

## Théorie des graphes

Année 2014–2015, <http://www.discmath.ulg.ac.be>

Prière de lire les consignes se trouvant en fin de liste. Pour les questions reprises ci-dessous, il est attendu que les étudiants en connaissent les énoncés **et** les preuves correspondantes.

Il s'agit d'une **liste PROVISOIRE** (en date du 13 novembre 2014), la version FINALE comprendra aussi des questions sur les derniers cours à venir (en particulier, les questions 18 à 22 sont à confirmer).

- (1) Recherche d'un chemin de coût minimum et algorithme de Dijkstra (y compris la preuve de son exactitude).
  - (2) Graphes et chemins eulériens (cas non orienté et orienté). Critère, obtention d'un circuit eulérien.
  - (3) Composantes connexes (définition, cas non orienté et orienté, graphe acyclique des composantes), détermination de la connexité/des composantes connexes (algo. tache d'huile, clôture de succ et pred), cas où la f. connexité est équivalente à la s. connexité.
  - (4) Arête de coupure, coupe, algorithme de Fleury, caractérisation des arêtes de coupure.
  - (5) Graphes orientés sans circuit et tri topologique (1 lemme, 1 proposition et 2 théorèmes). Les algorithmes pourront être succinctement présentés (idées principales). Discussion de l'unicité du tri topologique.
  - (6) Relation entre le nombre de sommets et d'arêtes dans un arbre, sous-arbre couvrant (définition, existence, obtention).
  - (7) Parcours d'arbres, homomorphismes, isomorphismes de graphes et l'exemple des arbres lexicographiques "réguliers" définissant un ensemble de mots.
  - (8) Condition nécessaire pour qu'un graphe soit hamiltonien (nombre de composantes connexes).
  - (9) Théorème de Dirac.
  - (10) Premier théorème d'Ore.
  - (11) Fermeture d'un graphe (définition) et deuxième théorème d'Ore (corollaire du précédent).
  - (12) Théorème de Chvátal.
  - (13) Partition de  $K_n$  en circuits hamiltoniens.
  - (14) Propriétés des coefficients du polynôme caractéristique d'un graphe et calcul du nombre de chemins de longueur  $n$  dans un graphe.
  - (15) Caractérisation d'un graphe biparti par son spectre (condition nécessaire et suffisante).
  - (16) Vecteurs/valeurs propres d'un graphe  $k$ -régulier.
  - (17) Google et l'algorithme de PageRank.
- 
- (18) Période d'une matrice irréductible. Théorème de structure de  $A^n$  si  $A$  est irréductible.
  - (19) Contraction, formule de Cayley comptant le nombre de sous-arbres couvrants.
  - (20) Graphes planaires, définitions, choix de la face infinie et formule d'Euler.

- (21) Existence d'un sommet de degré  $\leq 5$  dans un graphe simple et planaire, non planarité de  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .
- (22) Théorème des cinq couleurs.

**NB :** Il est attendu qu'en plus des questions reprises ci-dessus, les étudiants connaissent les définitions des différents concepts présentés dans le cours ainsi que les énoncés de **tous** les résultats, i.e., même ceux qui ne seraient pas donnés explicitement dans la liste reprise ci-dessus. Chaque étudiant peut supprimer, au choix, 3 questions (le choix sera donné en début d'examen oral).