Algèbre linéaire - Réduction d'endomorphismes

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2006–2007

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme ayant χ_T pour polynôme caractéristique. On a

$$\chi_T(T) = 0.$$

Autrement dit, tout endomorphisme annule son polynôme caractéristique.

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Le cas $n = 1$ est immédiat :

Dans un espace vectoriel de dimension 1, un endomorphisme est de la forme $T = \alpha\, id$.

Ainsi, $\chi_T(\mu) = \alpha - \mu$ et $\chi_T(T) = \alpha\, id - T = 0$.

OK $n-1$ et OK ? pour n ?
Soient λ v.p. de T et e_1 vecteur p. non nul de v.p. λ,
on considère une base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E.

Dans cette base, T se représente par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est une matrice $(n-1) \times (n-1)$.

$$\chi_T(\mu) = \det(T - \mu\, id) = \det(A - \mu I)$$

$$\chi_T(\mu) = (\lambda - \mu) \det(B - \mu I) = (\lambda - \mu)\, Q(\mu)$$

où Q est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme défini sur un espace vectoriel de dimension $n-1$ et représenté par B. (par hyp. de récurrence, $Q(B) = 0$)

$$\chi_T(\mu) = (\lambda - \mu)\, Q(\mu)$$

Remarque

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Q(A) = \begin{pmatrix} Q(\lambda) & * \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}.$$

$$\chi_T(A) = (\lambda I - A)\, Q(A) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda I - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(\lambda) & * \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence, $Q(B) = 0$ et donc $\chi_T(A) = 0$.

Puisque $\chi_T(A)$ représente l'endomorphisme $\chi_T(T)$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$, cela signifie que $\chi_T(T) = 0$.

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\det(A - \lambda I) = -5 - 30\lambda - 13\lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4$$

et on peut vérifier que

$$-5I - 30A - 13A^2 + 2A^3 + A^4 = 0.$$

COROLLAIRE (IDÉAL ANNULATEUR)

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble

$$I = \{P \in \mathbb{C}[z] \mid P(T) = 0\}$$

est un idéal propre de $\mathbb{C}[z]$.

Si $P, Q \in I$, i.e., $P(T) = 0, Q(T) = 0$, alors
$(P + Q)(T) = P(T) + Q(T) = 0$, i.e., $P + Q \in I$

Si $P \in I$, $Q \in \mathbb{C}[z]$, alors $(P.Q)(T) = P(T).Q(T) = 0$, i.e., $P.Q \in I$

Il s'agit d'un idéal contenant au moins un polynôme non nul, à savoir le polynôme caractéristique de T.

Il est propre car $1 \notin I$ et donc $I \neq \mathbb{C}[z]$.

Puisque $I = \{P \in \mathbb{C}[z] \mid P(T) = 0\}$ est un idéal propre d'un anneau principal ($\mathbb{C}[z]$), il existe un polynôme monique $\mathcal{M}_T$ tel que

$$I = \langle \mathcal{M}_T \rangle.$$

On l'appelle le polynôme minimum de T.

REMARQUE

Si $P(T) = 0$, alors $P \in I = \langle \mathcal{M}_T \rangle$, i.e.,

$$\exists Q \in \mathbb{C}[z] : P = Q.\mathcal{M}_T$$

En particulier, le polynôme caractéristique de T est un multiple de $\mathcal{M}_T$.

Donc, tout zéro de $\mathcal{M}_T$ est zéro de χ_T.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-(\lambda - 2)^3(\lambda - 3)^2$ pour polynôme caractéristique et $-(\lambda - 2)^{\mathbf{2}}(\lambda - 3)^2$ pour polynôme minimum.

A ce stade, on peut se borner à vérifier que $(A - 2I)^2(A - 3I)^2 = 0$.

Proposition

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de T et le polynôme minimum de T ont les mêmes zéros.

Soit χ_T (resp. $\mathcal{M}_T$) le polynôme caractéristique (resp. minimum) de T.

Soit λ un zéro de χ_T, i.e., une v.p. de T.

Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Par conséquent

$$\underbrace{\mathcal{M}_T(T)}_{=0} x = \mathcal{M}_T(\lambda)\, x$$

et puisque x est non nul, $\mathcal{M}_T(\lambda) = 0$.

Nous savons à présent que les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de T sont exactement les zéros de son polynôme minimum. Si

$$\det(T - \lambda I) = (-1)^n \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{\mu_j} = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - \lambda)^{\mu_j}$$

$$\mathcal{M}_T(\lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

alors $1 \leq m_j \leq \mu_j$.

En particulier, si toutes les valeurs propres de T sont simples, le polynôme minimum de T coïncide avec son polynôme caractéristique.

Définition

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable si

$$T(F) \subset F.$$

Par exemple, les espaces propres de T sont stables pour T.

$x \in E_\lambda$ SSI $(T - \lambda id)x = 0$.

Ainsi, si $x \in E_\lambda$, alors le vecteur Tx appartient encore à E_λ car

$$(T - \lambda id)Tx = T(T - \lambda id)x = 0$$

Pourquoi vouloir des sous-espaces stables ?

Soient une base $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{C}^4$,
$G_1 = \rangle u_1, u_2 \langle$, $G_2 = \rangle u_3, u_4 \langle$ et $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un endomorphisme t.q. $Tu_1 = u_2$, $Tu_2 = u_1 + u_2$, $Tu_3 = 0$ et $Tu_4 = u_3$.

$TG_1 \subset G_1$ et $TG_2 \subset G_2$ et la représentation de T dans la base U est

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Remarque générale

- si $E = G_1 \oplus \cdots \oplus G_t$ et
- si les sous-espaces vectoriels G_i sont stables pour T,

alors la représentation de T dans une base $g_{1,1}, \ldots, g_{1,d_1}, \ldots, g_{t,1}, \ldots, g_{t,d_t}$ où $g_{i,j} \in G_i$ pour tout i, sera une matrice composée diagonale

$$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_t) \quad \text{avec } A_i \in \mathbb{C}^{d_i}_{d_i}.$$

C'est notre but de représenter T de la manière la plus SIMPLE possible...

- Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont stables **;-)**
- Si T est diagonalisable, $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ **;-))**

Par contre, si T n'est pas diagonalisable **:-((**

$$E \supsetneq E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

CONSTRUCTION À VENIR...

On va introduire des sous-espaces $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_p}$
qui sont stables et t.q. $E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}$

$$\boxed{T_j = T - \lambda_j\, id, \quad j = 1, \ldots, p.}$$

polynômes de T, ils commutent entre eux et avec T.

Thm. de stabilisation des images et des noyaux

Soit m_j, la multiplicité de λ_j comme zéro du polynôme minimum de T. On a

$$\ker(T_j^0) \subsetneq \ker(T_j) \subsetneq \ker(T_j^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(T_j^{m_j}) = \ker(T_j^{m_j+1}) = \ker(T_j^{m_j}$$

et

$$\mathrm{Im}(T_j^0) \supsetneq \mathrm{Im}(T_j) \supsetneq \mathrm{Im}(T_j^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(T_j^{m_j}) = \mathrm{Im}(T_j^{m_j+1}) = \mathrm{Im}(T_j^{m_j+2})$$

De plus,

$$E = \ker(T_j^{m_j}) \oplus \mathrm{Im}(T_j^{m_j}).$$

Définition

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_j de T, le sous-espace vectoriel

$$F_{\lambda_j} = F_{\lambda_j}(T) = \ker(T_j^{m_j})$$

où m_j est la multiplicité de λ_j comme zéro du polynôme minimum de T.

$F_{\lambda_j} = \ker(T_j^k)$ pour tout $k \geq m_j$ et en particulier, pour k égal à la multiplicité algébrique de T.

Remarque

ne pas confondre les sous-espaces propres et caractéristiques

$$E_{\lambda_j} = \ker(T_j) \quad \text{et} \quad F_{\lambda_j} = \ker(T_j^{m_j})$$

vu le théorème précédent, $E_{\lambda_j} \subset F_{\lambda_j}$, l'inclusion étant stricte SSI $m_j > 1$.

Propriété (1)

Les sous-espaces caractéristiques sont stables pour T.

x appartient à F_{λ_j} SSI $T_j^{m_j} x = 0$.
De là, Tx appartient encore à F_{λ_j} car

$$T_j^{m_j} Tx = TT_j^{m_j} x = 0$$

et rappelons que $T_j^{m_j}$ et T commutent.

SOUHAIT...

Propriété (2)

$E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}$

$\longrightarrow$ Projecteurs spectraux

PROPRIÉTÉ (1)

Les sous-espaces caractéristiques sont stables pour T.

x appartient à F_{λ_j} SSI $T_j^{m_j} x = 0$.
De là, Tx appartient encore à F_{λ_j} car

$$T_j^{m_j} Tx = TT_j^{m_j} x = 0$$

et rappelons que $T_j^{m_j}$ et T commutent.

SOUHAIT...

PROPRIÉTÉ (2)

$E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}$

$\longrightarrow$ Projecteurs spectraux

Notations

les valeurs propres de T sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, leur multiplicité comme zéro du polynôme caractéristique (resp. minimum) de T sont $\mu_1, \ldots, \mu_p$ (resp. $m_1, \ldots, m_p$).

On décompose $1/\mathcal{M}_T(\lambda)$ en fractions rationnelles propres

$$\frac{1}{\mathcal{M}_T(\lambda)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{A_j(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}, \qquad \text{avec } \deg A_j < m_j.$$

En réduisant au même dénominateur, on a

$$1 = \sum_{j=1}^{p} A_j(\lambda)\,(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots \widehat{[j]} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et donc sur $\mathbb{C}$.

Cette identité reste valable si on remplace λ par T et donc

$$id = \sum_{j=1}^{p} A_j(T)\,T_1^{m_1} \cdots \widehat{[j]} \cdots T_p^{m_p}.$$

$$\boxed{P_j = A_j(T)\,T_1^{m_1} \cdots \widehat{[j]} \cdots T_p^{m_p}.}$$

On appelle $P_1, \ldots, P_p$, les projecteurs spectraux de T.

Proposition

Les applications $P_1, \ldots, P_p$ forment un système de projecteurs.

Rappel

Soit $n \geq 1$. Des endomorphismes $P_1, \ldots, P_n$ de E forment un système de projecteurs si

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_j, \quad j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

et

$$P_1 + \cdots + P_n = id_E.$$

Il est clair que $id = \sum_{j=1}^{p} P_j$.

De plus, $P_j P_k = 0$ si $j \neq k$. En effet,

$$P_j P_k = A_j(T) A_k(T)\, T_1^{m_1} \cdots \widehat{[j]} \cdots T_p^{m_p} T_1^{m_1} \cdots \widehat{[k]} \cdots T_p^{m_p}$$

fait donc apparaître le polynôme minimum de T.

Enfin, $P_j^2 = P_j$ car

$$P_j\, id = P_j \sum_{k=1}^{p} P_k = P_j^2.$$

$$\ker(P_j) = \mathrm{Im}(T_j^{m_j}).$$

Si x appartient à $\ker(P_j)$, on a

$$x = id\, x = \sum_{k=1}^{p} P_k\, x$$

$$= \sum_{k \neq j} P_k\, x = T_j^{m_j} \sum_{k \neq j} A_k(T) T_1^{m_1} \cdots \widehat{[j]} \cdots \widehat{[k]} \cdots T_p^{m_p} x$$

et donc $x \in \mathrm{Im}(T_j^{m_j})$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(T_j^{m_j})$, il existe y tel que $T_j^{m_j} y = x$. On a

$$P_j x = P_j T_j^{m_j} y = A_j(T)\mathcal{M}_T(T) y = 0$$

et donc $\ker(P_j) = \mathrm{Im}(T_j^{m_j})$.

Lien entre proj. spectraux et s.e. caractéristiques

$$\mathrm{Im}(P_j) = \ker(T_j^{m_j}) = F_{\lambda_j}.$$

Pour l'autre égalité, $T_j^{m_j} P_j = A_j(T)\mathcal{M}_T(T) = 0$
donc $\mathrm{Im}(P_j) \subset \ker(T_j^{m_j})$.

Réciproquement, si $x \in \ker(T_j^{m_j})$, alors $P_k\, x = 0$ si $k \neq j$.
Par conséquent, on a $x = id\, x = P_j\, x \in \mathrm{Im}(P_j)$.

Théorème

La dimension du sous-espace caractéristique de T associé à la valeur propre λ_j est égale à la multiplicité de λ_j comme zéro du polynôme caractéristique de T,

$$\dim F_{\lambda_j} = \mu_j.$$

On a

$$\boxed{E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}}$$

et les projecteurs associés à cette décomposition sont les projecteurs spectraux de T.

Thèse 1 : $\dim F_{\lambda_j} = \mu_j$.

$P(z) = (z - \lambda_j)^{m_j}$, $T_j^{m_j}$ est un polynôme d'endomorphisme :

$$P(T) = (T - \lambda_j \, id)^{m_j} = T_j^{m_j}$$

$$E_0(T_j^{m_j}) = \{x \mid T_j^{m_j} x = 0\} = \ker T_j^{m_j} = F_{\lambda_j}.$$

La multiplicité (algébrique) de 0 comme v.p. de $T_j^{m_j} = P(T)$ = la somme des multiplicités des v.p. β de T t.q. $P(\beta) = (\beta - \lambda_j)^{m_j} = 0$, c'est-à-dire μ_j car $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont distincts (et donc, la seule façon d'avoir 0, est $\beta = \lambda_j$).

$F_{\lambda_j} = \ker(T_j^{m_j}) = E_0(T_j^{m_j})$. La dim. d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante, ainsi

$$\dim F_{\lambda_j} \leq \mu_j.$$

Les applications $P_1, \ldots, P_p$ forment un système de projecteurs, ce qui signifie que $E = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(P_p)$.

$$n = \sum_{j=1}^{p} \dim(\mathrm{Im}(P_j)) = \sum_{j=1}^{p} \dim(F_{\lambda_j}) \leq \sum_{j=1}^{p} \mu_j = n.$$

Par conséquent, $\dim(F_{\lambda_j}) = \mu_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

RAPPEL, PROP. SYST. DE PROJECTEURS

Si $P_1, \ldots, P_n$ est un système de projecteurs de E, alors

$$E = \mathrm{Im}\, P_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, P_n$$

Pour la deuxième partie,

$$E = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(P_p) = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}$$

Corollaire

Un endomorphisme T est diagonalisable SSI son polynôme minimum ne possède que des zéros simples.

T est diagonalisable SSI $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $\dim E_{\lambda_j} = \mu_j$.

De plus, $E_{\lambda_j} \subset F_{\lambda_j}$ et $\dim F_{\lambda_j} = \mu_j$.

Par conséquent, T est diagonalisable SSI

$$E_{\lambda_j} = F_{\lambda_j}.$$

Ceci a lieu si et seulement si $m_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base de E dans laquelle T se représente par une matrice composée diagonale

$$B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_p), \quad B_i \in \mathbb{C}^{\mu_i}_{\mu_i}.$$

Il suffit de considérer une base de E construite sur des vecteurs

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{\mu_1}}_{\text{base de } F_{\lambda_1}}, \underbrace{x_{\mu_1+1}, \dots, x_{\mu_1+\mu_2}}_{\text{base de } F_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{x_{n-\mu_p+1}, \dots, x_n}_{\text{base de } F_{\lambda_p}}$$

d'où la conclusion car les sous-espaces caractéristiques sont stables pour T

De plus, on a

$$\det(B_j - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{\mu_j}.$$

En effet, la matrice B_j représente la restriction de T à F_{λ_j}. Elle ne peut donc pas avoir d'autre valeur propre que λ_j car les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe.

Endomorphismes nilpotents

Définition

Un endomorphisme $N \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe un entier positif k tel que $N^k = 0$. Le plus petit entier k vérifiant cette égalité est appelé l'indice de nilpotence

Exemple

Soit la matrice N donnée par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses puissances sont

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^4 = 0.$$

Il s'agit donc d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{C}^4$.

Proposition

Soit N un endomorphisme nilpotent.

- Son indice de nilpotence est toujours inférieur ou égal à la dimension de E.
- N n'est pas inversible.
- Son spectre est réduit à $\{0\}$.

Soit k le plus grand entier tel que $N^{k-1} \neq 0$.
Il existe $x \in E$ t.q. $N^{k-1}x \neq 0$.

$x, Nx, \ldots, N^{k-1}x$ sont lin. indép. donc $k \leq \dim E$.

Supposons que $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i N^i x = 0$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ non tous nuls.
Soit j le plus petit entier tel que $\alpha_j \neq 0$.

$$N^{k-j-1}\left(\sum_{i=j}^{k-1}\alpha_i\, N^i x\right) = \sum_{i=j}^{k-1}\alpha_i\, N^{k+i-(j+1)}x = 0.$$

Or $N^{k+i-(j+1)} = 0$ dès que $i > j$. La somme se réduit donc à

$$\alpha_j \underbrace{N^{k-1}x}_{\neq 0} = 0$$

et on en conclut que $\alpha_j = 0$! !

2) P.A. Si N était inversible, on aurait

$$N^{k-1} = N^{-1} \circ N^k = N^{-1} \circ 0 = 0$$

ce qui contredit la définition de k.

3) $N^k = 0$ donc N^k n'a que zéro comme valeur propre.
Corollaire polynôme d'endomorphisme...
si λ v.p. de N, alors λ^k v.p. de N^k d'où $\lambda = 0$.

Proposition

Si S et N sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, alors $S+N$ et SN sont aussi nilpotents.

Soit ℓ un entier tel que $S^\ell = N^\ell = 0$. Puisque S et N commutent, on trouve

$$(S+N)^{2\ell} = 0 \quad \text{et } (SN)^\ell = 0.$$

Proposition

Un endomorphisme nilpotent N non nul n'est jamais diagonalisable.

Si N est diagonalisable,
0 est racine simple du polynôme minimum de N
mais N n'a que 0 comme v.p. donc $N = 0$.

PROPOSITION, UN AVANT-GOÛT DE JORDAN...

Si $\dim E = n$ et si N est nilpotent d'indice de nilpotence n, alors il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E t.q.

$$Ne_1 = 0 \quad \text{et} \quad Ne_j = e_{j-1},\ j \in \{2, \ldots, n\}.$$

Autrement dit, N est représenté dans cette base par la matrice

$$J(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit x un vecteur tel que $N^{n-1}x \neq 0$. Les vecteurs

$$N^{n-1}x, N^{n-2}x, \ldots, Nx, x$$

forment une base de E qui répond à la question.

$F_{\lambda_j} = \ker(T_j^{m_j})$. Ainsi, la restriction de $T_j = T - \lambda_j \, id$ à F_{λ_j},

$$T_{j\,|F_{\lambda_j}} : F_{\lambda_j} \to F_{\lambda_j}$$

est nilpotent et son indice de nilpotence est m_j (c'est une conséquence du théorème de stabilisation des images et des noyaux : $\ker(T_j^{m_j-1}) \subsetneq \ker(T_j^{m_j})$).

Les F_{λ_j} sont stables pour T donc pour T_j :

Si $x \in F_{\lambda_j}$, alors $Tx \in F_{\lambda_j}$ et $\lambda_j x \in F_{\lambda_j}$ donc $\underbrace{Tx - \lambda_j x}_{T_j x} \in F_{\lambda_j}$.

$\to$ Les développements qui suivent s'appliqueront donc à $T_{j\,|F_{\lambda_j}}$.

Définition

Soit $N \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On appelle chaîne (engendrée par N) toute suite finie de la forme

$$x, Nx, \ldots, N^{\ell-1}x$$

où $N^{\ell-1}x \neq 0$ et $N^{\ell}x = 0$.

x : tête, $N^{\ell-1}x$: queue, ℓ : longueur de la chaîne.

- la longueur ℓ d'une chaîne est $\leq$ à l'indice de nilpotence k de N.
- $\forall \ell \leq k$, il existe une chaîne de longueur ℓ.
- Il existe une chaîne de longueur k

Exemple

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ Ne_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ N^2 e_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ N^3 e_4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $N^4 e_4 = 0$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Ne_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ N^2 e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 e_3 = 0.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}[x]_3$, on considère l'application dérivée D_x. Soit $P(x) = x^2 + 3x + 1$. Les élements

$$P, \; D_x P = 2x + 3, \; D_x^2 P = 2$$

forment une chaîne de longueur 3 engendrée par D_x.

Proposition

Les éléments d'une chaîne sont linéairement indépendants.

Preuve : exercice

Proposition

Les éléments d'un ensemble de chaînes sont linéairement indépendants SSI si les queues de ces chaînes sont linéairement indépendantes.

Théorème (Base répartie en chaînes)

Soit N un endomorphisme nilpotent de E. Il existe une base de E formée des vecteurs de chaînes linéairement indépendantes réparties en longueurs décroissantes.

$$\begin{array}{ccccc}
N^{m-1}x_{m,1} & \cdots & N^{m-k}x_{m,1} & \cdots & x_{m,1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
N^{m-1}x_{m,d_m} & \cdots & N^{m-k}x_{m,d_m} & \cdots & x_{m,d_m} \\
\vdots & & & & \\
N^{k-1}x_{k,1} & \cdots & x_{k,1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \\
N^{k-1}x_{k,d_k} & \cdots & x_{k,d_k} & & \\
\vdots & & & & \\
x_{1,1} & & & & \\
\vdots & & & & \\
x_{1,d_1} & & & &
\end{array}$$

Preuve : Patience !

- La base n'est PAS nécessairement UNIQUE
- La FORME du tableau ne dépend pas de la base.

PROPOSITION

Les k premières colonnes forment une base de $\ker(N^k)$.

Preuve : Patience !

Le nombre d'éléments dans les k premières colonnes

$$\dim(\ker(N^k)) = \dim E - \dim(\mathrm{Im}(N^k)) = n - \mathrm{rg}(N^k)$$

Le nombre d'éléments dans la k-ième colonne est

$$\dim(\ker(N^k)) - \dim(\ker(N^{k-1})) \quad = \quad \mathrm{rg}(N^{k-1}) - \mathrm{rg}(N^k).$$

La FORME du tableau de chaînes ne dépend donc pas de la base choisie. On peut la déterminer en calculant les rangs des opérateurs $N, N^2, \ldots, N^m$.

On peut trouver une base de F_{λ_j} répartie en chaînes engendrées par T_j.

L'enveloppe linéaire des vecteurs d'une telle chaîne est stable pour T.

En effet, $T = T_j + \lambda_j \, id$,

$$T(T_j^k x) = T_j^{k+1} x + \lambda_j T_j^k x$$

appartient encore à l'enveloppe linéaire des vecteurs d'une telle chaîne

CONSÉQUENCE

Une base de F_{λ_j} répartie en chaînes fournit une décomposition de F_{λ_j} en une somme directe de sous-espaces stables pour T (cette décomposition n'étant pas unique).

Résumé des résultats acquis :

- $E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p}$,
- les sous-espaces caractéristiques F_{λ_j} sont stables pour T,
- l'opérateur T_j restreint à F_{λ_j} est nilpotent, on peut donc construire une base de F_{λ_j} répartie en chaînes engendrées par T_j,
- l'enveloppe linéaire des vecteurs d'une telle chaîne est stable pour T et une base de F_{λ_j} répartie en chaînes fournit donc une décomposition de F_{λ_j} en une somme directe de sous-espaces stables pour T.

Théorème

Pour tout endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base de E dans laquelle la matrice qui représente T est une matrice composée diagonale dont les blocs diagonaux sont de dimension 1 ou sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est une valeur propre de A. Plusieurs blocs diagonaux peuvent correspondre à la même valeur propre. Cette forme canonique est unique à une permutation des blocs diagonaux près.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de T.

$T_j = (T - \lambda_j\, id)$ restreint à F_{λ_j} est nilpotent, d'indice de nilpotence m_j.

On a une base U_j de F_{λ_j} répartie en chaînes engen. par T_j.

Le tableau formé par ces chaînes (ce tableau est construit de manière analogue au tableau ...) contient t lignes de longueur respective $\ell_1, \ldots, \ell_t$ (autrement dit, si U_j contient t chaînes)

RAPPEL

$\dim F_{\lambda_j} = \mu_j$ et donc $\ell_1 + \cdots + \ell_t$ est égal à la multiplicité de λ_j comme racine du polynôme caractéristique de T., Représentation de $T_{j|F_{\lambda_j}}$ dans la base U_j de F_{λ_j}

$$\begin{pmatrix} J(\ell_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\ell_t) \end{pmatrix} \text{ avec } J(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{|F_{\lambda_j}} = \lambda_j \, id_{F_{\lambda_j}} + T_{j|F_{\lambda_j}}.$$

Représentation de $T_{|F_{\lambda_j}}$ dans la base U_j

$$A_j = \begin{pmatrix} J'_{\lambda_j}(\ell_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{\lambda_j}(\ell_t) \end{pmatrix} \text{ avec } J'_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de Jordan

Conclusion :
les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe et leur somme donne E

$$F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_p} = E\,.$$

Si on considère la base de E formée par les vecteurs des bases $U_1, \ldots, U_p$, alors T se représente dans cette base par

$$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p).$$

Si on dispose d'une autre décomposition en blocs de Jordan comme représentation de T dans une base U', il est clair que chaque bloc de Jordan de valeur propre λ_j et de dimension r provient de vecteurs de base correspondant à une chaîne engendrée par T_j de longueur r. La conclusion découle du fait que la forme du tableau est unique.

Remarque (1)

Deux endomorphismes T et T' ont la même forme de Jordan

- s'ils ont les mêmes valeurs propres ET
- si les formes des tableaux des bases de F_{λ_j} réparties en chaînes engendrées respectivement par les restrictions $(T - \lambda_j \, id)_{|F_{\lambda_j}(T)}$ et $(T' - \lambda_j \, id)_{|F_{\lambda_j}(T')}$ coïncident.

Remarque (2)

Si dans les tableaux constituant une base répartie en chaînes, on avait commencé par les têtes au lieu des queues, on aurait obtenu dans la décomposition canonique de Jordan des blocs carrés ayant une valeur propre sur la diagonale et des 1 en dessous de la diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Un exemple...

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

et réduisons-la à la forme canonique de Jordan. Il s'agit d'un opérateur particulier $T : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5 : x \mapsto Ax$.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4-\lambda & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 2)^5.$$

2 est l'unique v.p. de A de mult. algébrique $\mu = 5$.

Dimension du sous-espace propre ?

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -4 & -1 & -3 & 2 & 1\\ -2 & -1 & -2 & 1 & 1\\ -3 & -1 & -3 & 2 & 1\\ -8 & -2 & -7 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

$L_5 = L_1 + L_2 + L_4$ et $L_4 = L_1 + L_3$.
Si on remplace L_2 par $L_2 - (L_1 + L_3)$ et L_3 par $L_3 - L_1$, on obtient un système suivant équivalent à $(A-2I)x = 0$,

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=0$$

et les conditions $x_1 = 0$, $x_3 = x_4$ et $x_2 + x_3 = x_5$.

Ainsi, le sous-espace propre E_2 est égal à

$$\Bigg\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\langle$$

et sa dimension vaut 2

Remarque

Pour calculer $\dim E_2$, on aurait pu procéder plus rapidement en calculant le rang de la matrice $A - 2I$ et en utilisant le fait que $\dim E_2 = 5 - \mathrm{rg}(A - 2I)$.

A n'est pas diagonalisable puisque $\dim E_2 < 5$.

Calculon les puissances de $A-2I$,

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } (A-2I)^3 = 0.$$

Remarque

Puisque $(A-2I)^3 = 0$, $A-2I$ est un endomorphisme nilpotent de E et on a en particulier, $\ker((A-2I)^3) = E$. On a même $\ker I = \{0\} \subsetneq \ker(A-2I) \subsetneq \ker(A-2I)^2 \subsetneq \ker(A-2I)^3 = E = \ker(A-2I)^4 = \ldots$.

La forme du tableau d'une base de F_2 répartie en chaînes est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\text{hauteur de la colonne} & 1 & : 5 - \operatorname{rg}(A - 2I) = 5 - 3 = 2, \\
\text{hauteur de la colonne} & 2 & : \operatorname{rg}(A - 2I) - \operatorname{rg}(A - 2I)^2 = 3 - 1 = 2, \\
\text{hauteur de la colonne} & 3 & : \operatorname{rg}(A - 2I)^2 - \operatorname{rg}(A - 2I)^3 = 1 - 0 = 1.
\end{array}$$

Ainsi, ce tableau est de la forme

$*$	$*$	$*$
$*$	$*$	

Remarque

Puisque la longueur maximale des chaînes est 3, on peut retrouver le fait que le polynôme minimum de A est $(\lambda - 2)^3$.

Il reste à construire des chaînes linéairement indépendantes de longueur respective 2 et 3 engendrées par $A - 2I$. La tête d'une chaîne de longueur 3 est un vecteur x tel que $(A - 2I)^3 x = 0$ et $(A - 2I)^2 x \neq 0$. On peut prendre $x = e_1$ et on a la chaîne (en commençant par la queue)

$$(A - 2I)^2 e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (A - 2I)e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \ e_1.$$

La tête d'une chaîne de longueur 2 est un vecteur y tel que $(A - 2I)^2 y = 0$ et $(A - 2I)y \neq 0$.

Il faut de plus s'assurer que les queues des chaînes $(A - 2I)^2 x$ et $(A - 2I)y$ sont linéairement indépendantes pour que les chaînes le soient et forment une base.

On peut prendre $y = e_2$ et on a la chaîne (en commençant par la queue)

$$(A - 2I)e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; e_2.$$

La matrice S formée sur ces chaînes est

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A titre indicatif, on a

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Grâce aux constructions réalisées, il vient

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est constitué de deux blocs de Jordan car la base de F_2 contient deux chaînes.