Polynôme caractéristique

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2014–2015

UNIVERSITÉ de Liège

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\det \begin{pmatrix} 577-\lambda & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108-\lambda & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017-\lambda & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523-\lambda & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^5 + 25\lambda^4 - 235\lambda^3 + 1015\lambda^2 - 1960\lambda + 1372$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^5 + 25\lambda^4 - 235\lambda^3 + 1015\lambda^2 - 1960\lambda + 1372$$

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, (-\lambda)^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \alpha_i \, \lambda^i$$

$$\alpha_5 = 1, \quad \alpha_4 = 25, \quad \alpha_3 = 235, \quad \alpha_2 = 1015$$

$$\alpha_1 = 1960, \quad \alpha_0 = 1372$$

Résultat 1

α_i (pour $i = 0, \ldots, n-1$) est la somme des déterminants des sous-matrices diagonales extraites de A de dimension $n - i$.

$\alpha_4 = 25$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 4 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$577 - 108 + 2017 - 2523 + 62 = 25$$

α_{n-1} est la somme des éléments diagonaux = $\boxed{\text{trace de } A}$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{577} & \color{red}{-85} & 1620 & -2675 & 160 \\ \color{red}{770} & \color{red}{-108} & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

3134

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{577} & -85 & \color{red}{1620} & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ \color{red}{710} & -105 & \color{red}{2017} & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{577} & -85 & 1620 & \color{red}{-2675} & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ \color{red}{540} & -80 & 1530 & \color{red}{-2523} & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{577} & -85 & 1620 & -2675 & \color{red}{160} \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ \color{red}{200} & -30 & 570 & -940 & \color{red}{62} \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271 + 3774$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271 + 3774 + 12114$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & \color{red}{-108} & 2190 & \color{red}{-3615} & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & \color{red}{-80} & 1530 & \color{red}{-2523} & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271 + 3774 + 12114 - 16716$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271 + 3774 + 12114 - 16716 - 246$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & \color{red}{2017} & \color{red}{-3325} & 205 \\ 540 & -80 & \color{red}{1530} & \color{red}{-2523} & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$3134 + 13609 - 11271 + 3774 + 12114 - 16716 - 246 - 1641$$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 3 = 2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & \color{red}{2017} & -3325 & \color{red}{205} \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & \color{red}{570} & -940 & \color{red}{62} \end{pmatrix}$$

$3134 + 13609 - 11271 + 3774 + 12114 - 16716 - 246 - 1641 + 8204$

$\alpha_3 = 235$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5-3=2$
nombre de choix possibles $C_5^2 = 10$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & \color{red}{-2523} & \color{red}{155} \\ 200 & -30 & 570 & \color{red}{-940} & \color{red}{62} \end{pmatrix}$$

$3134+13609-11271+3774+12114-16716-246-1641+8204$

$$-10726 = 235$$

$\alpha_2 = 1015$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 2 = 3$
nombre de choix possibles $C_5^3 = 10$...
Voici un des 10 déterminants à calculer...

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,2,5),\ (1,3,4),\ (1,3,5)$$

$$(1,4,5),\ (2,3,4),\ (2,3,5),\ (2,4,5),\ (3,4,5)$$

$\alpha_1 = 1960$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 1 = 4$
nombre de choix possibles $C_5^4 = 5$...
Voici un des 5 déterminants à calculer...

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$\alpha_0 = 1372$ est la somme des sous-matrices diagonales de dimension $5 - 0 = 5$

$\boxed{\alpha_0 = \det A}$

Resultat 2

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A répétées selon leur multiplicité (comme zéro de χ_A), alors

$$\alpha_i = \sum_{1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_{n-i} \leq n} \lambda_{\nu_1} \cdots \lambda_{\nu_{n-i}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 577 & -85 & 1620 & -2675 & 160 \\ 770 & -108 & 2190 & -3615 & 215 \\ 710 & -105 & 2017 & -3325 & 205 \\ 540 & -80 & 1530 & -2523 & 155 \\ 200 & -30 & 570 & -940 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^5(\lambda - 7)^3(\lambda - 2)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$

$\boxed{\alpha_4 =?}$, $i = 4$, $n - i = 5 - 4 = 1$

$$\alpha_4 = \sum_{1 \leq \nu_1 \leq 5} \lambda_{\nu_1}$$

$$\alpha_4 = 25 = 7 + 7 + 7 + 2 + 2$$

α_{n-1} ou la trace = la somme des valeurs propres (répétées selon leur multiplicité)

$\boxed{\alpha_3 = ?}$, $i = 3$, $n - i = 5 - 3 = 2$

$$\alpha_3 = \sum_{1 \leq \nu_1 < \nu_2 \leq 5} \lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$

ν_1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
ν_2	2	3	4	5	3	4	5	4	5	5
	7.7	7.7	7.2	7.2	7.7	7.2	7.2	7.2	7.2	2.2

$$\alpha_3 = 7.7 + 7.7 + 7.2 + 7.2 + 7.7 + 7.2 + 7.2 + 7.2 + 7.2 + 2.2$$

α_{n-2} = la somme des produits *deux à deux* des valeurs propres (répétées selon leur multiplicité)

$\boxed{\alpha_2 = ?}$, $i = 2$, $n - i = 5 - 2 = 3$

$$\alpha_2 = \sum_{1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \leq 5} \lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2} \lambda_{\nu_3}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$

ν_1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
ν_2	2	2	2	3	3	4	3	3	4	4
ν_3	3	4	5	4	5	5	4	5	5	5
	7.7.7	7.7.2	7.7.2	7.7.2	7.7.2	7.2.2	7.7.2	7.7.2	7.2.2	7.2.2

$$\alpha_2 = 7.7.7 + 7.7.2 + 7.7.2 + 7.7.2 + 7.7.2$$

$$+7.2.2 + 7.7.2 + 7.7.2 + 7.2.2 + 7.2.2$$

α_{n-3} = la somme des produits *trois à trois* des valeurs propres (répétées selon leur multiplicité)

$\boxed{\alpha_1 = ?}$, $i = 1$, $n - i = 5 - 1 = 4$

$$\alpha_1 = \sum_{1 \le \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 \le 5} \lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2} \lambda_{\nu_3} \lambda_{\nu_4}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} \nu_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \nu_2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \nu_3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ \nu_4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

$$\alpha_1 = 7.7.7.2 + 7.7.7.2 + 7.7.2.2 + 7.7.2.2 + 7.7.2.2$$

$\boxed{\alpha_0 = ?}$, $i = 1$, $n - i = 5 - 0 = 5$

$$\alpha_0 = \sum_{1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 < \nu_5 \leq 5} \lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2} \lambda_{\nu_3} \lambda_{\nu_4} \lambda_{\nu_5}$$

$$\begin{array}{c|c} \nu_1 & 1 \\ \nu_2 & 2 \\ \nu_3 & 3 \\ \nu_4 & 4 \\ \nu_5 & 5 \end{array}$$

$\alpha_0 = \det A$= le produit des valeurs propres (répétées selon leur multiplicité)

$$1372 = 7.7.7.2.2$$