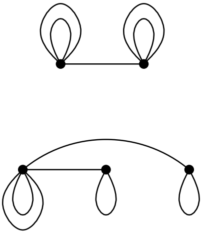
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



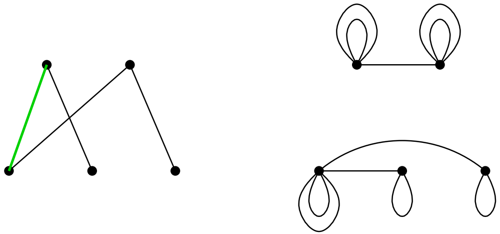


Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.

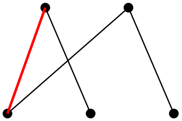


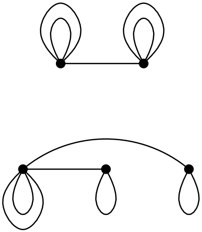
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



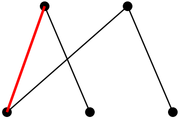


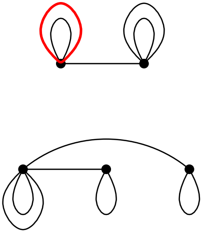
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



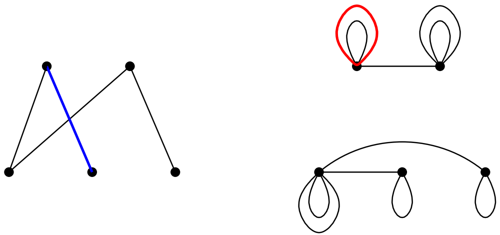


COROLLAIRE

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.

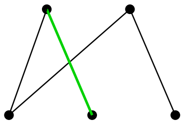


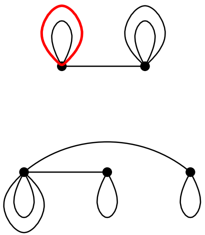
COROLLAIRE

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



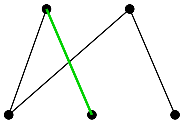


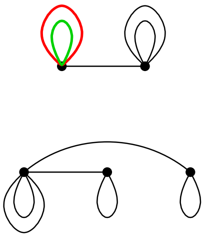
COROLLAIRE

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



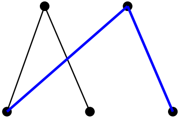


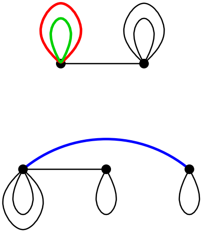
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



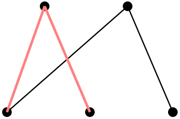


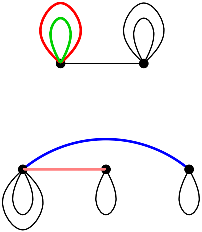
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.





λ^2 est la valeur propre dominante de A^2 et x et y en sont des vecteurs propres.
La multiplicité de λ^2 est au moins 2 et on en déduit que A^2 ne peut être irréductible (i.e., G' n'est pas connexe).

Thèse : G est biparti.

Montrons d'abord que
G' contient au moins deux composantes connexes...

Soit u un sommet quelconque fixé.

On définit

- V_1 : ensemble des sommets joints à u par un chemin de longueur impaire dans G.
- V_2 : ensemble des sommets joints à u par un chemin de longueur paire dans G.

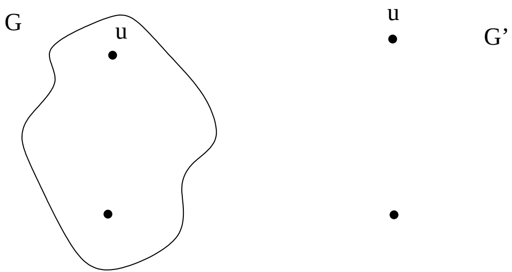
Puisque G est connexe,

$$V_1 \cup V_2 = V$$

On va montrer que

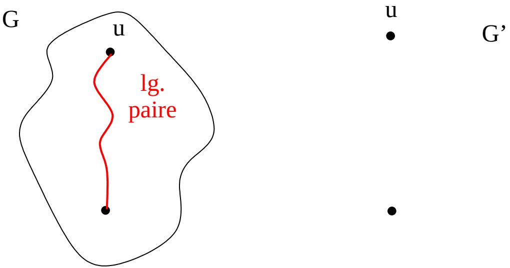
- La restriction de G' à V_1 est connexe
- La restriction de G' à V_2 est connexe
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (ok, sinon, G' connexe !)

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.



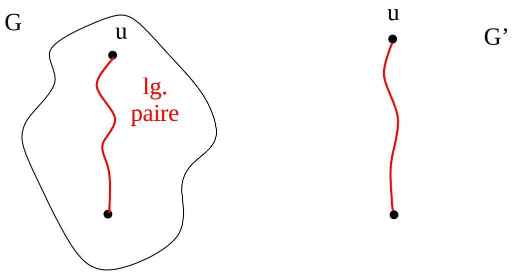
La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.



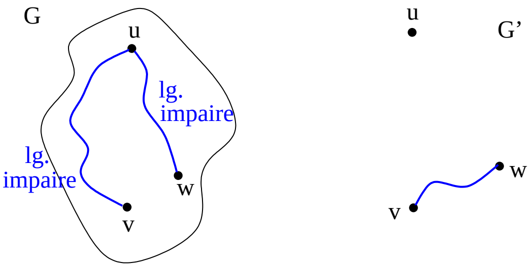
La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.

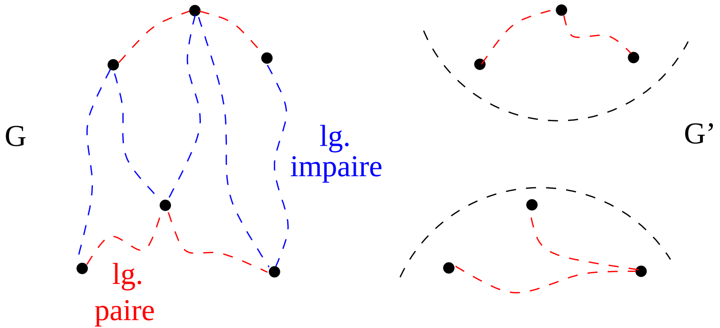


La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_1 joints à u par un chemin de longueur impaire dans G, sont connectés entre eux dans G'.
Soient $v, w \in V_1$.



La restriction de G' à V_1 est connexe. De plus, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, car sinon G' serait connexe.


G
lg.
impaire
lg.
paire
G'

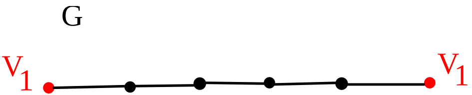
Puisque dans G', il n'y a aucune arête entre un sommet de V_1 et un sommet de V_2,

dans G, il n'y a aucun chemin de longueur paire entre deux tels sommets.

Autrement dit, un chemin joignant dans G un sommet de V_1 et un sommet de V_2 est nécessairement de longueur impaire.

Il reste à montrer qu'un chemin joignant dans G deux sommets de V_1 (resp. V_2)est nécessairement de longueur paire.

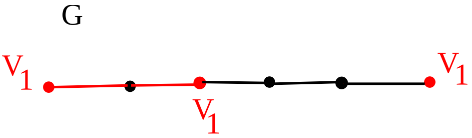
P.A. Supposons que, dans G, un chemin de longueur impaire $2\ell + 1$ joigne deux sommets de V_1 (par symétrie, le raisonnements'applique aussi à deux sommets de V_2).



Dans G, il existe une arête entre deux sommets a et b de V_1.

G étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet c de V_1 et un sommet d de V_2.

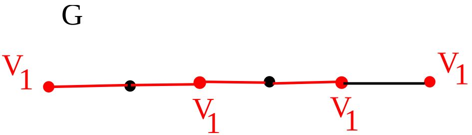
P.A. Supposons que, dans G, un chemin de longueur impaire $2\ell + 1$ joigne deux sommets de V_1 (par symétrie, le raisonnements'applique aussi à deux sommets de V_2).



Dans G, il existe une arête entre deux sommets a et b de V_1.

G étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet c de V_1 et un sommet d de V_2.

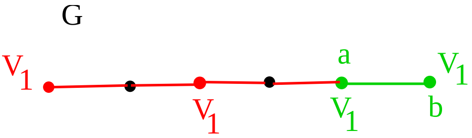
P.A. Supposons que, dans G, un chemin de longueur impaire $2\ell + 1$ joigne deux sommets de V_1 (par symétrie, le raisonnements'applique aussi à deux sommets de V_2).



Dans G, il existe une arête entre deux sommets a et b de V_1.

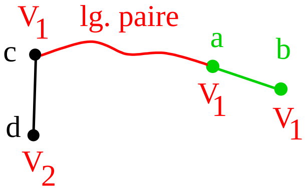
G étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet c de V_1 et un sommet d de V_2.

P.A. Supposons que, dans G, un chemin de longueur impaire $2\ell + 1$ joigne deux sommets de V_1 (par symétrie, le raisonnements'applique aussi à deux sommets de V_2).



Dans G, il existe une arête entre deux sommets a et b de V_1.

G étant connexe, il existe aussi une arête joignant un sommet c de V_1 et un sommet d de V_2.



Il existe un chemin de longueur paire joignant b à d !

Ceci est en contradiction avec : un chemin joignant dans G un sommet de V_1 et un sommet de V_2 est nécessairement de longueur impaire.

Conclusion

G est biparti car

- toute paire de sommets de V_1 (resp. V_2) est joint (exclusivement) par un chemin de longueur paire
- toute paire de sommets de $V_1 \times V_2$ est joint (exclusivement) par un chemin de longueur impaire

En particulier, les arêtes sont des chemins de longueur impaire.

Théorème de Perron

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée primitive de dimension n.

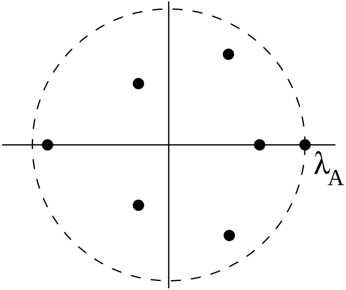
- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}).$$

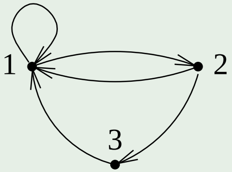
- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| < \lambda_A$.
- Soit B une matrice réelle à coefficients positifs ou nuls de même dimension que A. Si $B \leq A$, alors pour toute valeur propre μ de B, on a $|\mu| \leq \lambda_A$ et l'égalité a lieu si et seulement si $A = B$.

Ainsi, la valeur propre de Perron λ_A est l'unique valeur propre dominante. Toute autre valeur propre de A a un module **strictement** inférieur à λ_A.

Résultat plus fort que dans le cas irréductible.



Exemple, cas primitif



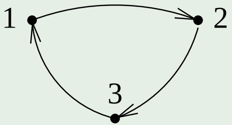
$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(G)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{array}{lll} 1 \to 1 \to 1 \to 1, & 1 \to 1 \to 1 \to 2, & 1 \to 1 \to 2 \to 3 \\ 2 \to 1 \to 1 \to 1, & 2 \to 1 \to 1 \to 2, & 2 \to 1 \to 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \to 1 \to 1, & 3 \to 1 \to 1 \to 2, & 3 \to 1 \to 2 \to 3. \end{array}$$

$$\lambda_A \simeq 1.83929,\ \lambda_{2,3} \simeq -0.41964 \pm 0.60629\, i.$$

Exemple, cas irréductible



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est f. connexe et donc, la matrice $A(G)$ est au moins irréductible.

$$A(G)^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A(G)^{3n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple, cas irréductible (suite)

Les valeurs propres sont ici les racines cubiques de l'unité

$$1,\ e^{2i\pi/3},\ e^{4i\pi/3}$$

plusieurs valeurs propres de module maximum ($= 1$).

Pour joindre deux sommets fixés, uniquement certaines longueurs de chemin peuvent être considérées.

Par exemple, pour joindre les sommets 2 et 3, uniquement des chemins de longueur congrue à 1 modulo 3 peuvent être envisagés.

Corollaire

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est primitive,

ii) il existe $N \geq 1$ tel que $A^N > 0$,

iii) il existe $N \geq 1$ tel que $A^n > 0$ pour tout $n \geq N$.

Par définition, i) $\Rightarrow$ ii) et ii) $\Rightarrow$ i).

ii) $\Rightarrow$ iii). Puisque $A^N > 0$, on en déduit que toute colonne de A contient au moins un élément strictement positif. Par conséquent, si $A^k > 0$, alors $A^k.A > 0$ et de proche en proche, $A^{k+i} > 0$ pour tout $i \geq 0$.

Enfin, il est immédiat que iii) $\Rightarrow$ ii).

Période d'une matrice irréductible

Soit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq d} = A \geq 0$. Par indice de A, on entend un élément de $\{1,\ldots,d\}$.

Définition

Soit i un indice. S'il existe $N > 0$ tel que $[A^N]_{i,i} > 0$, alors la période de l'indice i est le p.g.c.d. de l'ensemble des entiers $n > 0$ pour lesquels

$$[A^n]_{i,i} > 0.$$

On la note $p(i)$.

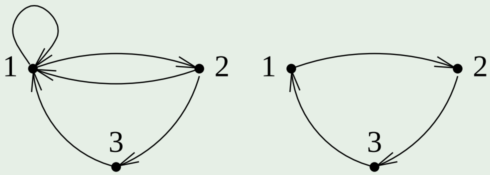
Le p.g.c.d. d'un ensemble infini d'entiers $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ est le plus grand entier p appartenant à l'ensemble fini $\{1, 2, \ldots, x_1\}$ tel que pour tout $k \geq 1$, p divise x_k.

Remarque : définition en termes de graphes...

Remarque

La période d'un sommet i appartenant à une composante f. connexe = p.g.c.d. de l'ensemble des entiers k pour lesquels il existe au moins un circuit de longueur k passant par i.

Exemple



Lemme

Soient i, j deux indices de $A \geq 0$. S'il existe m, n tels que $[A^m]_{i,j} > 0$ et $[A^n]_{j,i} > 0$, alors $p(i) = p(j)$.

Autrement dit...

Tous les sommets d'une composante f. connexe ont même période.

Pour tout s tel que $[A^s]_{j,j} > 0$, on a

$$\begin{aligned}
[A^{m+s+n}]_{i,i} &= \sum_{k=1}^{d} [A^{m+s}]_{i,k} [A^n]_{k,i} \\
&\geq [A^{m+s}]_{i,j} [A^n]_{j,i} \\
&= \sum_{k=1}^{d} [A^m]_{i,k} [A^s]_{k,j} [A^n]_{j,i} \\
&\geq [A^m]_{i,j} [A^s]_{j,j} [A^n]_{j,i} > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow p(i)$ divise $m + n + s$.

Pour un tel s, on a $[A^{2s}]_{j,j} > 0$ (en effet, si on effectue le produit matriciel $[A^s.A^s]_{j,j}$, on retrouve le terme $[A^s]_{j,j}.[A^s]_{j,j}$). Dès lors, on a aussi

$$[A^{m+2s+n}]_{i,i} > 0.$$

$\Rightarrow p(i)$ divise $m + 2s + n$

$p(i)$ divise s $(= m + 2s + n - (m + s + n))$.

Pour tout s tel que $[A^s]_{j,j} > 0$, $p(i)$ divise s donc $p(i) \leq p(j)$. Par symétrie, on a aussi que $p(j) \leq p(i)$ et $p(i) = p(j)$.

Conclusion

- Pour une matrice irréductible, toutes les périodes sont identiques.
- Tous les sommets d'une composante f. connexe ont même période.

Définition

Une matrice irréductible $A \in \mathbb{R}_n^n$ est cyclique de période p si tous les indices de A sont de période $p > 1$.

Sinon, tous les indices sont de période $p = 1$ et A est dite acyclique.

Lemme

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de période $p \geq 1$. Soit i un indice, $\exists N_i \geq 0 : \forall n \geq N_i$, $[A^{np}]_{i,i} > 0$.

Supposons tout d'abord que $[A^{kp}]_{i,i} > 0$ et $[A^{\ell p}]_{i,i} > 0$. Dès lors

$$[A^{(k+\ell)p}]_{i,i} \geq [A^{kp}]_{i,i}\,[A^{\ell p}]_{i,i} > 0.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des multiples np de p qui sont tels que $[A^{np}]_{i,i} > 0$ est stable pour l'addition (et $\mathcal{S}$ contient au moins un multiple de p). De plus, le p.g.c.d. des éléments de $\mathcal{S}$ vaut p. La conclusion découle alors du lemme suivant.

Lemme

Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers stable pour l'addition. Alors X contient tous les multiples du p.g.c.d. des éléments de X à l'exception éventuellement d'un nombre fini d'entre eux.

Exemple

$2, 7 \in X$ et X stable par addition

$$2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots$$

Soit p le p.g.c.d. des éléments de X. Quitte à diviser les éléments de X par p, on peut supposer que $p = 1$.
Dès lors, il existe un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq X$ tel que

$$\text{p.g.c.d. } \{x_1, \ldots, x_k\} = 1$$

Nous savons que le p.g.c.d. de $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$ vaut 1.
$\{x_1\}$, le p.g.c.d. potentiel x_1.
$\{x_1, x_2\}$, le p.g.c.d. potentiel $\leq x_1$
$\{x_1, x_2, x_3\}$... à chaque étape, le p.g.c.d. décroît.

Il existe k tel que le p.g.c.d. de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ soit 1.
Sinon, le p.g.c.d. de X serait > 1 !

k peut être > 2, exemple : $\{6, 10, 15\}$ dont le p.g.c.d. vaut 1 mais dont les éléments 2 à 2 ne sont pas premiers entre eux.

$$\text{p.g.c.d. } \{x_1, \ldots, x_k\} = 1$$

thm. de Bezout : $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 1$. Si on regroupe tous les termes dont les coefficients λ_i sont positifs (resp. négatifs), cette somme se réécrit

$$m - n = 1$$

avec $m, n \in X$ car X est stable pour l'addition. Soit q un entier tel que $q \geq n(n-1)$. Par division euclidienne,

$$q = a\,n + b, \quad 0 \leq b < n.$$

De plus, $a \geq n - 1$. Puisque $m - n = 1$, il vient

$$q = a\,n + b\,(m - n) = (a - b)\,n + b\,m$$

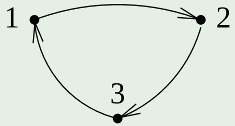
avec $a - b \geq 0$. On en conclut q appartient à X (car $m, n \in X$). Donc tout $q \geq n(n-1)$ appartient à X.

Théorème fondamental (cas irréductible)

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de période $p \geq 1$. Pour toute paire i, j d'indices de A, il existe un unique entier $r_{i,j} \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que

- $[A^n]_{i,j} > 0$ entraîne $n \equiv r_{i,j} \pmod p$ et
- il existe $N_{i,j}$ tel que $[A^{np+r_{i,j}}]_{i,j} > 0$ pour tout $n \geq N_{i,j}$.

Exemple



$p = 3$ et si on fixe $i = 2$, on a $r_{2,1} = \mathbf{2}$, $r_{2,2} = \mathbf{0}$ et $r_{2,3} = \mathbf{1}$. En effet, $[A(G)^{3n+\mathbf{2}}]_{2,1} = 1$, $[A(G)^{3n+\mathbf{0}}]_{2,2} = 1$ et $[A(G)^{3n+\mathbf{1}}]_{2,3} = 1$.

Supposons $[A^m]_{i,j} > 0$ et $[A^n]_{i,j} > 0$.
Thèse : $m \equiv n \pmod{p}$.

Puisque A est irréductible, il existe ℓ tel que $[A^\ell]_{j,i} > 0$. Dès lors,

$$[A^{m+\ell}]_{i,i} \geq [A^m]_{i,j}[A^\ell]_{j,i} > 0 \quad \text{et} \quad [A^{n+\ell}]_{i,i} > 0.$$

La période p divise donc $m + \ell$ et $n + \ell$ donc leur différence.
Autrement dit, $m - n \equiv 0 \pmod{p}$.

Passons à la deuxième partie. Puisque A est irréductible, il existe ℓ tel que $[A^{\ell}]_{i,j} > 0$ et au vu de la première partie,

$$\ell = mp + r_{i,j}.$$

Posons $N_{i,j} = N_i + m$ (avec N_i donné dans le lemme ...).

Par définition de N_i, on a

$$\forall n \geq N_i, \; [A^{np}]_{i,i} > 0.$$

De là, si $k \geq N_{i,j}$, alors

$$kp + r_{i,j} = (n+m)p + r_{i,j} \quad \text{avec } n \geq N_i.$$

et

$$[A^{kp+r_{i,j}}]_{i,j} \geq [A^{np}]_{i,i}[A^{mp+r_{i,j}}]_{i,j} > 0.$$

Proposition

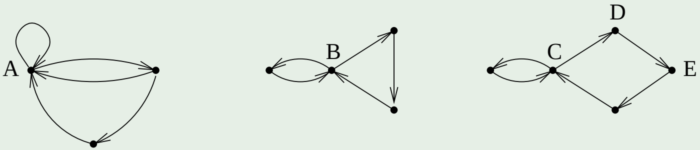
Une matrice irréductible est acyclique SSI elle est primitive.

Si la matrice est acyclique (i.e., de période $p = 1$), alors avec les notations du thm..., $r_{i,j} = 0 \; \forall i, j$. Donc

$$[A^n]_{i,j} > 0 \quad \text{si } n \geq N_{i,j}.$$

On pose $\mathcal{N} = \sup_{i,j} N_{i,j}$, alors $A^{\mathcal{N}} > 0$. primitive.
Réciproquement si A est primitive, A est nécessairement irréductible et pour k suffisamment grand et pour tout indice i de A, $[A^k]_{i,i} > 0$ et $[A^{k+1}]_{i,i} > 0$. Le p.g.c.d. de k et de $k+1$ étant 1, la conclusion en découle.

APPLICATIONS



Signalons sans démonstration...

“Réciproque”

Si $A \geq 0$ est une matrice irréductible possédant une valeur propre dominante λ (i.e., pour toute valeur propre $\mu \neq \lambda$ de A, $|\mu| < \lambda$), alors A est primitive.

Estimer le nombre de chemins de longueur n

Proposition

Si A est une matrice primitive,

$$\boxed{A^k = \lambda_A^k v_A \widetilde{w_A} + o(\lambda_A^k)}$$

où v_A et $\widetilde{w_A}$ sont des vecteurs propres choisis t.q. $\widetilde{w_A}.v_A = 1$.

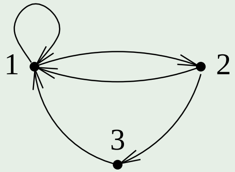
Exemple

$f(x)$ est en $o(g)$ si f/g tend vers 0 si $x \to \infty$.
$x^3 + 5x^2 + 8 = x^3 + o(x^3)$

Remarque

Possible d'obtenir des développements plus fins du terme d'erreur en l'exprimant à l'aide de la deuxième valeur propre (par module décroissant) de A.

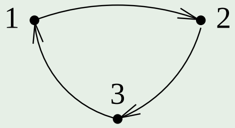
Exemple primitif



Pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, il existe une constante $d_{i,j} > 0$ telle que le nombre $c_{i,j}(n)$ de chemins de longueur n joignant i à j satisfasse

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{i,j}(n)}{d_{i,j}\, \lambda_A^n} = 1.$$

EXEMPLE (NON PRIMITIF)



$$(c_{1,3}(n))_n = 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$$

est clairement une suite divergente. Ainsi, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{1,3}(n)}{\lambda_A^n}$$

n'existe pas !

Des combinaisons convenables de puissances des racines de l'unité s'annulent :

$$\frac{(e^{2i\pi/3})^n + (e^{4i\pi/3})^n + 1}{3} = 0, \text{ si } n \equiv 1, 2 \pmod 3.$$

RAPPEL

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $M \in \mathbb{C}_d^d$ zéros du polynôme minimum de M de multiplicité $m_1, \ldots, m_p$, alors $\forall k$,

$$(M^k)_{i,j} = \sum_{t=1}^{p} P_{i,j}^{(t)} \lambda_t^k$$

où $P_{i,j}^{(t)}$ est un polynôme de degré $< m_t$.

Ainsi, lorsqu'on considère un quotient comme $(M^k)_{i,j}/\lambda_M^k$, ne subsistent à la limite que les valeurs propres de module maximum.

Dans l'exemple, n'apparaissent que les trois racines de l'unité.

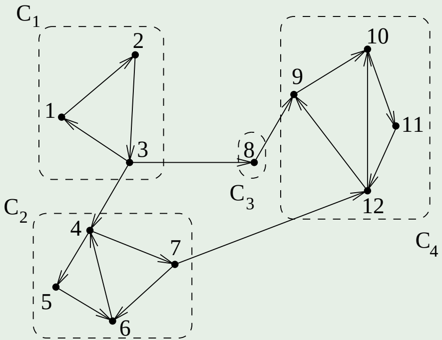
Graphe ayant plusieurs composantes f. connexes

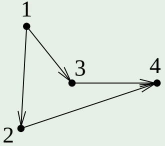
Estimer $c_{i,j}(n)$...

On considère le condensé $\mathcal{C}$ d'un graphe G (ou graphe acyclique des composantes) dont les sommets sont les composantes f. connexes de G.

Puisque le condensé est sans cycle, on peut ordonner ses sommets par tri topologique.

EXEMPLE





$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

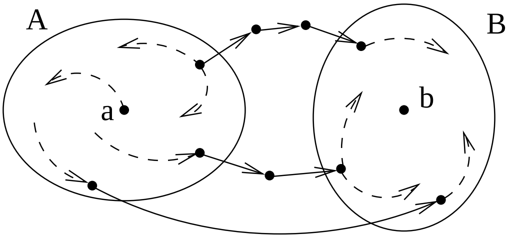
Le spectre d’un graphe est l’union des spectres de ses composantes connexes.

Hypothèse de travail

Toutes les composantes f. connexes sont **primitives**.

Soit un graphe fini possèdant deux composantes f. connexes primitives A et B et deux sommets $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \rightarrow b$.

Les chemins joignant un sommet de A à un sommet de B sont en nombre fini et de longueur bornée (seuls a et b sont dans $A \cup B$).



Si λ_A et λ_B sont les valeurs propres de Perron de A et de B respectivement, on en déduit que le nombre $c_{a,b}(n)$ de chemins de longueur n joignant a à b est proportionnel à

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} = \lambda_B^n \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^i .$$

- Si $\lambda_A = \lambda_B$, alors[1]

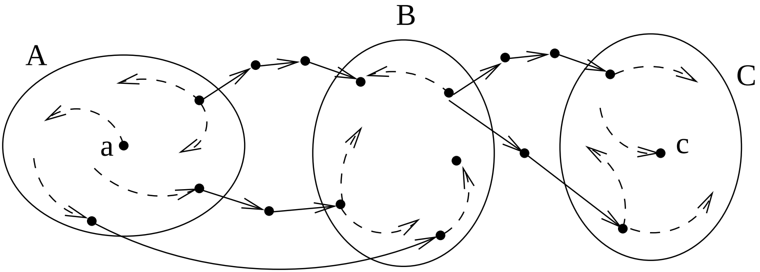
$$c_{a,b}(n) \asymp n\lambda^n$$

- Sinon, $\lambda_A \neq \lambda_B$ et

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} = \frac{\lambda_A^{n+1} - \lambda_B^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_B} \asymp [\max(\lambda_A, \lambda_B)]^n .$$

[1] On a $f \asymp g$ SSI il existe α et β t.q. $\alpha g \leq f \leq \beta g$.

Estimer le nombre $c_{a,B,c}(n)$ de chemins de longueur n joignant $a \in A$ à $c \in C$ <u>en passant</u> par un sommet quelconque de B.



Puisque le nombre de sommets de B est fini, le nombre de chemins recherché est proportionnel à

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \lambda_A^i \lambda_B^j \lambda_C^{n-i-j}. \tag{1}$$

Nous traitons trois cas.

• Si $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C$, alors (1) devient

$$\lambda_A^n \sum_{i=0}^{n} (n+1-i) = \lambda_A^n \left[(n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] \asymp n^2 \lambda_A^n.$$

• Si $\lambda_A = \lambda_B \neq \lambda_C$ (par symétrie, les autres cas se traitent de la même façon), alors (1) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda_A^j \lambda_C^{n-i-j}}_{\frac{\lambda_A^{n-i+1} - \lambda_C^{n-i+1}}{\lambda_A - \lambda_C}} = \frac{(n+1)\lambda_A^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_C} - \frac{\lambda_C}{\lambda_A - \lambda_C} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \lambda_C^{n-i}}_{\frac{\lambda_A^{n+1} - \lambda_C^{n+1}}{\lambda_A - \lambda_C}}.$$

Ainsi, si $\lambda_A = \lambda_B > \lambda_C$, on trouve

$$c_{a,B,c}(n) \asymp n\lambda_A^n$$

et si $\lambda_A = \lambda_B < \lambda_C$, on trouve

$$c_{a,B,c}(n) \asymp \lambda_C^n.$$

• Enfin, si λ_A, λ_B et λ_C 2 à 2 distincts, alors (1) devient

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-i} \lambda_B^j \lambda_C^{n-i-j}}_{\frac{\lambda_B^{n-i+1}-\lambda_C^{n-i+1}}{\lambda_B-\lambda_C}} = \frac{1}{\lambda_B - \lambda_C}\left(\lambda_B \sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \lambda_B^{n-i} - \lambda_C \sum_{i=0}^{n} \lambda_A^i \lambda_C^{n-i}\right)$$

et on obtient

$$c_{a,B,c}(n) \asymp [\max(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C)]^n.$$

En général

- Détecter la plus grande valeur de Perron λ des différentes composantes connexes par lesquelles passent les chemins d'intérêt
- Compter le nombre k de composantes ayant cette valeur propre comme valeur dominante.
- Le nombre de chemins de longueur n se comporte alors asymptotiquement comme $n^{k-1}\lambda^n$.

GOOGLE...

ALGORITHME DE PAGERANK : SERGEY BRIN, LARRY PAGE

Lorsqu'on effectue une recherche sur un mot clé donné, Google trie les pages contenant ce mot clé en se basant sur une mesure, appelée "PageRank", destinée à quantifier la qualité des pages et à déterminer si elles font ou non autorité dans le domaine envisagé.

Larry Page, Sergey Brin

- on accorde plus d'importance, i.e., un score de "PageRank" plus élevé, aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine, c'est-à-dire qui ont un PageRank élevé ;
- on accorde d'autant moins de crédit à une citation si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens.

UNE MATRICE "MONSTRUEUSE"

$G = (V, E)$ où les sommets $1, \ldots, n$ représentent les pages de l'Internet (en 2005, $n \sim 8.10^9$) et arc (i, j) SSI la page i possède un lien pointant vers la page j.

Le PageRank $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, \ldots, n\}$ serait donné par

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)} \tag{2}$$

formule récursive, on ne dispose pas *a priori* de méthode assurant

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

d'une solution $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ non triviale.

On peut supposer que les scores recherchés sont normalisés,

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

Rappel : modèle proposé

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)}$$

Réécriture matricielle ("H" comme "hyperlien"),

$$\pi = \pi H \tag{3}$$

où

$$H_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 0 & \text{si } d^+(i) = 0 \end{cases}$$

avec $A(G)$ la matrice d'adjacence du graphe G

On pertube le modèle

1. Pour se débarrasser des “puits”, i.e., des pages ne pointant vers aucune autre page et pour obtenir une matrice stochastique, on introduit une matrice S (“S” comme “stochastique”) définie par

$$S_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^{+}(i) & \text{si } d^{+}(i) > 0 \\ 1/n & \text{si } d^{+}(i) = 0. \end{cases}$$

2. Pour assurer la forte connexité du graphe, on construit une matrice G ("G" comme Google) donnée par la combinaison affine (et même convexe) suivante avec un réel $\alpha \in [0, 1]$ fixé

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) J/n$$

où $J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$. L'équation initiale (3) est remplacée par

$$\boxed{\pi = \pi G.}$$

(La matrice J/n est parfois appelée *matrice de téléportation*)

CHOIX HEURISTIQUE DE α

REMARQUE

Google attribue à α une valeur de $0,85$. Ce choix n'est pas arbitraire.

Au plus α est proche de 1, au mieux on approche le modèle “naturel” (3) proposé initialement : on diminue le rôle artificiel de la matrice de téléportation.

Cependant, on peut montrer que ce paramètre α contrôle la vitesse de convergence de la méthode de calcul développée et donc le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une estimation du vecteur π

Choix heuristique de α

Quand α tend vers 1, le nombre d'itérations devient prohibitif (cf. C. Meyer et A. Langville).

α	nombre d'itérations
$0,5$	34
$0,75$	81
$0,8$	104
$0,85$	142
$0,9$	219
$0,95$	449
$0,99$	2292
$0,999$	23015

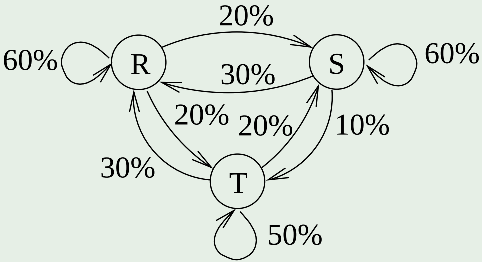
CHOIX HEURISTIQUE DE α

COMPROMIS

$\alpha = 0,85$ semble un bon compromis entre le caractère artificiel introduit par la matrice de téléportation et la masse de calculs à réaliser.

Par une discussion plus fine sur les valeurs propres : au plus α est proche de 1, au plus π est sensible aux petites pertubations de la matrice *H* (gênant vu la grande volatilité du web et de sa structure)

EXEMPLE, CHAÎNE DE MARKOV



$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Exemple, chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,6 & 0,1\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,39 & 0,4 & 0,21\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0,39 & 0,4 & 0,21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,6 & 0,1\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,417 & 0,36 & 0,223\end{pmatrix}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\end{pmatrix} P^n = {\color{red}???}$$

LE MODÈLE DU SURFEUR

INTERPRÉTATION DE LA “GOOGLE-MATRICE” G

un surfeur qui, se trouvant sur une page quelconque, a deux choix possibles

- avec une probabilité α, il clique au hasard et de manière uniforme sur l'un des liens de la page pour changer de page.
- Soit, avec une probabilité $1 - \alpha$, il clique au hasard et de manière uniforme sur l'une des n pages de l'Internet tout entier.

G_{ij} représente la probabilité de transition lorsque le surfeur se trouve sur la page i de passer à la page j.

INTERPRÉTATION

Partant d'une distribution initiale de probabilités, par exemple $\pi^{(0)} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, l'application de G^k permet d'estimer la probabilité de notre surfeur de se trouver sur l'une des pages $1, \dots, n$ après k clics,

$$\pi^{(k)} = \pi^{(0)} G^k.$$

$\longrightarrow$ nous verrons que l'utilisation de cette matrice G (à la place de H) assure l'existence et l'unicité d'une distribution limite π.

MODÈLES INITIAL ET PERTURBÉ

Par rapport à l'équation initiale (2), l'emploi de la matrice G donne la formule suivante pour la détermination des "nouveaux" π_j qui seront effectivement calculés

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, (\alpha \, S_{ij} + (1-\alpha) \, \frac{1}{n})$$

$$= \alpha \sum_{i \in \mathrm{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)} + \frac{1}{n} \left(1 - \alpha + \alpha \sum_{i : d^+(i)=0} \pi_i \right) .$$

Nous nous sommes donc éloignés quelque peu du modèle initialement proposé mais ces modifications vont permettre un calcul efficace (et assurant l'existence et l'unicité d'une solution) !

Les matrices S, J/n et G sont stochastiques, autrement dit, la somme des éléments d'une ligne quelconque vaut 1.

Lemme

Si M est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre dominante de M.

Soit $M \in \mathbb{Q}_r^r$. En multipliant tous les éléments de M par le p.p.c.m. γ des dénominateurs des éléments de M, la matrice

$$M' = \gamma M$$

obtenue est telle que la somme des éléments de chaque ligne vaut $\gamma \in \mathbb{N}$.

Il s'agit donc de la matrice d'adjacence d'un graphe γ-régulier. Comme nous le verrons, γM possède γ comme valeur propre dominante (i.e., toute autre valeur propre μ est telle que $|\mu| \leq \gamma$). La conclusion suit aisément en divisant par γ.

Résultat à venir...

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté k-régulier. Alors

- k est une valeur propre de G,
- pour toute valeur propre λ de G, on a $|\lambda| \leq k$,
- si G est f. connexe, k est valeur propre simple (i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

Par construction, la matrice G est primitive car $G > 0$.

On peut appliquer le théorème de Perron,
or par le lemme précédent, 1 est valeur propre dominante de G.

Par conséquent, la valeur propre dominante 1 est simple et il existe un unique vecteur colonne $x > 0$ (resp. ligne $y > 0$) tel que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ (resp. } \sum_{i=1}^{n} y_i = 1) \quad \text{et} \quad Gx = x \text{ (resp. } yG = y).$$

REMARQUE

v.p. simple $\Rightarrow$ unicité de la solution “normalisée”

Conclusion

Déterminer le vecteur des “PageRanks” π revient à chercher le vecteur propre y de Perron à gauche de G (ou le vecteur propre de Perron à droite de $\widetilde{G}$).

En appliquant le résultat asymptotique

$$\boxed{\text{“}A^k = \lambda_A^k v_A \widetilde{w_A} + o(\lambda_A^k), \quad \widetilde{w_A} v_A = 1\text{”}}$$

- $e = (1 \cdots 1)\widetilde{}$ est un vecteur propre à droite de G de valeur propre 1 (G est stochastique)
- π est un vecteur propre à gauche de G de valeur propre 1
- $\pi e = 1$ (scores sont normalisés)

$$G^k = e\pi + o(1) \text{ i.e., } \lim_{k\to\infty} G^k = e\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Méthode itérative pour estimer π

Soit

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & \cdots & p_n^{(0)} \end{pmatrix} > 0 \text{ vecteur t.q. } \sum_i p_i^{(0)} = 1.$$

$\forall k \geq 1$, on pose $p^{(k)} = p^{(0)} G^k = p^{(k-1)} G$.

Thèse : Montrer que

$$\lim_{k \to \infty} p^{(k)} = \pi$$

$\Rightarrow$ il suffira de

- partir d'une distribution initiale
- d'appliquer G de manière itérative
- jusqu'à la précision voulue mesurée par $||p^{(k)} - p^{(k-1)}||$

Méthode itérative pour estimer π

Thèse : $\lim_{k\to\infty} p^{(k)} = \pi$

Au vu de (4),

$$\lim_{k\to\infty} G^k = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} =: P$$

et

$$[p^{(0)}P]_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} \pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)}}_{=1} = \pi_j .$$

En pratique

Une centaine d'itérations suffisent pour obtenir une approximation utilisable et ce calcul peut être réalisé hors ligne, par exemple, une fois par mois, pour mettre à jour le vecteur des scores.

En pratique, on se ramène à la matrice creuse H (possédant de nombreux zéros) :

$$\begin{aligned}
p^{(k)} &= p^{(k-1)}G \\
&= p^{(k-1)}(\alpha S + (1-\alpha)\frac{J}{n}) \\
&= \alpha\, p^{(k-1)}S + (1-\alpha)\frac{\widetilde{e}}{n} \\
&= \alpha\, p^{(k-1)}(H + a\frac{\widetilde{e}}{n}) + (1-\alpha)\frac{\widetilde{e}}{n} \\
&= \alpha\, p^{(k-1)}H + (\alpha\, p^{(k-1)}\, a + (1-\alpha))\frac{\widetilde{e}}{n}
\end{aligned}$$

où

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

est tel que $a_i = 1$ si $d^+(i) = 0$ et $a_i = 0$ si $d^+(i) > 0$.