ALGÈBRE LINÉAIRE - SYSTÈMES LINÉAIRES (FIN)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2010–2011

UNIVERSITÉ de Liège

Théorème de Rouché

$A \in \mathbb{K}_p^n$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

i) Le système $(\mathbf{S})$: $Ax = b$ est compatible,

ii) tout vecteur $y \in \mathbb{K}_n$ satisfaisant $yA = 0$ est tel que $yb = 0$,

iii) le rang de A est égal au rang de $(A|b)$.

Corollaire

Si le système $(\mathbf{S})$: $Ax = b$ est compatible, il est équivalent à tout système $(\mathbf{S}')$ obtenu en ne considérant que les lignes de la matrice A qui sont lin indép. en nombre égal au rang de A.

1) Toute solution de (**S**) est solution de (**S**$'$).

2) Thèse : Toute solution de (**S**$'$) est solution de (**S**) ?

$r = \mathrm{rg}(A)$, quitte à permuter les équations de (**S**), on peut supposer que les r premières lignes $L_1, \ldots, L_r$ sont lin. indép.

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe des scalaires $\lambda_k^{(i)}$ tels que

$$L_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(i)} L_k.$$

Puisque (**S**) est compatible, vu II), on a

$$b_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(i)} b_k.$$

Soit x une solution de (**S**$'$) : $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$, $L_k x = b_k$.

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$L_i x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(i)} L_k x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(i)} b_k = b_i.$$

Donc x est aussi solution de (**S**).

Systèmes/formules de Cramer

(**S**) $Ax = b$ est de *Cramer*, si A est une matrice carrée $p \times p$ inversible. (**S**) possède l'unique solution $A^{-1}b$.
Il vient,

$$x_j = (A^{-1}b)_j = \frac{1}{\det A}\left(\widetilde{\mathrm{cof}(A)}b\right)_j$$

Or, on a

$$(\widetilde{\mathrm{cof}(A)}b)_j = \sum_{k=1}^{p}\left(\widetilde{\mathrm{cof}(A)}\right)_{jk} b_k = \sum_{k=1}^{p}\mathrm{cof}_{kj}(A)b_k.$$

on obtient $\mathrm{cof}(A)_{kj}$ *en remplaçant la* j*-ième colonne de* A *par* e_k.

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{p} b_k \det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & e_k & \cdots & C_p \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & b & \cdots & C_p \end{pmatrix}}{\det A}$$

Un exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \color{red}{-1} & 2 & -1 \\ \color{red}{4} & 1 & 3 \\ \color{red}{5} & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{-1} & -1 \\ 0 & \color{red}{4} & 3 \\ 1 & \color{red}{5} & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \color{red}{-1} \\ 0 & 1 & \color{red}{4} \\ 1 & 1 & \color{red}{5} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Système compatible (**S**) : $Ax = b$. On peut considérer les lignes de A lin. indép. en nombre égal au rang
$\Rightarrow A \in \mathbb{K}_p^n$ et $\mathrm{rg}(A) = n \leq p$.
La matrice A possède n colonnes lin. indép. Supposons que $C_1, \ldots, C_n$ sont lin. indép.

$$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b - x_{n+1}C_{n+1} - \cdots - x_p C_p$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}}_{C} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C^{-1}b - x_{n+1}C^{-1}C_{n+1} - \cdots - x_pC^{-1}C_p$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z = \lambda_1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, toute solution de (**S**) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline x_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1}b \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -C^{-1}C_{n+1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{p-n} \begin{pmatrix} -C^{-1}C_p \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-n} \in \mathbb{K}$. Inversement, il est clair que tout vecteur qui s'écrit de cette façon est solution de (**S**).

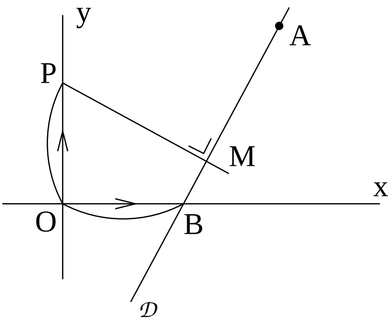
$$
\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline x_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} C^{-1}b \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) + \lambda_1 \left(\begin{array}{c} -C^{-1}C_{n+1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) + \cdots + \lambda_{p-n} \left(\begin{array}{c} -C^{-1}C_p \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)
$$

Remarques

- Si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-n} = 0$, on trouve une solution particulière.
- Si $b = 0$, les solutions sont les combinaisons linéaires de $p - \mathrm{rg}(A)$ vecteurs linéairement indépendants. *Les solutions du système homogène $Ax = 0$ à p inconnues est un sous-espace vectoriel de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.*
- Les solutions d'un système compatible s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions du système homogène associé.

Exemples : application à la géométrie

On considère un espace affin euclidien muni d'un repère orthonormé d'axes Ox et Oy. Soit A, un point n'appartenant ni à Ox ni à Oy. On mène par ce point une droite variable $\mathcal{D}$ qui coupe Ox en B. On désigne par P le point de Oy dont l'ordonnée est égale à l'abscisse de B. Rechercher le lieu de la projection orthogonale de P sur la droite $\mathcal{D}$.



$A : (a_1, a_2)$, $B : (\lambda, 0)$ et $P : (0, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Les génératrices du lieu ont pour équations

$$-a_2(x - \lambda) - y(\lambda - a_1) = 0$$

$$x(\lambda - a_1) - a_2(y - \lambda) = 0.$$

Un point M de coordonnées (x, y) appartient au lieu si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_2 - y)\lambda = a_2 x - a_1 y \\ (x + a_2)\lambda = a_1 x + a_2 y \end{array} \right.$$

possède une solution. L'élimination de λ revient à étudier la compatibilité du système (en l'inconnue λ).

$$\begin{cases} (a_2 - y)\lambda = a_2 x - a_1 y \\ (x + a_2)\lambda = a_1 x + a_2 y \end{cases}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_2 - y \\ x + a_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_2 - y & a_2 x - a_1 y \\ x + a_2 & a_1 x + a_2 y \end{pmatrix}.$$

• Premier cas : le rang de la matrice du système est nul. Ceci a lieu si $y = a_2$ et $x = -a_2$. Le système est donc compatible si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -a_2^2 - a_1 a_2 \\ 0 & -a_1 a_2 + a_2^2 \end{pmatrix} = 0,$$

donc, si $a_2 = 0$, ce qui est impossible car $A \notin Ox$. On en conclut que le point $(-a_2, a_2)$ est à exclure du lieu.

• Second cas : le rang de la matrice du système vaut 1.
La compatibilité du système revient à ce que la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} a_2 - y & a_2 x - a_1 y \\ x + a_2 & a_1 x + a_2 y \end{pmatrix}$$

soit de rang 1 donc à ce que son déterminant soit nul. En annulant ce déterminant, on trouve

$$\left(x - \frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}.$$

Le point $(-a_2, a_2)$ vérifie nécessairement cette équation.
On en conclut que le lieu recherché est un cercle de centre $(\frac{a_1 - a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ privé du point $(-a_2, a_2)$.

$$a, b \in \mathbb{C}, \text{ 2 paramètres, } \quad \begin{cases} x + iz = 1 \\ ax + by = b \\ bx - az = b \\ ay + z = a. \end{cases}$$

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ a & b & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Le système est compatible SSI $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}(A|B)$.
• Si la matrice $(A|B)$ est de rang maximal 4, càd si $\det(A|B) = -a^2(a + ib) \neq 0$, alors le système est incompatible.
Donc, si $a \neq 0$ et $a \neq -ib$, le système est incompatible. **(Cas I)**

• si $a = 0$ ou $a = -ib$, $\mathrm{rg}(A|B) \leq 3$. **(Cas II)**

La sous-matrice constituée des quatre coins de A est de déterminant non nul, $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Elle est exactement de rang 2 SSI les deux matrices qui bordent $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ a & b & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

sont nuls. Ces deux sous-matrices ont pour déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ a & b & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = b + ia^2 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ b & 0 & -a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a + ib).$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg} A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b + ia^2 = 0 \\ a(a+ib) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad (a = 0 \text{ et } b = 0) \text{ ou } (a = -ib \text{ et } b - ib^2 = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a = b = 0) \text{ ou } (b = -i \text{ et } a = -1).$$

• Si $a = b = 0$, alors **(Cas II.i)**

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \mathrm{rg} A$$

et le système est compatible. De plus, le nombre d'inconnues moins le rang du système donne 3-2=1 paramètre dans l'expression des solutions.
Le système admet une infinité simple de solutions.

• Si $a=-1$ et $b=-i$, alors **(Cas II.ii)**

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ -1 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 & -i \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \ \text{ car} \begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ -1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc $\mathrm{rg}(A|B) = 3 > 2 = \mathrm{rg}(A)$. Le système est incompatible.

Il ne reste plus que le cas où la matrice du système est de rang 3 et où le système admet une solution unique. **(Cas II.iii)**
Ce cas se présente si et seulement si $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A) = 3$, c'est-à-dire si

$$(a = 0 \text{ ou } a = -ib) \text{ et } (a, b) \neq (0, 0) \text{ et } (a, b) \neq (-1, -i)$$

ou encore si

$$(a = 0 \text{ et } b \neq 0) \text{ ou } (a = -ib \text{ et } b \neq 0 \text{ et } b \neq -i).$$

Algorithme de Gauss-Jordan

Soit un système (**S**) de n équations à p inconnues,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. .$$

Les *opérations élémentaires* suivantes transforment le système (**S**) en un système équivalent :

- multiplier une ligne par un scalaire non nul :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i,\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

- ajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ i \neq j,$$

- permuter deux lignes :

$$L_i \leftrightarrow L_j,\ i \neq j.$$

PROPOSITION (PHASE D'ÉLIMINATION)

Par des opérations élémentaires sur les lignes, le système (**S**) peut être transformé en un système équivalent de la forme

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc}
x_{\mu_1} & + & \alpha_{1\mu_2}x_{\mu_2} & + & \cdots & + & \alpha_{1\mu_k}x_{\mu_k} & + & \cdots & + & \alpha_{1\mu_p}x_{\mu_p} & = & \beta_1 \\
 & & x_{\mu_2} & + & \cdots & + & \alpha_{2\mu_k}x_{\mu_k} & + & \cdots & + & \alpha_{2\mu_p}x_{\mu_p} & = & \beta_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & x_{\mu_k} & + & \cdots & + & \alpha_{k\mu_p}x_{\mu_p} & = & \beta_k \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & \beta_{k+1} \\
 & & & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & \beta_n
\end{array}\right. .$$

où μ est une permutation de $\{1, \ldots, p\}$ et k est le rang du système.

Algorithme de Gauss-Jordan

Proposition (phase de substitution)

Par des opérations élémentaires sur les lignes, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & x_k & + & \cdots & + & a_{kp}x_p & = & b_k \end{array}\right.$$

peut être transformé en un système équivalent du type

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & \alpha_{1k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & \alpha_{1p}x_p & = & \beta_1 \\ x_2 & + & \alpha_{2k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & \alpha_{2p}x_p & = & \beta_2 \\ & & & & & & \vdots & & \\ x_k & + & \alpha_{kk+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & \alpha_{kp}x_p & = & \beta_k \end{array}\right. .$$

Exemple 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right. .$$

On effectue les transformations $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1$ pour obtenir le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & -\frac{1}{3} \\ & & \frac{2}{3}y & + & \frac{5}{3}z & = & \frac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Si $L_2 \leftarrow 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 3z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Pour terminer la phase d'élimination, $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$ donne

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & z & = & \frac{2}{3} \end{array} \right. .$$

En substituant, on trouve

$$z = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3},\ x = \frac{1}{3}.$$

Le système possède une unique solution (système déterminé).

Exemple 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & {\color{blue}1} \end{array}\right. .$$

La phase d'élimination donne d'abord

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & -\frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right. ,$$

puis

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ainsi, z peut prendre n'importe quelle valeur et pour chacune d'elles, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - z \\ y & = & -1 + 2z \end{array}\right. .$$

On est dans le cas d'un système indéterminé (le système est de rang 2 et on a trois inconnues).

Exemple 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & \color{blue}{2} \end{array}\right. .$$

La seule différence avec l'exemple précédent est le second membre de la troisième équation. La phase d'élimination donne

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{2}{3}y & - & \frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. .$$

On s'aperçoit donc que le système est incompatible.

Application à la recherche d'inverse de matrices

Si A est une matrice carrée inversible de dimension n et X l'inverse de A, alors

$$AX = I.$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont les colonnes de X, l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AX_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Rechercher X revient donc à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant même matrice A.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons les phases d'élimination en parallèle. On a tout d'abord

$$\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

et si $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$,

$$\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}.$$

Enfin, si $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2$,

$$\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}.$$

Pour la phase de substitution, si on s'intéresse à la première colonne, on trouve $x_{31} = -\frac{1}{2}$, $x_{21} = \frac{1}{2}$ et $x_{11} = \frac{1}{2}$. Pour la deuxième colonne, $x_{32} = -\frac{3}{2}$, $x_{22} = -\frac{1}{2}$ et $x_{12} = \frac{5}{2}$ et enfin, avec la troisième colonne, $x_{33} = 1$, $x_{23} = 0$ et $x_{13} = -1$. Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$