

## Théorie des graphes

Deuxièmes bacheliers en sciences mathématiques,  
Année académique 2006–2007, <http://www.discmath.ulg.ac.be>

Cette liste est donnée à titre indicatif pour vous permettre de structurer votre étude. Prière de lire les consignes se trouvant en fin de liste. Pour les questions reprises ci-dessous, il est attendu que les étudiants en connaissent les énoncés **et** les preuves correspondantes (sauf mention explicite du contraire).

- (1) Recherche du plus court chemin et algorithme de Dijkstra.
- (2) Graphes et chemins eulériens (cas non orienté et orienté).
- (3) Composantes connexes (cas non orienté et orienté) et cas où la f. connexité est équivalente à la s. connexité.
- (4) Arête de coupure, point d'articulation, notions de  $k$ -connexité correspondantes,  $\kappa(G)$ ,  $\lambda(G)$ , propriété des arêtes de coupure (prop. I.6.6).
- (5) Définitions et énoncé relatifs au théorème de Menger, énoncé et preuve de son corollaire.
- (6) Graphes orientés sans circuit et tri topologique (1 lemme, 1 proposition et 2 théorèmes). Les algorithmes pourront être succinctement présentés (idées principales).
- (7) Parcours d'arbres, homomorphismes, isomorphismes de graphes et l'exemple des arbres lexicographiques définissant un ensemble de mots.
- (8) Condition nécessaire pour qu'un graphe soit hamiltonien.
- (9) Théorème de Dirac.
- (10) Premier théorème d'Ore.
- (11) Fermeture d'un graphe (Lem. I.11.11, Théo. I.11.12) et deuxième théorème d'Ore.
- (12) Théorème de Chvátal.
- (13) Partition de  $K_n$  en circuits hamiltoniens (Prop. I.11.18 et les 2 lemmes s'y rapportant).
- (14) Propriétés des coefficients du polynôme caractéristique d'un graphe et calcul du nombre de chemins de longueur  $n$  dans un graphe (prop. II.1.7 et thm. II.1.12).
- (15) Caractérisation d'un graphe biparti par son spectre (condition nécessaire et suffisante).
- (16) Période d'une matrice irréductible (les 3 lemmes de la section, le théorème et son corollaire).
- (17) Estimation du nombre de chemins de longueur  $n$  (cas d'un graphe primitif, puis cas de 2 ou de 3 composantes primitives).
- (18) Google et l'algorithme de PageRank.
- (19) Algèbre d'adjacence, définition et dimension (prop. II.4.1), cas des graphes  $k$ -réguliers (prop II.4.3 et théorème II.4.4 de Hoffman et son corollaire).
- (20) Détermination du nombre de sous-arbres couvrant  $K_n$ .
- (21) Contraction, formule de Cayley comptant le nombre de sous-arbre couvrant et parallèle avec le polynôme chromatique (Prop. II.5.4 et IV.3.10).

- (22) Détermination du nombre de sous-arbres couvrant un multi-graphe, théorème de Bott-Mayberry et son corollaire (bien évidemment, les développements qui précèdent doivent être inclus).
- (23) Graphes planaires, définitions, choix de la face infinie (prop. III.1.6) et formule d'Euler.
- (24) Existence d'un sommet de degré  $\leq 5$  dans un graphe simple et planaire, non planarité de  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .
- (25) Nombre chromatique et homomorphisme de graphes.
- (26) Théorème des cinq couleurs.
- (27) Polynôme chromatique et ses propriétés.
- (28) Nombre de Ramsey et théorème d'Erdős, Szekeres.

**NB** : Il est attendu qu'en plus des questions reprises ci-dessus, les étudiants connaissent les définitions des différents concepts présentés dans le cours ainsi que les énoncés de **tous** les résultats, i.e., même ceux qui ne seraient pas donnés explicitement dans la liste reprise ci-dessus. Il est envisageable que les questions posées lors de l'examen diffèrent par la forme de celles reprises dans la liste ci-dessus et fassent intervenir une plus grande part de réflexion et de compréhension, au lieu d'une "simple" restitution (par exemple, adapter un résultat général, valable pour tout  $n$ , à un cas spécifique comme  $n = 4$ ).

Les notes de cours en votre possession, n'étant qu'une version préliminaire, plusieurs erreurs peuvent s'y trouver et la plupart de celles-ci ont déjà été relevées lors de l'exposé oral !