Géométrie

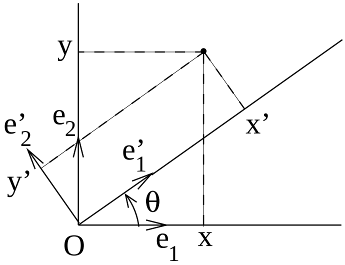
Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2006–2007

Si l'équation $ax^2 + 2hxy + by^2 + fx + gy + c = 0$ contient un terme en xy.

Une rotation convenable permet d'éliminer ce terme.



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{cases}$$

Léquation $ax^2 + 2h{\color{red}xy} + by^2 + fx + gy + c = 0$ devient dans le nouveau repère

$$\begin{aligned} & a(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + 2h(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ + \; & b(x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + f(x\cos\theta - y\sin\theta) \\ + \; & g(x\sin\theta + y\cos\theta) + c = 0. \end{aligned}$$

Coefficient du terme en xy

$$-2a\cos\theta\sin\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (b-a)\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta.$$

Choisir ${\color{blue}\theta}$ pour l'annuler.

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 3 = 0$$

Une rotation d'angle θ a pour effet de modifier le coefficient du terme en xy en

$$-8\sin 2\theta - 6\cos 2\theta.$$

Choisir θ tel que $\mathrm{tg}\, 2\theta = -3/4$,

$$\frac{2\mathrm{tg}\,\theta}{1-\mathrm{tg}^2\,\theta} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\mathrm{tg}^2\,\theta - 8\mathrm{tg}\,\theta - 3 = 0.$$

On peut donc prendre $\mathrm{tg}\,\theta = 3$ ($\theta \simeq 71^\circ$) ou $-1/3$.

Puisque $1 + \mathrm{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta$,

$\cos\theta = 1/\sqrt{10}$ et $\sin\theta = 3/\sqrt{10}$.

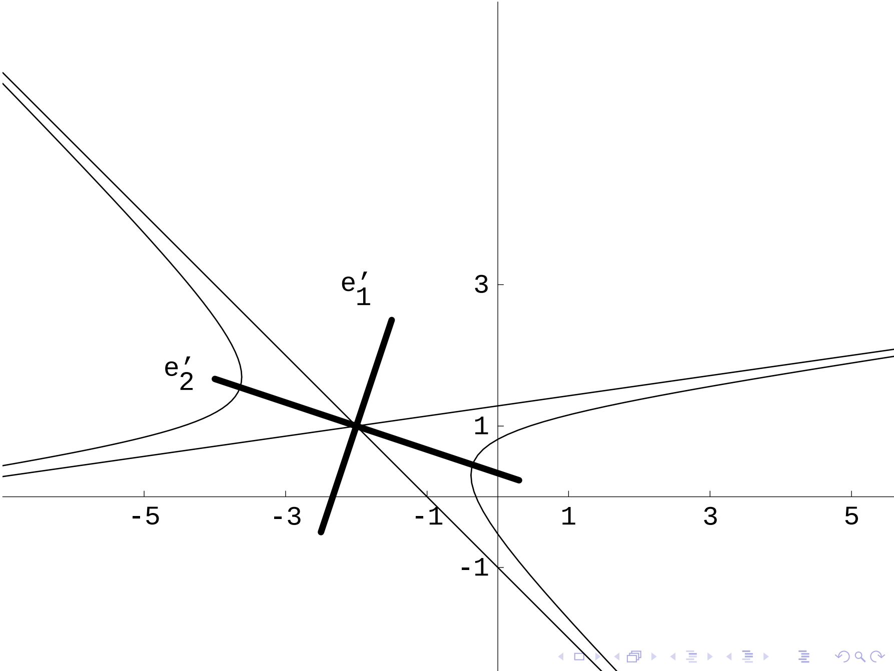
De là, en effectuant la rotation, on trouve comme équation

$$\begin{aligned}(x\frac{1}{\sqrt{10}} - y\frac{3}{\sqrt{10}})^2 - 6(x\frac{1}{\sqrt{10}} - y\frac{3}{\sqrt{10}})(x\frac{3}{\sqrt{10}} + y\frac{1}{\sqrt{10}})\\ -7(x\frac{3}{\sqrt{10}} + y\frac{1}{\sqrt{10}})^2 + 10(x\frac{1}{\sqrt{10}} - y\frac{3}{\sqrt{10}})\\ +2(x\frac{3}{\sqrt{10}} + y\frac{1}{\sqrt{10}}) + 3 = 0.\end{aligned}$$

En changeant l'échelle ($x \to x' = x/\sqrt{10}$ et $y \to y' = y/\sqrt{10}$) et en développant les carrés, on obtient

$$80x^2 - 20y^2 - 16x + 28y - 3 = 0$$

On s'est ramené au problème précédent.



e_1'
e_2'
3
1
-1
-5
-3
-1
1
3
5

Remarque

$$\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

matrice symétriqe réelle (diagonalisable par une matrice orthogonale) possède

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres normés. Avec ceux-ci, on peut reconstruire rapidement la matrice de rotation désirée.

Introduction aux surfaces

Définition

Un paramétrage (Ω, P) de classe C_k est la donnée d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et d'une fonction $P(u,v)$ de classe C_k à valeurs dans l'espace affin euclidien à 3 dimensions.

- P injectif
- D_uP et D_vP linéairement indépendants $\forall (u,v) \in \Omega$

OU $D_uP \wedge D_vP \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Omega$.

portion régulière de surface $\{P(u,v) \mid (u,v) \in \Omega\}$.

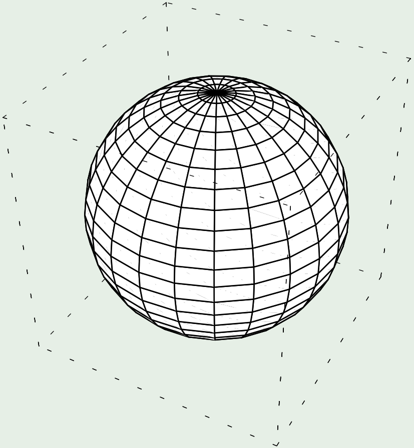
Deux paramétrages (Ω, P) et (Ω', P') sont équivalents s'il existe un changement de variables régulier d'ordre k entre Ω et Ω' tel que

$$P'(u',v') = P(u(u',v'), v(u',v')).$$

Exemple

Soit $\Omega =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et la fonction P définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_1(u,v) & = & \sin u \cos v \\ P_2(u,v) & = & \sin u \sin v \\ P_3(u,v) & = & \cos u \end{array} \right. .$$



Exemple

Soit $\Omega =]0,\pi[\times]0,2\pi[$ et la fonction P définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_1(u,v) & = & \sin u \cos v \\ P_2(u,v) & = & \sin u \sin v \\ P_3(u,v) & = & \cos u \end{array}\right. .$$

On a

$$D_uP = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

$$D_vP = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

et

$$D_uP \wedge D_vP = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 \sin v, \sin u \cos u).$$

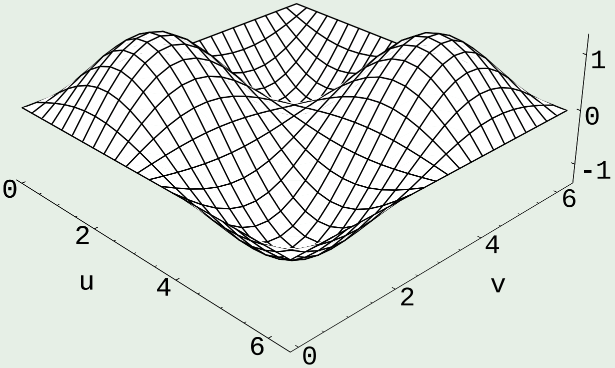
Il est facile de vérifier que $D_uP \wedge D_vP \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Omega$.

Exemple 2

Soit $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ et la fonction

$$P(u, v) = (u, v, \sin u \sin v).$$

Un paramétrage de ce type est appelé paramétrage par des coordonnées.



DÉFINITION

Surface : union de P.R.S. t.q. l'intersection de deux quelconques d'entre elles soit une sous-portion régulière de surface de chacune d'entre elles qu'on peut alors rapporter indifféremment aux paramètres de l'une ou de l'autre.

Dans le cas d'un paramétrage par des coordonnées $P(u,v) = (u,v,f(u,v))$, la relation $z = f(x,y)$ est une équation cartésienne de la portion régulière de surface.

Dans le cas d'un paramétrage quelconque

$$P(u,v) = (P_1(u,v), P_2(u,v), P_3(u,v)),$$

si on élimine les paramètres u et v, on obtient une relation $F(x,y,z) = 0$ à laquelle satisfont les points de la portion régulière de surface.

L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une relation $F(x,y,z) = 0$ n'est en général pas une P.R.S. mais une surface

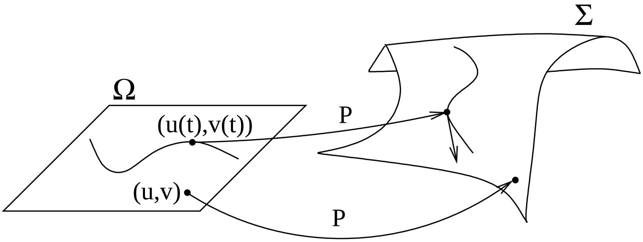
TANGENTE

Soit (Ω, P) un paramétrage d'une P.R.S. Σ.

Si $u(t)$ et $v(t)$ sont deux fonctions C_1 dans $]a, b[\subset \mathbb{R}$ t.q.

$$(u(t), v(t)) \in \Omega, \ \forall t \in]a, b[,$$

$P(u(t), v(t))$ est un a.r.c. situé sur Σ
(à condition que $D_t u$ et $D_t v$ ne s'annulent pas simultanément, ce que nous supposerons toujours).



La direction de la tangente à cet a.r.c. au point $P(u(t), v(t))$ s'obtient en dérivant $P(u(t), v(t))$ par rapport à t,

$$[D_t u]_t \, [D_u P]_{(u(t),v(t))} + [D_t v]_t \, [D_v P]_{(u(t),v(t))}.$$

Ce vecteur est toujours non nul car, vu nos hypothèses, $D_u P$ et $D_v P$ sont linéairement indépendants et $D_t u$ et $D_t v$ ne s'annulent pas simultanément.

Si (u_0, v_0) appartient à Ω et si $P(u_0, v_0)$ est un point de Σ, alors les vecteurs tangents au point $P(u_0, v_0)$ des courbes situées sur Σ et passant par $P(u_0, v_0)$ sont combinaisons linéaires de

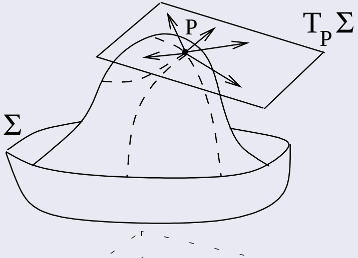
$$[D_u P]_{(u_0,v_0)} \quad \text{et} \quad [D_v P]_{(u_0,v_0)}.$$

Définition

Le plan $T_{P(u_0,v_0)}\Sigma$

$$P(u_0, v_0) + \rangle [D_u P]_{(u_0,v_0)}, [D_v P]_{(u_0,v_0)} \langle$$

est le plan tangent à Σ au point $P(u_0, v_0)$.



Définition

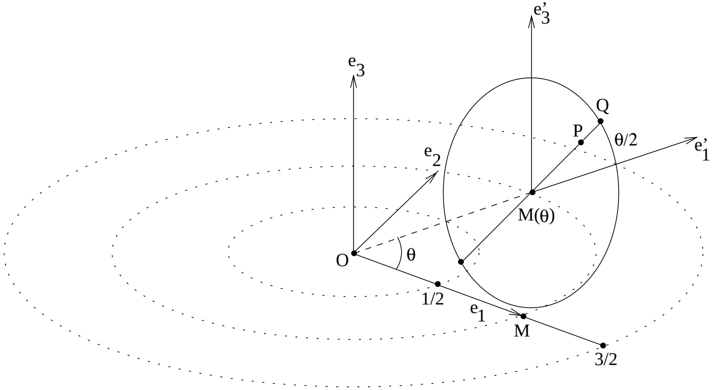
Associée au paramétrage (Ω, P), une normale unitaire au plan tangent (ou à Σ au point $P(u_0, v_0)$) est donnée par

$$N_{(u_0,v_0)} = \frac{[D_u P]_{(u_0,v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0,v_0)}}{\left|[D_u P]_{(u_0,v_0)} \wedge [D_v P]_{(u_0,v_0)}\right|}.$$

Un autre paramétrage équivalent pourrait donner $-N$. Choisir l'une de ces deux normales revient à orienter la P.R.S.

Définition

Une surface orientable est une surface dont la normale unitaire N choisie dépend continûment de $P \in \Sigma$.

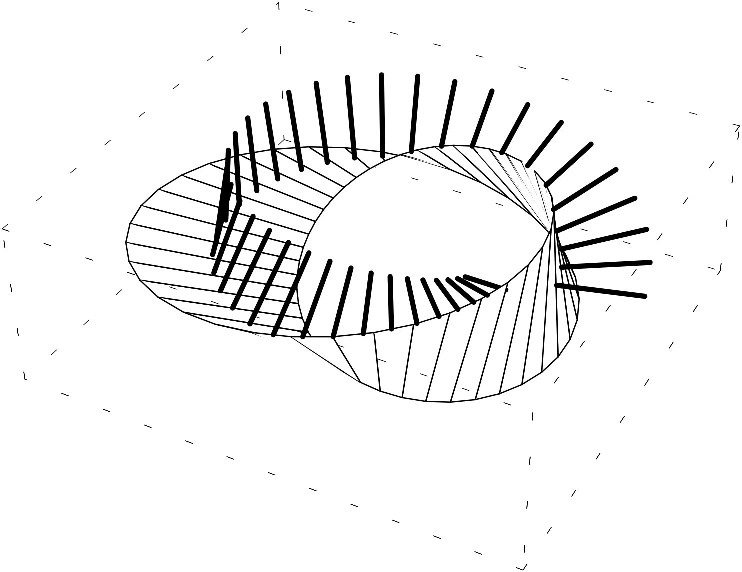


paramétrage du ruban de Moebius comme suit

$$P(\theta, t) = M(\theta) + t\,(\cos\frac{\theta}{2}\,e'_1 + \sin\frac{\theta}{2}\,e'_3)$$

pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $t \in]-1/2, 1/2[$

$$\left((1 + t\cos\frac{\theta}{2})\,\cos\theta,\ (1 + t\cos\frac{\theta}{2})\,\sin\theta,\ t\sin\frac{\theta}{2} \right)$$



cylindre (généralisé) en translatant une courbe le long d'une direction fixée.

Soit $(]a,b[,P)$ un a.r.c. Γ et h un vecteur non nul dirigé suivant la direction de translation. Ainsi, on obtient les points du cylindre par

$$Q(u,v) = P(u) + v\,h, \quad u \in]a,b[, v \in]c,d[.$$

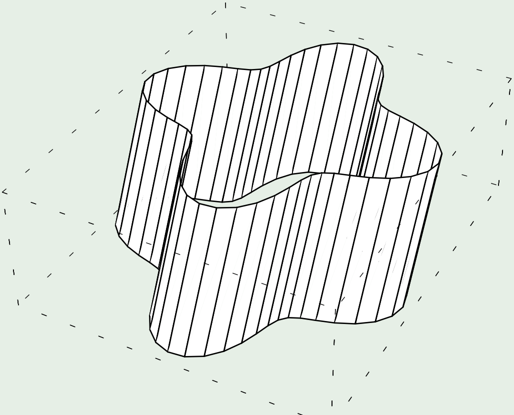
On appelle Γ la directrice et les droites parallèles à h, les génératrices.

P.R.S. si le vecteur D_uP tangent à l'a.r.c. Γ et h soient linéairement indépendants.

Exemple (surface cylindrique)

vecteur c de composantes $(0, 1/2, 1)$
courbe plane $((1+\frac{1}{4}\cos 4u)\cos u, (1+\frac{1}{4}\cos 4u)\sin u)$ située dans le plan $O+\rangle e_1, e_2\langle$.

$$\left((1+\frac{1}{4}\cos 4u)\cos u, (1+\frac{1}{4}\cos 4u)\sin u+\frac{v}{2}, v\right)$$



Cône (généralisé) : union des droites passant par un point fixe Q et s'appuyant sur un a.r.c. Γ de paramétrage (Ω, P) ne contenant pas Q.

$$R(u, \lambda) = (1 - \lambda)Q + \lambda P(u)$$

avec $u \in \Omega$ et on prend en général λ dans $]0, +\infty[$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $]0, 1[$ ou encore $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

Les droites $QP(u)$ sont appelées les génératrices.

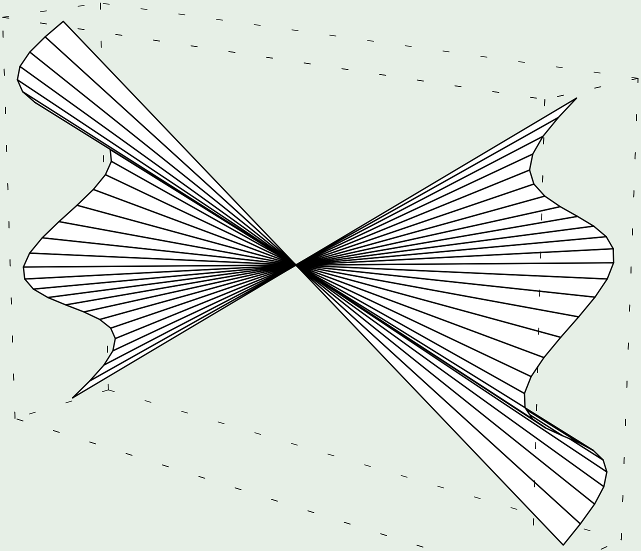
Pour assurer à R d'être injectif, il faut que $\overrightarrow{QP}(u)$ et $\overrightarrow{QP}(u')$ soient linéairement indépendants pour tous $u, u' \in \Omega$, $u \neq u'$. (En particulier, c'est pour cette raison que $\lambda \neq 0$.) Les dérivées partielles sont

$$D_u R = \lambda D_u P \quad \text{et} \quad D_\lambda R = -Q + P(u) = \overrightarrow{QP}(u).$$

Ainsi, pour avoir une P.R.S., il faut que $\overrightarrow{QP}(u)$ et $D_u R$ soient linéairement indépendants pour tout $u \in \Omega$.

Exemple (surface conique)

$$(1-\lambda, \lambda \sin u, \lambda u), u \in]-2\pi, 2\pi[, v \in]-1, 1[\setminus \{0\}$$

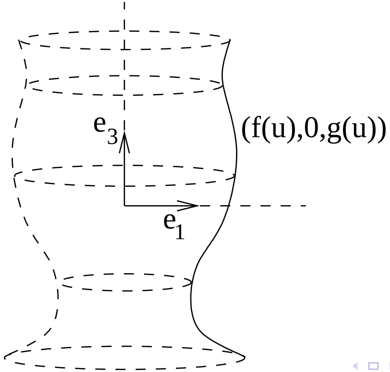


SURFACES DE RÉVOLUTION

rotation d'un a.r.c. plan Γ autour d'un axe $\mathcal{D}$ situé dans le plan de la courbe.

courbe Γ dans le plan $O + \rangle e_1, e_3 \langle$, $\mathcal{D} = O + \rangle e_3 \langle$.
Un point de Γ est de la forme $P(u) = (f(u), 0, g(u)),\ u \in \Omega$
en effectuant la rotation, on obtient

$$Q(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),\ u \in \Omega, v \in]0, 2\pi[.$$



Surfaces de révolution

$$Q(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\ u \in \Omega, v \in]0, 2\pi[.$$

$$D_uQ = ([D_uf]_u \cos v, [D_uf]_u \sin v, [D_ug]_u)$$

$$D_vQ = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0)$$

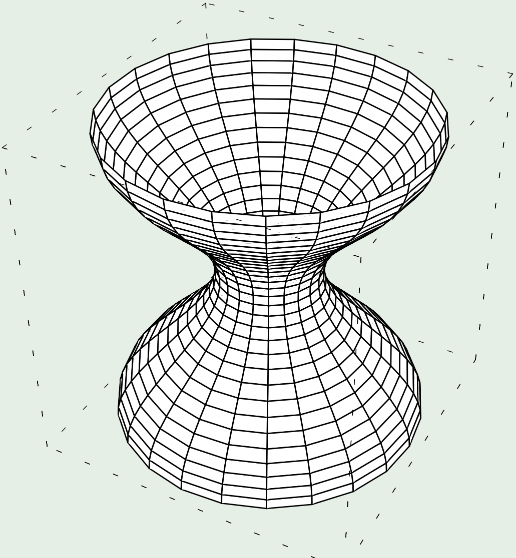
$$D_uQ \wedge D_vQ = (f(u)[D_ug]_u \cos v, -f(u)[D_ug]_u \sin v, f(u)[D_uf]_u)$$

$$|D_uQ \wedge D_vQ|^2 = f^2((D_uf)^2 + (D_ug)^2).$$

Puisque Γ est un a.r.c., $(D_uf)^2 + (D_ug)^2$ n'est jamais nul et donc, on a une portion régulière de surface si $f(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$, i.e., si Γ n'intersecte pas l'axe de rotation.

EXEMPLE (SURFACE DE RÉVOLUTION)

$$((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, u)\,,\ u, v \in]0, 2\pi[$$



Soient Γ un a.r.c. de paramétrage (Ω, P) et $c : \Omega \to \overrightarrow{A}$ une fonction à valeurs vectorielles.

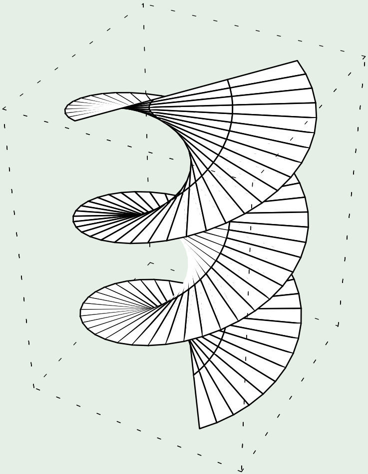
Une surface règlée est une surface engendrée par une famille de droites à un paramètre. Elle est donc de la forme

$$Q(u,\lambda) = P(u) + \lambda c(u),\ u \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il faudra vérifier que $D_u Q$ et $D_\lambda Q$ sont linéairement indépendants. On appelle encore Γ la directrice et les droites de la forme $P(u) + \rangle c(u) \langle$, les génératrices.

EXEMPLE (SURFACE RÉGLÉE)

si $P(u) = (0, 0, u)$ et $c(u)$ est un vecteur de coordonnées $(\cos u, \sin u, 0)$, alors on obtient une surface règlée appelée *conoïde droit* ou *hélicoïde*



Surfaces quadriques

surfaces possédant une équation cartésienne de la forme

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2a_4xy+2a_5yz+2a_6xz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$$

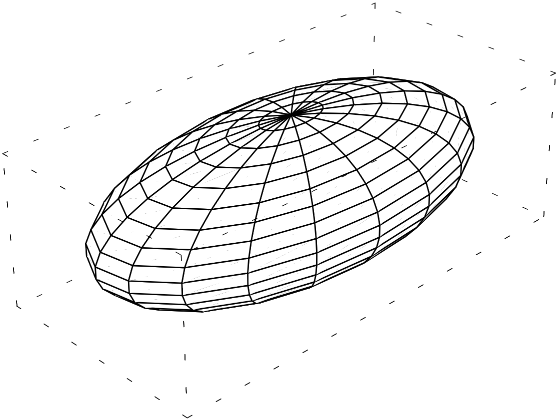
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0.$$

Théorème

équation d'une quadrique non vide, sous forme canonique

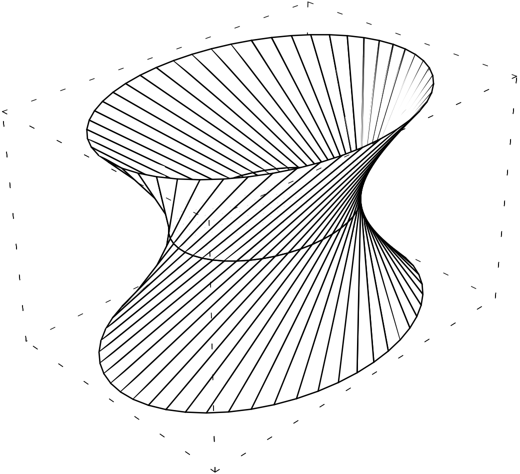
1. $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$, ellipsoïde,
2. $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$, hyperboloïde à une nappe,
3. $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$, hyperboloïde à deux nappes,
4. $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z$, paraboloïde elliptique,
5. $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$, paraboloïde hyperbolique,
6. $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0$, cône,
7. $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$, cylindre elliptique,
8. $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$, cylindre hyperbolique,
9. $\frac{x^2}{p^2} = y$, cylindre parabolique,
10. $x = 0$, plan,
11. $x^2 = p^2$, deux plans parallèles,

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$



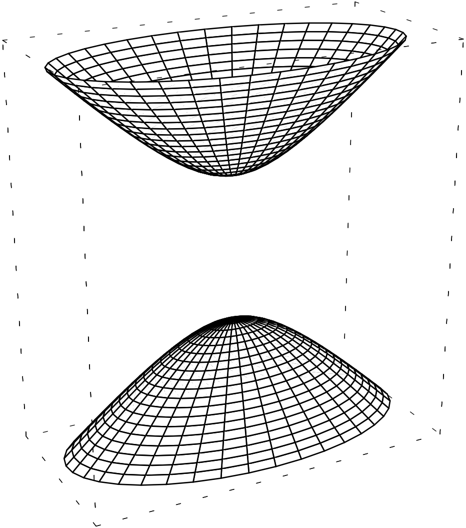
Ellipsoïde.

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$$



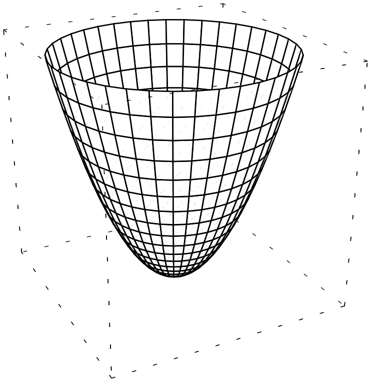
Hyperboloïde à une nappe.

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1$$



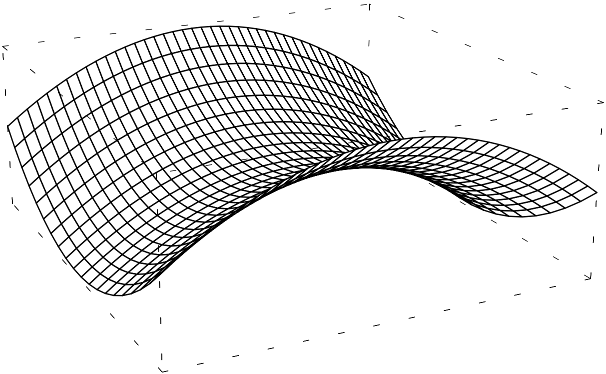
Hyperboloïde à deux nappes.

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z$$



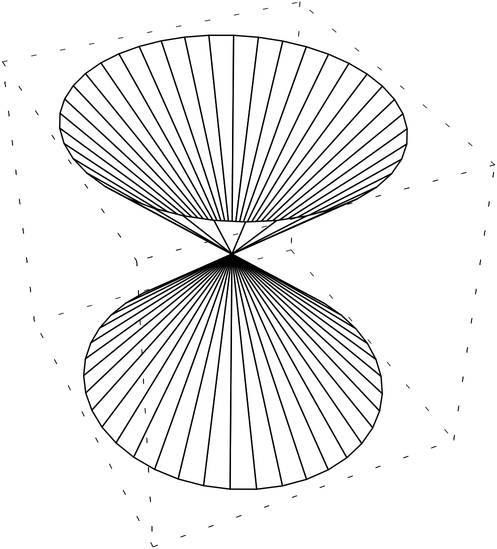
Paraboloïdes elliptique

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$



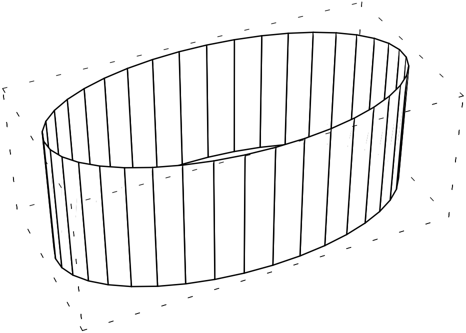
Paraboloïde hyperbolique.

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=0$$



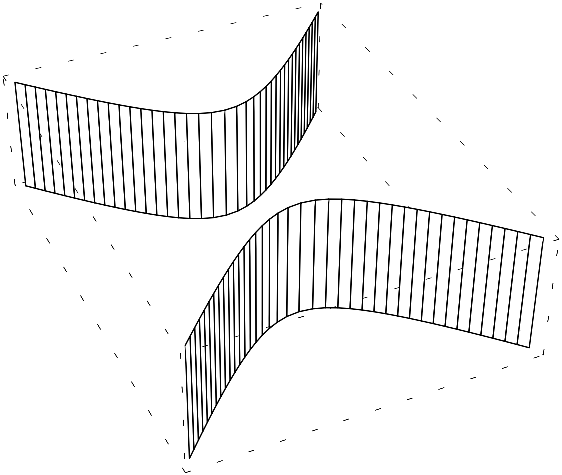
Cône.

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$



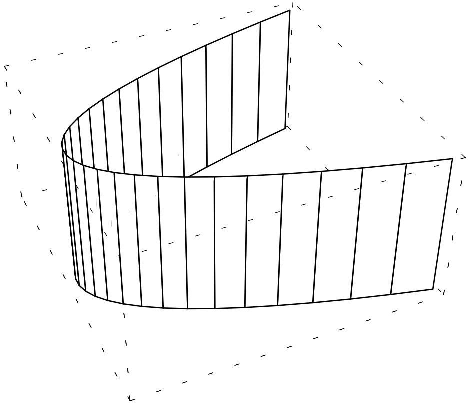
Cylindres elliptique.

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$$

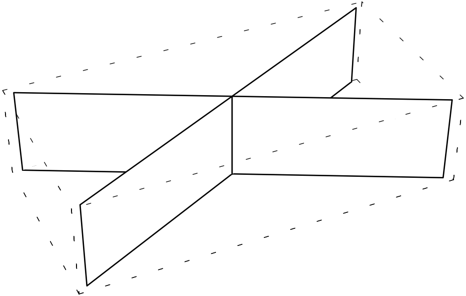


Cylindre hyperbolique.

$$\frac{x^2}{p^2} = y$$



Cylindre parabolique.



Deux plans sécants.