Relations et applications

crédits : P. Mathonet & J. Leroy

Définir ce qu'est une application (fonction), ou plus généralement une relation entre deux ensembles et éviter
"Une fonction de A dans B est une loi qui à tout x associe $f(x)$".

Ceci peut être réalisé en utilisant la théorie (naïve) des ensembles.

Définition

Soient A et B deux ensembles, le produit cartésien de A et B est

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Remarque :
Ici aussi on peut utiliser des produits indicés :

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Définition

Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est une partie de $A \times B$.
On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$.

Autre notation : Si $(a, b) \in \mathcal{R}$,
on note aussi $a\mathcal{R}b$ et on dit que a est en relation avec b.

Exemple : Si $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7\}$, alors la relation

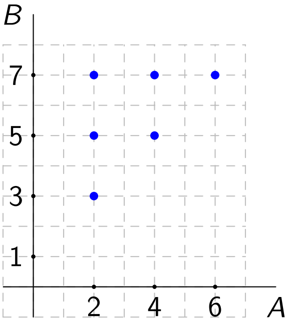
"est plus petit que",

de A dans B est

$$\mathcal{R} = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7)\}.$$

Représentation cartésienne

Si A et B sont des ensembles de nombres, on peut les représenter comme d'habitude.



C'est une représentation parmi d'autres ! La relation n'est pas le dessin. Elle permet de se faire une idée intuitive, même quand A et B ne sont pas des ensebles de nombres.

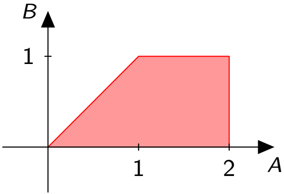
D'autres exemples

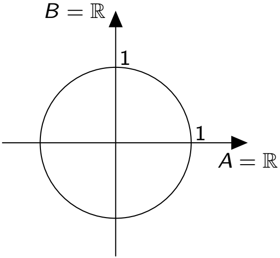
Considérons la relation $\geqslant$ de $A = [0,2]$ dans $B = [0,1]$ donnée par

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in [0,2] \times [0,1] : x \geqslant y\}.$$

Soit $\mathcal{R}_2$ la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x\mathcal{R}_2 y \quad \text{si, et seulement si} \quad x^2 + y^2 = 1.$$



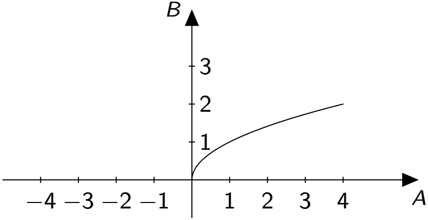


Exemples

Terminons par la relation $\mathcal{R}_3$ définie de $A = [-4, 4]$ dans $B = [0, 3]$ par

$$x\mathcal{R}_3 y \quad \text{si, et seulement si} \quad y^2 - x = 0.$$

Elle est représentée par



Domaine et image

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation de A dans B. On appelle domaine de $\mathcal{R}$ l'ensemble des points a de A qui sont en relation avec au moins un élément b de B. On le note $\mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$ ou $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$ ou encore $D_{\mathcal{R}}$. On a

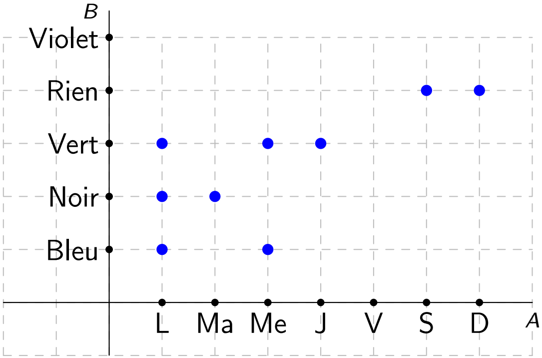
$$\mathrm{dom}_{\mathcal{R}} = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) = D_{\mathcal{R}} = \{a \in A : \exists b \in B : a\mathcal{R}b\}.$$

On appelle codomaine ou image de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ (ou $\mathrm{Im}_{\mathcal{R}}$) des points b de B tels qu'il existe au moins un élément a de A qui soit en relation avec b. On a

$$\mathrm{Im}_{\mathcal{R}} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A : a\mathcal{R}b\}.$$

Exemple

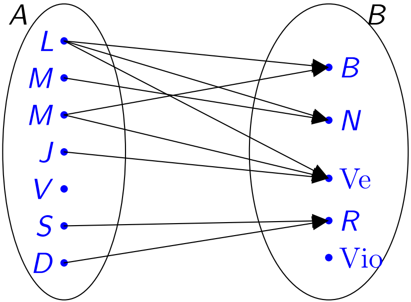
Si $A = \{\mathrm{L}, \mathrm{Ma}, \mathrm{Me}, \mathrm{J}, \mathrm{V}, \mathrm{S}, \mathrm{D}\}$ et
$B = \{\mathrm{bleu}, \mathrm{noir}, \mathrm{vert}, \mathrm{rien}, \mathrm{violet}\}$, et si $\mathcal{R}$ est représentée par



Représentation sagitale

Définition

La représentation sagittale d'une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est obtenue en représentant les ensembles par des diagrammes de Venn et en indiquant une flèche de $a \in A$ vers $b \in B$ quand $a\mathcal{R}b$.



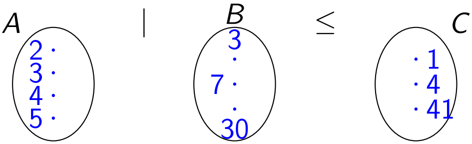
Composée de relations

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :



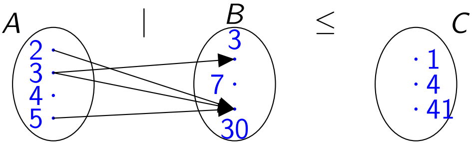
Composée de relations

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :



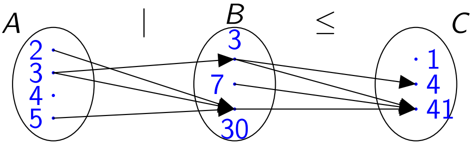
Composée de relations

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :

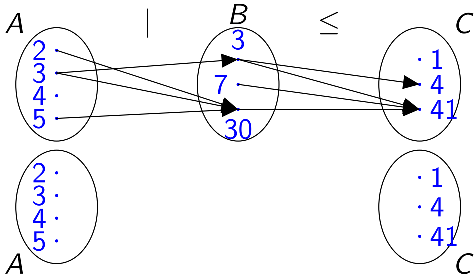


Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :



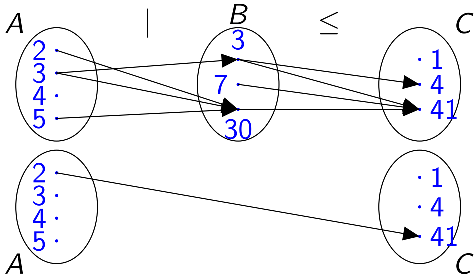
Composée de relations

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :

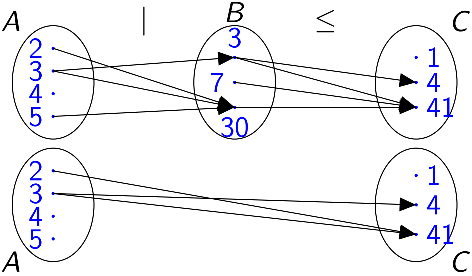


Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :

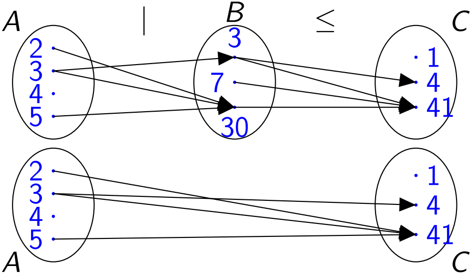


Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ et $\mathcal{R}' : B \to C$ sont des relations, alors la relation composée $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} : A \to C$ est définie par

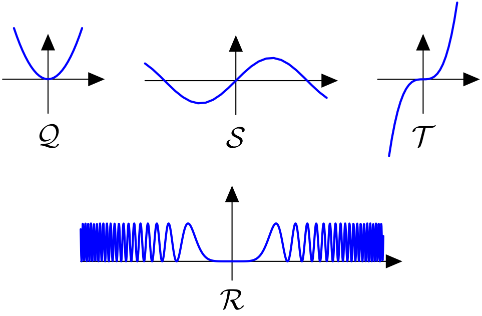
$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B : a\mathcal{R}b \quad \text{et} \quad b\mathcal{R}'c\}.$$

Exemple :



$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin^2(x^3)\}$ est une composée :

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{T}, \quad \text{où :} \quad \begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}, \\ \mathcal{S} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}, \\ \mathcal{T} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}, \end{aligned}$$



Remarque : La composée de relations est associative.

Réciproques

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, alors la relation réciproque (ou inverse) de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1} : B \to A$ définie par

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a\mathcal{R}b\}.$$

Représentation sagitale :

Réciproques

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, alors la relation réciproque (ou inverse) de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1} : B \to A$ définie par

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a\mathcal{R}b\}.$$

Représentation cartésienne :

Définition

Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, alors la relation réciproque (ou inverse) de $\mathcal{R}$ est la relation $\mathcal{R}^{-1} : B \to A$ définie par

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a\mathcal{R}b\}.$$

Propriétés :

- $\mathrm{dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Im}(\mathcal{R})$
- $\mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$
- $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(a, a') \in A \times A : \exists b \in B, (a, b), (a', b) \in \mathcal{R}\}$
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(b, b') \in B \times B : \exists a \in A, (a, b), (a, b') \in \mathcal{R}\}$

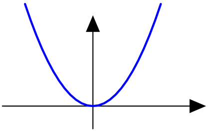
Restriction

Définition

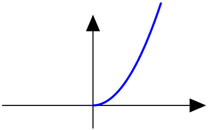
Si $\mathcal{R} : A \to B$ est une relation, et si A' est un sous-ensemble de A, alors la restriction de $\mathcal{R}$ à A' est la relation $\mathcal{R}|_{A'} : A' \to B$ définie par

$$\mathcal{R}|_{A'} = \{(a, b) \in A' \times B : a\mathcal{R}b\}.$$

Exemple :

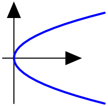


$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$



$\mathcal{R}|_{[0,+\infty[}$

Fonction = relation particulière



Ceci n'est pas le graphe d'une fonction

Définition

Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est de type fonctionnel (ou est une fonction) si tout point a de A est en relation avec au plus un élément de B, i.e.,

$$(a \in A, b_1, b_2 \in B, a\mathcal{R}b_1, a\mathcal{R}b_2) \Rightarrow b_1 = b_2.$$

Graphiquement : Dans la représentation cartésienne, une droite verticale intersecte au plus un point du graphe.

Définition

Si $f : A \to B$ est une fonction, alors si $(a, b) \in f$, on dit que b est l'image de a par $\mathcal{R}$ et on note $b = f(a)$.

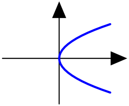
Application $=$ fonction particulière

Définition

Une relation $\mathcal{R} : A \to B$ est de type application (ou est une application) si $\mathcal{R}$ est une fonction et si $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = A$.

En résumé : Une relation $\mathcal{R} : A \to B$ est une application si “Tout point a de A est en relation avec exactement un point de b de B.”

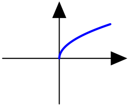
$$\forall a \in A, \exists! b \in B : a\mathcal{R}b.$$



$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$

~~fonction~~

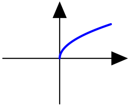
~~application~~



$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x = y^2\}$

fonction

~~application~~



$\{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x = y^2\}$

fonction

application

Restriction - Loi de transformation

Proposition

Si $f : A \to B$ est une fonction, alors $f|_{\mathrm{dom}(f)}$ est une application.

Une notation :

$$f : A \to B,\ a \mapsto f(a).$$

Elle indique que f est une application de A dans B qui à chaque point a de A **associe** son image $f(a)$.

Toute application de A dans B définit donc bien une **loi de transformation** de A dans B

Ce qu'on peut dire ou pas

- La fonction $f(x)$... Non
- La fonction $y = f(x)$... Non plus
- La fonction f... oui

Alors,

- Qu'est-ce que $f(x)$? Un élément de B
- Qu'est ce que $y = f(x)$?
  C'est l'équation cartésienne du graphe de f :

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Dans ce cadre, x représente un élément de A.

Injections, surjections

Composée d'applications = application

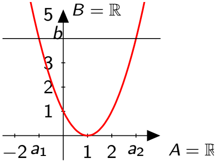
Proposition

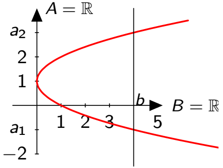
Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ sont deux applications, alors $g \circ f : A \to C$ est une application. En particulier, pour tout $a \in A$, $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Question : Et la réciproque d'une application ?

1. C'est une relation (comme réciproque d'une relation).
2. Il n'y a aucune raison que ce soit une application.

Exemple : La réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$ n'est pas une application :





Bijections

Proposition

Soit $f : A \to B$ une application. Alors f^{-1} est une application si et seulement si pour tout $b \in B$ il existe un unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$, i.e.,

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b.$$

Définition

Une application $f : A \to B$ est une bijection si pour tout $b \in B$ il existe un unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Attention :

- une relation $\mathcal{R} : A \to B$ est une application si

$$\forall a \in A, \exists! b \in B : (a, b) \in \mathcal{R}.$$

- une application $f : A \to B$ est une bijection si

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : (a, b) \in f.$$

Définition classique : une application f est une bijection si elle est injective et surjective.

On va voir que ces définitions sont équivalentes et faire le lien avec les propriétés de la relation réciproque.

Injections

Définition

Une application $f : A \to B$ est <u>injective</u> (est une <u>injection</u>) si il n'existe pas $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2)$, i.e.,

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Proposition

Une application $f : A \to B$ est injective si, et seulement si, pour tous $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$, alors $a_1 = a_2$, i.e.,

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Attention : Erreur fréquente avec la définition d'une fonction

Exemples

1. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est injective.

2. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective.

3. L'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est injective.

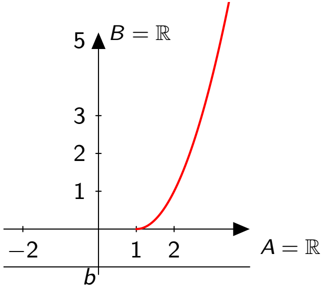
Injectivité et relation réciproque

L'injectivité garanti le caractère fonctionnel de la relation réciproque :

Proposition

Si $f : A \to B$ est une injection, alors $f^{-1} : B \to A$ est une fonction.

L'application $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$ admet une relation réciproque qui n'est pas une application :



Définition

Une application $f : A \to B$ est <u>surjective</u> (est une <u>surjection</u>) si $\mathrm{Im}(f) = B$.

Notation : $f(A) = \mathrm{Im}(f)$.

Exemples

1. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est surjective.
2. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas surjective.
3. L'application $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est surjective.

Proposition

Pour toute application $f : A \to B$, l'application $f : A \to f(A)$ est surjective.

Surjectivité et relation réciproque

Proposition

Une application $f : A \to B$ est surjective si et seulement si $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$.

Attention : f^{-1} est la notation pour la relation réciproque de f, ce n'est pas forcément une fonction !

Proposition

Soit $f : A \to B$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est une bijection ;
2. f est injective et surjective ;
3. f^{-1} est une application.

En particulier, sous ces conditions on a

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \quad \text{et} \quad (f^{-1})^{-1} = f$$

Proposition

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi ;
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi ;
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi. De plus, on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Images et pré-images de sous-ensembles

Définition

Soient $f : A \to B$ une application, $X \subset A$ et $Y \subset B$.

1. L'image de X par f est l'ensemble
$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$
2. La pré-image (ou image inverse) de Y par f est l'ensemble
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Exemples : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$

$$f([0, \frac{\pi}{2}]) =$$

$$f^{-1}([0, 1]) =$$

$$f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) =$$

Propriétés

Proposition

Soit $f : A \to B$ une application. On a alors

1. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$, pour tous $Y, Z \subset B$;
2. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$, pour tous $Y, Z \subset B$
3. $f(Y \cup Z) = f(Y) \cup f(Z)$, pour tous $Y, Z \subset A$;
4. $f(Y \cap Z) \subset f(Y) \cap f(Z)$, pour tous $Y, Z \subset A$.

En général, la dernière inclusion est stricte.

Proposition

Soit $f : A \to B$ une application. Pour tout $X \subset A$ et tout $Y \subset B$,

1. On a $X \subset f^{-1}(f(X))$, l'égalité ayant lieu notamment si f est injectif ;
2. On a $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$, l'égalité ayant lieu notamment si f est surjectif.