

## Examen d'algèbre linéaire

Premier bachelier en sciences mathématiques.

Année académique 2007–2008

Cette liste est donnée à titre indicatif pour vous permettre de structurer votre étude. Prière de lire les consignes se trouvant en fin de liste. Pour les questions reprises ci-dessous, il est attendu que les étudiants en connaissent les énoncés **et** les preuves correspondantes (sauf mention explicite du contraire).

- (1) Définitions d'un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et des opérateurs  $D_z$  et  $D_{\bar{z}}$ . Formule de Taylor (Prop. VI.1.8).
- (2) Définition d'un zéro d'un polynôme et de la multiplicité d'un zéro. Caractérisation des zéros  $\alpha$ -uples (Prop. VI.2.3).
- (3) Théorème fondamental de l'algèbre (énoncé et démonstration du théorème VI.2.5 + uniquement l'énoncé du lemme de d'Alembert) et ses corollaires (Cor. VI.2.7).
- (4) Règle de Descartes pour l'estimation des zéros d'un polynôme (Théo. VI.3.1).
- (5) Existence et unicité de la division euclidienne sur  $\mathbb{C}[z]$  (théorème VI.4.1, énoncé, démonstration et remarques). Condition nécessaire de divisibilité de polynômes non nuls (Prop. VI.4.6).
- (6) Définitions d'un p.g.c.d. de polynômes, d'un polynôme monique et de polynômes premiers entre eux. Énoncés et démonstrations de la proposition VI.4.11, de l'algorithme d'Euclide et du théorème de Bezout.
  
- (7) Définition d'une fraction rationnelle (propre). Comportement au voisinage d'un de ses pôles (Prop. VI.5.6).
- (8) Proposition relative aux pôles de la dérivée d'une fraction rationnelle (Prop. VI.5.8).
- (9) Théorème de décomposition d'une fraction rationnelle propre et son corollaire (théorème VI.6.1 et corollaire VI.6.2).
- (10) Décomposition en fractions simples sur  $\mathbb{C}$  (Prop. VI.6.6).
- (11) Zéros d'un polynôme à coefficients réels (Prop. VI.7.2 et remarque VI.7.3).
- (12) Décomposition en fractions simples sur  $\mathbb{R}$  (Prop. VI.7.4 avec sa démonstration, Prop. VI.7.5 sans la preuve, mais savoir expliquer les différences avec le cas complexe).
  
- (13) Définitions d'un vecteur propre, d'une valeur propre, d'une matrice diagonalisable et du polynôme caractéristique d'une matrice, Prop VII.1.3. Démontrer que les zéros du polynôme caractéristique d'une matrice sont exactement les valeurs propres de celle-ci (Prop. VII.2.1). Propriétés du polynôme caractéristique (Prop. VII.2.4).
- (14) Expression (sous deux formes) des coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice carrée (Prop. VII.2.5 et VII.2.10). Définition et propriétés de la trace d'une matrice carrée (Prop. VII.2.9).
- (15) Définition d'un sous-espace propre associé à une valeur propre, dimension d'un tel sous-espace (Prop VII.3.2) et condition nécessaire pour qu'une matrice soit diagonalisable (Prop. VII.3.3).

- (16) Propriété de vecteurs propres non nuls associés à des valeurs propres distinctes (Prop. VII.3.5). Condition suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable (Prop. VII.3.6 et Cor. VII.3.7).
- (17) Définition des disques de Gershgorin et localisation des valeurs propres (théorème VII.5.2 et son corollaire).
- (18) "Philosophie" du procédé de Gram-Schmidt (pas les détails de la formule). Condition nécessaire et suffisante pour que  $\langle x, Ay \rangle = \langle Bx, y \rangle$  (Prop. VIII.2.1) ainsi que ses corollaires (Cor. VIII.2.2 et VIII.2.4).  
Définition d'une matrice unitaire et premières propriétés (Prop. VIII.2.5).
- (19) Définition d'une matrice normale. Démontrer que si une matrice est diagonalisable par une matrice unitaire, alors elle est normale (page 158).  
Premières propriétés des vecteurs propres et des valeurs propres d'une matrice normale (Lemme VIII.2.9 et Prop. VIII.2.10).
- (20) Démontrer que toute matrice normale est diagonalisable par une unitaire (Théorème VIII.2.11).
- (21) Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice normale soit hermitienne (resp. unitaire) (Prop. VIII.2.12).
- (22) Diagonalisation simultanée de matrices normales  
(Prop. VIII.4.1 et Lemme VIII.4.2, ce dernier lemme est admis, sa preuve pourrait être demandée en guise d'exercice élémentaire).
- (23) Définitions d'un opérateur linéaire, d'un endomorphisme, d'une forme linéaire. Caractérisation d'un opérateur par les valeurs qu'il attribue aux éléments d'une base de l'espace vectoriel (de dimension finie) sur lequel il est défini (Thm. XI.1.7).
- (24) Définition d'un isomorphisme entre deux espaces vectoriels. Inverse d'un isomorphisme et caractérisation d'un isomorphisme par les valeurs qu'il attribue aux éléments d'une base (Prop. XI.1.9 et XI.1.11).
- (25) Définition de l'image et du noyau d'un opérateur linéaire. Montrer que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Énoncé et démonstration du théorème de la dimension.
- (26) Corollaires du théorème de la dimension (XI.2.8 et XI.2.10).
- (27) Développements relatifs à la représentation matricielle d'un opérateur (pages 218, 219 ainsi que la Prop. XI.3.2 et XI.3.6).
- (28) Calcul de la dimension de  $\mathcal{L}(E; F)$  (la Prop. XI.3.4 n'a pas été vue au cours, on peut alors expliciter l'isomorphisme avec  $\mathbb{K}_n^p$ ).
- (29) Représentation matricielle et changement de base (section 4).
- (30) Définition de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  (si  $E = F \oplus G$ ).  
Propriétés de ces projections (Prop. XI.5.2).
- (31) Définition et propriétés d'un projecteur (Prop. XI.5.4).
- (32) Définition et propriétés d'un système de projecteurs (Prop. XI.5.7). Application des systèmes de projecteurs à la forme de Jordan (projecteurs spectraux).
- (33) Énoncé et démonstration des lemmes de Gauss et de d'Alembert.

- (34) Définitions de l'idéal d'un anneau commutatif  $A$ , de l'idéal engendré par des éléments  $a_1, \dots, a_k \in A$ , d'un idéal principal, d'un anneau principal.  
Montrer que l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes est principal.
- (35) Divisibilité et idéaux (Prop. XII.3.16 et XII.3.19).
- (36) Définitions d'un endomorphisme, d'un polynôme d'endomorphisme.  
Spectre d'un polynôme d'endomorphisme (énoncé de Prop. XIII.2.3 sans preuve et son corollaire XIII.2.4, avec preuve).
- (37) Énoncer et démontrer le théorème de Cayley-Hamilton ainsi que ses conséquences (Théo. XIII.3.1, la définition du polynôme minimum, Prop. XIII.3.8 et Rem. XIII.3.9).
- (38) Définition des opérateurs " $T_j$ " et énoncé (sans preuve) du théorème de stabilisation des images et des noyaux. Montrer que les sous-espaces propres sont stables pour  $T$ . Définition des sous-espaces caractéristiques, montrer qu'ils sont stables pour  $T$ . Intérêt d'avoir des sous-espaces stables pour  $T$ .
- (39) Définition des projecteurs spectraux (+ le préambule à la définition XIII.5.1).  
Montrer que les projecteurs spectraux forment un système de projecteurs (Prop. XIII.5.2 et XIII.5.3).
- (40) Définition d'un sous-espace caractéristique. Dimension d'un sous-espace caractéristique et décomposition de l'espace en somme directe des sous-espaces caractéristiques (Thm. XIII.5.4 + Cor. XIII.5.5).
- (41) Définition et propriétés d'un endomorphisme nilpotent (Prop. XIII.6.3, XIII.6.5 et XIII.6.6. Enfin, à titre d'exercice, la Prop. XIII.6.4).
- (42) Définition d'une chaîne engendrée par un endomorphisme nilpotent.  
Énoncé (sans preuve) du théorème de "la base répartie en chaîne". Unicité de la forme du tableau de la base répartie en chaînes engendrées par un opérateur nilpotent (énoncé de la Prop. XIII.7.10 et Rem. XIII.7.11). Montrer que l'enveloppe linéaire d'une chaîne est stable pour  $T$  (Rem. XIII.7.12).
- (43) Réduction à la forme canonique de Jordan (énoncé et démonstration, il serait utile de rappeler le préambule au théorème XIII.8.1 se trouvant page 272).

**NB :** Il est attendu qu'en plus des questions reprises ci-dessus, les étudiants connaissent les définitions des différents concepts présentés dans le cours ainsi que les énoncés de **tous** les résultats (y compris ceux relevant de la matière de l'interrogation dispensatoire de janvier).

### Déroulement de l'examen :

L'interrogation dispensatoire de janvier représente un tiers de la cote finale. Les étudiants n'ayant pas obtenus un note supérieure ou égale à 10 seront réinterrogés sur la matière de cette interrogation (même liste de questions qu'en janvier). Cette réinterrogation se déroulera, tout comme pour la liste reprise ci-dessus, en deux parties (écrit et oral).

L'examen écrit portera uniquement sur des exercices se rapportant au cours. Les détails du mode d'interrogation sont repris ci-après.

L'examen oral portera quant à lui sur la "théorie". L'étudiant se verra interroger sur des questions de la liste reprise ci-dessus. Lors de cet examen oral (se déroulant au tableau), il est attendu que les étudiants devront être capables de répondre à des sous-questions

découlant immédiatement des questions de la liste (l'accent étant mis sur la compréhension et l'assimilation des concepts présentés) et de résoudre de petits exercices considérés comme application directe de la théorie.

L'examen écrit comportera deux volets : un volet commun destiné à tous les étudiants et portant sur la matière "après janvier" (polynômes, fractions rationnelles, diagonalisation, matrices particulières, opérateurs linéaires, endomorphismes, forme de Jordan) et un second volet, spécifique aux étudiants réinterrogés sur la matière de l'interrogation dispensatoire de janvier. Bien évidemment, pour répondre au volet commun, la connaissance des résultats de la matière "avant janvier" s'avère nécessaire.

L'examen oral se déroulera sur le même modèle : un volet commun destiné à tous les étudiants. Les étudiants n'ayant pas obtenu une note suffisante à l'interrogation de janvier seront de plus réinterrogés oralement sur la matière de "l'interrogation de janvier". Il est à noter qu'un étudiant réinterrogé sur la matière de "l'interrogation dispensatoire" doit nécessairement passer les deux parties (écrit et oral) correspondantes.