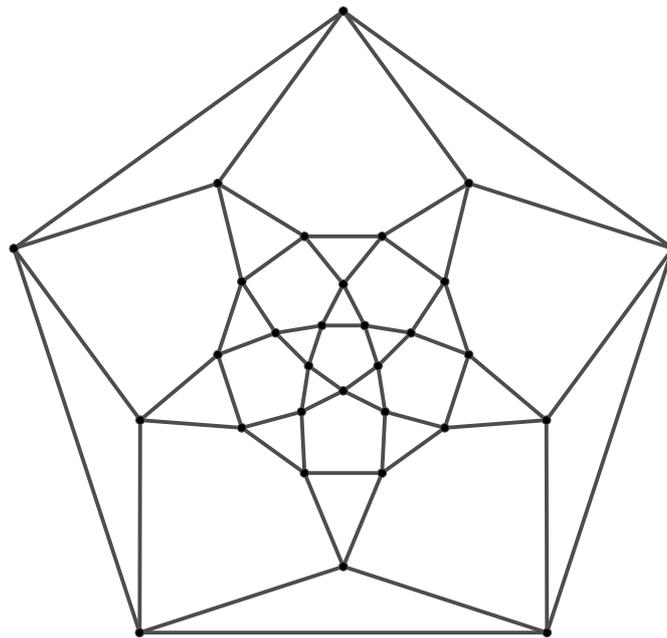




Introduction aux mathématiques discrètes

MATH2032

Bachelier en sciences de l'ingénieur, orientation ingénieur civil



Année académique 2019–2019
notes provisoires
Michel Rigo

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I. Éléments de théorie des graphes	3
1. Graphes, multi-graphes, chemins, circuits	3
2. Connexité	10
3. Sous-graphes et arbres	13
4. Recherche d'un chemin de coût minimum	18
5. Chemins et graphes eulériens ou hamiltoniens	19
6. Planarité et formule d'Euler	28
7. Problèmes de coloriage	33
Chapitre II. Rudiments de théorie algébrique des graphes	37
1. Matrice d'adjacence	37
2. Tri topologique	42
3. Matrices primitives et algorithme du PageRank	44
Chapitre III. Techniques de dénombrement	51
1. Un peu de combinatoire	51
2. Suites linéaires récurrentes	55
3. Matrice compagnon	62
4. Séries formelles	64
5. Equations aux différences	71
6. Annexe	71
Bibliographie	75
Index	77

Introduction

En mathématiques, l'adjectif *discret* s'oppose en général à l'adjectif *continu*. Par exemple, en théorie des probabilités, une variable aléatoire est dite *discrète* si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs ou, au mieux, une infinité dénombrable¹ de valeurs. Par contre, une variable aléatoire sera dite *continue* si l'ensemble des valeurs prises est non dénombrable, par exemple, un intervalle de \mathbb{R} . Autre exemple, une partie D de \mathbb{R}^n sera dite *discrète* si pour tout point x de D , il existe une boule B telle que $B \cap D = \{x\}$. Ceci traduit l'idée d'avoir des points "isolés".

Dès lors, les mathématiques discrètes ne déterminent pas, à proprement parler, une branche des mathématiques comme l'analyse ou la géométrie mais sont définies par les objets étudiés. On s'intéresse à des problèmes de nature combinatoire comme le dénombrement (comptage) d'objets ou de configurations mais pas seulement. On y étudie, d'une façon générale, des structures mathématiques discrètes comme les entiers ou les graphes.

Plutôt que d'étudier les propriétés d'une fonction (supposons-la continue) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on pourra évaluer (ou échantillonner) cette fonction sur un ensemble discret et se ramener à l'étude d'une suite de nombres réels comme

$$(f(n))_{n \in \mathbb{N}} = f(0), f(1), f(2), \dots$$

On parle dès lors de *discrétisation* d'un signal ou d'un problème (cf. Fig. .1). En procédant de la sorte, on remplace le problème initial par une approximation discrète généralement plus simple à traiter (mais pour laquelle il faudra gérer les erreurs liées à l'approximation). Pour stocker un son sur un CD,

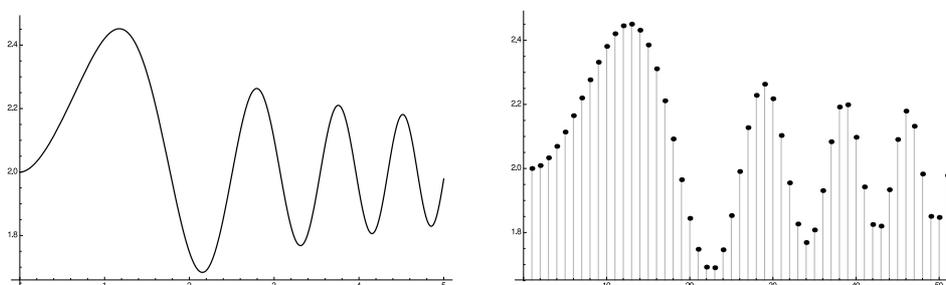


FIGURE .1. Une fonction et sa version discrétisée (pas constant de 0, 1).

¹l'ensemble des valeurs prises est en bijection avec \mathbb{N} ou une de ses parties.

on mesure à une fréquence de 44,1 kHz la valeur d'un signal analogique (par exemple, la tension en volts issue d'un microphone servant à la captation) et on la convertit en une valeur numérique. On obtient ainsi une suite de nombres qui seront gravés sur le support.

Dans une société du numérique où les données et la connectivité occupent une place prépondérante dans la vie de tout citoyen, les applications des mathématiques discrètes sont nombreuses et variées : en informatique et en algorithmique (codes correcteurs d'erreurs, compression, cryptographie, exploitation de "big data" en sciences des données, analyse d'algorithmes, ...), en recherche opérationnelle (tournées de distribution, problèmes d'ordonnement de tâches, allocation de ressources, planification, ...), en théorie des graphes (algorithme du PageRank, détection de communautés, recherche d'un chemin le plus court, ...). En mathématiques discrètes, on trouve encore la théorie des jeux, l'informatique théorique (théorie des langages formels, théorie de la complexité), l'optimisation discrète, la géométrie discrète, la combinatoire des mots, *etc.*

Ce cours introductif se concentre sur deux points saillants : des éléments de théorie des graphes et quelques problèmes de dénombrement débouchant sur la théorie des suites linéaires récurrentes. Il permet de mettre en application des résultats d'algèbre linéaire (zéros de polynômes, diagonalisation, ...). La théorie des graphes n'a reçu qu'assez tardivement l'attention de la part de la communauté mathématique. En effet, bien que les graphes eulériens soient l'émanation du célèbre problème des sept ponts de Königsberg étudié par Euler en 1736 (nous en reparlerons à la section 5 du premier chapitre), on peut dire que les premiers développements majeurs de la théorie des graphes datent du milieu du vingtième siècle avec N. Biggs, C. Berge ou encore W.T. Tutte. Ainsi, un des premiers ouvrages, si pas le premier, traitant de théorie des graphes "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*" écrit par König remonte à 1936. Depuis cette époque, la théorie des graphes s'est largement développée et fait à présent partie du cursus standard de bon nombre d'universités. Les méthodes mises en évidence sont souvent tout autre et complètent celles des "*mathématiques du continu*" comme l'analyse. Nous espérons ainsi que cette présentation permettra à l'étudiant d'enrichir sa palette de techniques et de raisonnements mathématiques.

Ces notes servent de référence et complètent les transparents présentés lors des séances du cours théorique. Ces derniers contiennent de nombreux exemples et compléments non repris dans ces notes. La matière de l'examen correspond uniquement à la matière couverte lors des cours théoriques et des séances de répétition. Une courte bibliographie donne des pistes au lecteur curieux (la plupart de ces références sont facilement accessibles en ligne).

CHAPITRE I

Eléments de théorie des graphes

Dans ces notes, \mathbb{N} désigne l'ensemble des naturels $0, 1, 2, \dots$. Pour un ensemble fini A , on dénote par $\#A$ le *cardinal* de A , i.e., le nombre d'éléments de A . Nous travaillerons presque exclusivement avec des ensembles finis.

1. Graphes, multi-graphes, chemins, circuits

Nous donnons ci-dessous quelques définitions élémentaires. Le lecteur doit garder à l'esprit que les graphes permettent de modéliser de nombreuses situations réelles : connexions par avion entre aéroports, réseaux de transport, réseaux de distribution d'énergie, migrations, "followers" sur Twitter, "amis" sur FaceBook, coauteurs d'articles scientifiques, pages Web référencées par d'autres pages, appels téléphoniques, interactions biomoléculaires, ...

Définition I.1.1. Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une *relation* sur V , un ensemble de couples d'éléments de V). Le *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E) . Les éléments de V sont appelés les *sommets*¹ de G . Les éléments de E sont appelés les *arcs*² de G . Si V est fini, on parlera de *graphe fini*. Dans ce cas, E est alors fini et contient au plus $(\#V)^2$ arcs.

Remarque I.1.2. Observons que l'ordre au sein des couples appartenant à E est intrinsèquement présent³. Si on souhaite insister sur cette notion d'ordre, on parlera alors de *graphe orienté* ou de *graphe dirigé*. Soit I , un ensemble d'indices. Si $V = \{v_i \mid i \in I\}$ et si $a = (v_i, v_j)$, $i, j \in I$, on pourra alors parler de l'*origine* v_i et de la *destination* v_j de l'arc a . On dit que v_i et v_j sont les *extrémités* de l'arc a et que a *relie* v_i à v_j . Si $b = (v_i, v_i)$, on parle de la *boucle* b . Il est commode de donner une représentation sagittale d'un graphe. Celle-ci n'est pas unique. Les sommets sont représentés par des points et si (v_i, v_j) est un arc, alors on trace une flèche de v_i vers v_j (cf. Fig. I.1). Deux arcs sont *adjacents* s'ils ont au moins une extrémité en commun.

¹En anglais, cela se dit "*vertex*" (au pluriel, "*vertices*"). D'où l'initiale V pour désigner l'ensemble des sommets. Dans ces notes, nous ne dérogerons pas à la coutume anglo-saxonne de noter un graphe $G = (V, E)$.

²En anglais, cela se dit "*edge*". D'où l'initiale usuelle E .

³On parle de *couple* et non de *paire*. Un couple est une paire ordonnée. On distingue d'ailleurs les notations (x, y) et $\{x, y\}$.

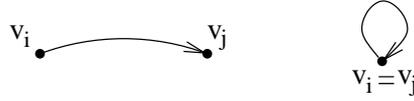


FIGURE I.1. Un arc reliant deux sommets, une boucle.

Définition I.1.3. Soit $a = (v_i, v_j) \in E$. On dit que a est un arc *sortant* de v_i ou encore que a est un arc *incident* à v_i vers l'extérieur (resp. un arc *entrant* dans v_j ou encore que a est un arc *incident* à v_j vers l'intérieur). L'ensemble des arcs sortant de v_i est noté $\omega^+(v_i)$ et l'ensemble des arcs entrant dans v_j est noté $\omega^-(v_j)$. L'ensemble des arcs incidents à un sommet v est $\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$. On définit le *demi-degré sortant* (resp. *demi-degré entrant*) d'un sommet v par

$$d^+(v) = \#(\omega^+(v)) \quad (\text{resp. } d^-(v) = \#(\omega^-(v))).$$

Enfin, le *degré* de v est $\deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$. L'ensemble des *successeurs* d'un sommet v est l'ensemble $\text{succ}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets s_i tels que $(v, s_i) \in \omega^+(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$. De manière analogue, l'ensemble des *prédécesseurs* d'un sommet v est l'ensemble $\text{pred}(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets s_i tels que $(s_i, v) \in \omega^-(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$. Enfin, l'ensemble des voisins de v est simplement

$$\nu(v) = \text{pred}(v) \cup \text{succ}(v).$$

Si u appartient à $\nu(v)$, on dit que u et v sont des sommets *voisins* ou *adjacents*.

Remarque I.1.4 (Handshaking formula). Si $G = (V, E)$ est un graphe fini, il est clair que

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

En effet, cette quantité est égale au nombre d'arcs du graphe. Ceux-ci ayant chacun une origine et une destination.

Exemple I.1.5. Soit le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$E = \{(a, b), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}.$$

Celui-ci est représenté à la figure I.2. Par exemple, $\omega^+(a) = \{(a, b), (a, e)\}$

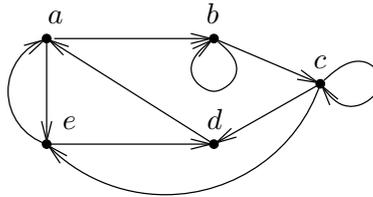


FIGURE I.2. Un exemple de graphe.

et $\omega^-(d) = \{(c, d), (e, d)\}$. On a aussi $\text{succ}(a) = \{b, e\}$, $\text{succ}(b) = \{b, c\}$,

$\text{pred}(d) = \{c, e\}$ et $\nu(a) = \{b, d, e\}$. On voit aussi que les arcs (e, a) et (d, a) sont adjacents. Enfin, le demi-degré sortant de c est $d^+(c) = 3$.

Définition I.1.6. Un *multi-ensemble*⁴ est un ensemble au sein duquel un même élément peut être répété plus d'une fois. Ainsi, on s'intéresse non seulement à savoir si un élément appartient ou non à un multi-ensemble donné, mais également à sa multiplicité (on suppose qu'un élément est répété au plus un nombre dénombrable de fois). Par exemple, $\{1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3\}$ sont des multi-ensembles distincts. Pour distinguer les copies d'un même élément, il est commode de les indiquer. Par exemple, on considère le multi-ensemble $\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3\}$. Cette manière de procéder nous permettra de définir facilement des fonctions définies sur un multi-ensemble.

Un *multi-graphe* $G = (V, E)$ est un graphe pour lequel l'ensemble E des arcs est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés. Un exemple de représentation d'un multi-graphe est donné à la figure I.3. Un multi-graphe $G = (V, E)$ est *fini* si

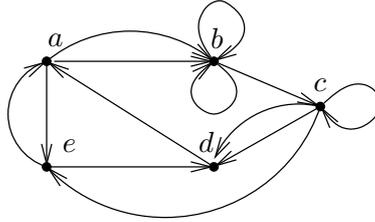


FIGURE I.3. Un exemple de multi-graphe.

V et E sont finis. En effet, dans le cas des multi-graphes, supposer V fini n'implique pas que E soit fini.

Il est laissé au lecteur le soin d'adapter les définitions de $\omega^+(v)$, $d^+(v)$, $\text{succ}(v)$ et $\omega^-(v)$, $d^-(v)$, $\text{pred}(v)$. En particulier, $\omega^+(v)$ et $\omega^-(v)$ sont en général des multi-ensembles. De même, la "handshaking formula" s'étend sans peine.

Définition I.1.7. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *simple* s'il ne s'agit pas d'un multi-graphe et si E est irréflexif, c'est-à-dire que quel que soit $v \in V$, (v, v) n'appartient pas à E , i.e., G ne contient pas de boucle. Un exemple de graphe simple est donné à la figure I.4.

On choisira le modèle de graphe, de multi-graphe ou de graphe simple en fonction du problème considéré. Passons à présent aux graphes non orientés qui sont en fait un cas particulier des graphes orientés : ceux pour lesquels la relation E définissant les arcs du graphe est symétrique.

⁴Cette définition n'est pas très rigoureuse. En effet, le concept même d'ensemble vous a toujours été introduit de manière naïve.

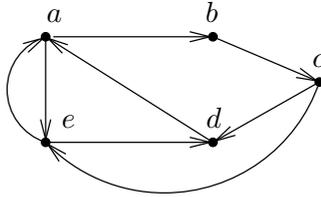


FIGURE I.4. Un exemple de graphe simple.

Définition I.1.8. Soit $G = (V, E)$ un graphe (resp. un multi-graphe). Si E est une relation symétrique sur V , on dira que G est un graphe (resp. un multi-graphe) *non dirigé* ou *non orienté*. Autrement dit, G est non dirigé si

$$\forall v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

Dans ce cas, on simplifie la représentation sagittale de G en traçant simplement un segment entre v_1 et v_2 . Pour alléger l'écriture, on identifiera les arcs (v_i, v_j) et (v_j, v_i) avec une unique "arête non orientée" donnée par la paire $\{v_i, v_j\}$. Dans le cas dirigé (resp. non dirigé), nous nous efforcerons de parler d'arcs (resp. d'arêtes).

Si par contre, on désire insister sur le caractère non symétrique de E , on parlera de graphe *dirigé* ou, par abus de langage, *digraphe*⁵.

Comme on le voit à la figure I.5, un même graphe peut avoir plus d'une représentation. Deux graphes définissant la même structure (autrement dit, donnant lieu à la même représentation) sont dit *isomorphes*.

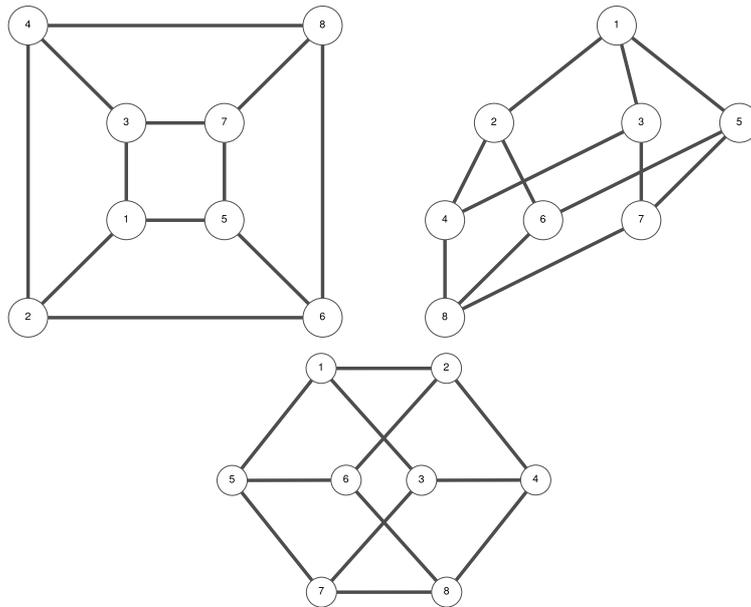


FIGURE I.5. Trois représentations d'un même graphe (non dirigé).

⁵En anglais "directed graph" se contracte en "digraph".

Les définitions rencontrées précédemment s'adaptent aisément au cas non orienté.

Définition I.1.9. Soient $G = (V, E)$, un multi-graphe non orienté et $a = \{v_i, v_j\}$ une de ses arêtes. On dit que a est *incidente* aux sommets v_i et v_j . Le nombre d'arêtes incidentes à v_i est le *degré* de v_i , noté $\deg(v_i)$. On suppose en outre que les **boucles** apportent une double contribution au degré d'un sommet. L'ensemble des arêtes incidentes à v_i se note $\omega(v_i)$. Il est clair que, dans un graphe simple, $\deg(v_i) = \#\omega(v_i)$. Ces notations sont bien évidemment compatibles avec celles données dans le cas orienté. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité en commun.

Deux sommets $v_i, v_j \in V$ sont *adjacents* si l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à E . On dit aussi qu'ils sont *voisins*. L'ensemble des voisins de v se note $\nu(v)$.

Remarque I.1.10 (Handshaking formula – version 2). Si $G = (V, E)$ est un multi-graphe non orienté, alors

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \#E.$$

C'est immédiat. Et on comprend mieux la double contribution des boucles pour le degré d'un sommet. . . .

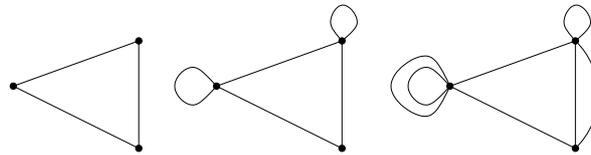


FIGURE I.6. Un graphe (non dirigé) simple, un graphe et un multi-graphe.

Un graphe $G = (V, E)$ est *complet* si $E = V \times V$, plus exactement, on suppose souvent que

$$E = V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$$

(autrement dit, on supprime les boucles). En particulier, un graphe complet est symétrique. On note K_n le graphe simple non orienté complet à n sommets. Ainsi, la figure I.7 (à droite) représente le graphe K_5 . Dans ce cours, lorsqu'on parlera de graphes complets, il sera sous-entendu qu'il s'agit de graphes simples et non orientés.

Définition I.1.11. Soit $k \geq 1$. Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) $G = (V, E)$ est *k-régulier* si pour tout $v \in V$, $d^+(v) = k$ (resp. $\deg(v) = k$). Le graphe de gauche de la figure I.7 possède 6 sommets et est 3-régulier. Celui de droite est 4-régulier, simple et complet.

Définition I.1.12. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si V peut être partitionné en deux ensembles (disjoints) V_1 et V_2 de manière telle que $E \subseteq V_1 \times V_2$. Si $\#V_1 = m$, $\#V_2 = n$ et $E = V_1 \times V_2$, alors on parle du graphe

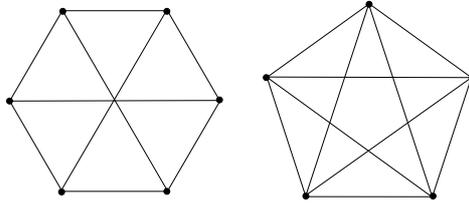


FIGURE I.7. Des graphes non orientés 3 et 4-réguliers.

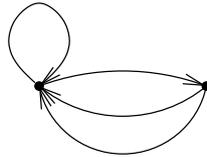


FIGURE I.8. Un multi-graphe orienté 2-régulier.

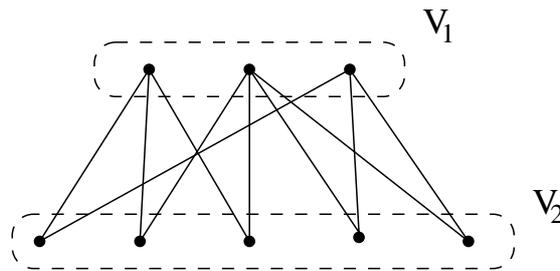


FIGURE I.9. Un graphe biparti (non complet).

biparti *complet* et il est noté $K_{m,n}$. On peut généraliser cette notion et définir des graphes n -partis, pour $n \geq 2$. Pour ce faire, V doit être partitionné en n sous-ensembles non vides V_1, \dots, V_n de manière telle que

$$E \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j.$$

Les définitions suivantes sont somme toute assez naturelles et intuitives, mais il faut bien les préciser au moins une fois de manière rigoureuse pour savoir de quoi on parle exactement. Nous ne détaillons que le cas non orienté. Le cas **orienté** est identique, il suffit de prendre en compte l'orientation des arcs.

Définition I.1.13. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un *chemin* de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée (e_1, \dots, e_k) de k arêtes adjacentes $e_i = \{e_{i,1}, e_{i,2}\}$, i.e., pour tous $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $e_{i,2} = e_{i+1,1}$. Ce chemin de longueur k *joint* les sommets $e_{1,1}$ et $e_{k,2}$. On dit que le chemin (e_1, \dots, e_k) *passse* par les arêtes e_1, \dots, e_k (resp. par les sommets $e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, e_{k,1}$ et $e_{k,2}$). On supposera qu'un chemin de longueur 0 (correspondant à la suite vide) joint toujours un sommet à lui-même.

Si les extrémités du chemin sont égales, i.e., si $e_{1,1} = e_{k,2}$, on parle plutôt de *cycle*, de *circuit* (certains auteurs réservent ce terme au cas de cycles orientés) ou encore de *chemin fermé*. Si on désire préciser que le chemin considéré n'est pas un cycle, on parlera de *chemin ouvert*.

Il se peut que les arêtes d'un chemin soient toutes distinctes (cela n'implique pas que les sommets du chemin soient tous distincts). On parle alors de *piste* ou de chemin *élémentaire* (voir par exemple, la figure I.10).

Si les arêtes d'un chemin sont toutes distinctes **et** si de plus, les sommets sont tous distincts⁶, on parle alors de chemin *simple*.

Bien sûr, les circuits étant des chemins particuliers, on parle aussi de circuit élémentaire ou simple (voir par exemple, la figure I.11). Ainsi, dans un circuit simple, les sommets $e_{1,1}$ de départ et $e_{k,2}$ d'arrivée sont les seuls à être égaux et chaque sommet est de degré 2.

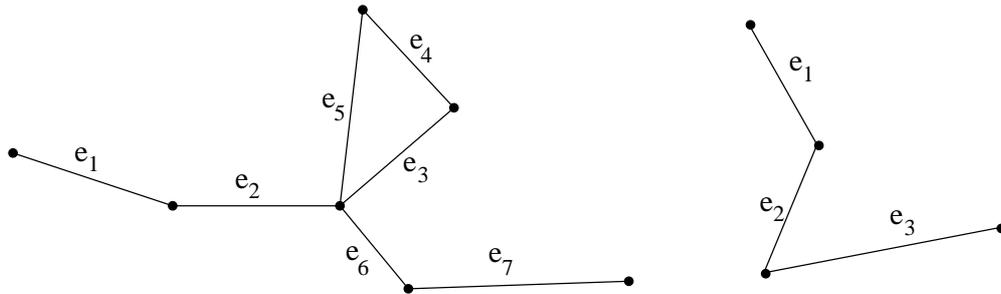


FIGURE I.10. Une piste (ou chemin élémentaire) et un chemin simple

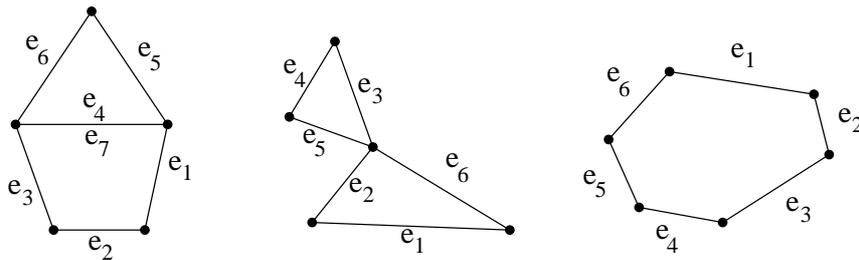


FIGURE I.11. Un circuit, un circuit élémentaire (ou piste fermée) et un circuit simple.

Remarque I.1.14. Suivant les auteurs, la terminologie peut changer énormément. Ainsi, il n'est pas rare (par exemple, pour C. Berge), d'inverser les définitions des adjectifs *simple* et *élémentaire*. Pour d'autres, la notion de cycle contient de plus le caractère *élémentaire*, voire *simple*. Ainsi, lorsque

⁶Sauf dans le cas pathologique du circuit $(\{a, b\}, \{b, a\})$, demander que les sommets d'un chemin soient tous distincts (mis à part les extrémités du chemin dans le cas d'un circuit), implique que les arêtes sont aussi toutes distinctes.

vous utilisez d'autres sources, prenez le temps de bien vérifier les définitions utilisées.

Remarque I.1.15. Dans le cas d'un graphe qui n'est pas un multi-graphe, un chemin est aussi univoquement déterminé par une suite de sommets (v_1, \dots, v_k) de manière telle que $\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête du graphe.

2. Connexité

Pour rappel, une *relation d'équivalence* R sur un ensemble V est

- ▶ réflexive : $\forall v \in V, vRv$
- ▶ symétrique : $\forall v, w \in V, vRw \Rightarrow wRv$
- ▶ transitive : $\forall v, w, z \in V, (vRw \& wRz) \Rightarrow vRz$.

Si $v \in V$, la *classe d'équivalence* de v (pour la relation R) est l'ensemble $\{w \in v \mid vRw\}$ des éléments en relation avec v .

Définition I.2.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté. Deux sommets a et b sont *connectés* s'il existe un chemin les joignant, ce que l'on notera $a \sim b$. La relation \sim "être connecté" est une relation d'équivalence sur V . Une classe d'équivalence pour \sim est une *composante connexe* de G . Autrement dit, une composante connexe est un sous-ensemble maximal de sommets 2 à 2 connectés.

Un multi-graphe non orienté est *connexe* s'il possède une seule composante connexe. Autrement dit, un multi-graphe non orienté est connexe si, pour toute paire de sommets, il existe un chemin les joignant. On supposera de plus qu'un graphe trivial $G = (\{v\}, \emptyset)$ restreint à un unique sommet est connexe (ce qui revient à supposer qu'un chemin de longueur 0 joint toujours un sommet à lui-même).

Il est clair que lorsqu'on s'intéresse à la connexité d'un graphe, il suffit de considérer des graphes simples. L'existence de boucles ou d'arêtes multiples n'a pas d'incidence sur la connexité du graphe.

Algorithme I.2.2. La donnée fournie à cet algorithme est un graphe non orienté $G = (V, E)$, l'ensemble des sorties possibles est $\{\text{oui}, \text{non}\}$.

```

Considérer un sommet quelconque  $v_0 \in V$ 
Composante :=  $\{v_0\}$ , New :=  $\{v_0\}$ 
Tant que New  $\neq \emptyset$ 
  Voisins :=  $\emptyset$ 
  pour tout sommet  $v$  appartenant à New
    Voisins := Voisins  $\cup \nu(v)$ 
  New := Voisins  $\setminus$  Composante
  Composante := Composante  $\cup$  New
Si Composante =  $V$ 
  alors sortie : "oui,  $G$  connexe"
  sinon sortie : "non,  $G$  non connexe"

```

Il s'agit d'un algorithme "tache d'huile" ou "glouton" (on détermine de proche en proche, les sommets accessibles depuis le sommet v_0). La variable **Composante** est destinée à contenir la composante connexe du sommet v_0 . La variable **New** contient les sommets qui, à l'étape en cours d'exécution, sont nouvellement déterminés comme appartenant à la composante connexe. Il s'agit donc de deux variables de type ensembliste. Lorsqu'il n'y a plus de nouveaux sommets à ajouter à la liste des sommets appartenant à la composante connexe, l'algorithme s'achève. Il reste alors à déterminer si cette composante connexe contient ou non tous les sommets de G . En particulier, à la fin de cet algorithme, la variable **Composante** est égale à la composante connexe de v_0 .

L'emploi de cet algorithme est facilité par la construction préalable d'un dictionnaire des voisins. Il s'agit d'une liste associant à chaque sommet v , l'ensemble $\nu(v)$ de ses voisins.

Définition I.2.3. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté connexe. (Si G n'était pas connexe, la fonction distance ne serait pas une fonction totale définie sur $V \times V$ tout entier.). La *distance*⁷ entre deux sommets a et b est la longueur du plus court chemin joignant a et b . On la note $d(a, b)$. Le *diamètre* de G est quant à lui défini par

$$\text{diam}(G) = \max_{a, b \in V} d(a, b).$$

Définition I.2.4. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté. S'il existe un chemin joignant le sommet a au sommet b (en respectant le sens de parcours des arcs), on note $a \rightarrow b$. Si $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$, on dit que a et b sont *fortement connectés* et on note $a \leftrightarrow b$. On impose à \leftrightarrow d'être réflexive (i.e., on suppose $a \leftrightarrow a$). On vérifie aisément que la relation \leftrightarrow "être fortement connecté" est une relation d'équivalence sur V . Une classe d'équivalence pour \leftrightarrow est une *composante fortement connexe* (ou, plus court, *f. connexe*) de G . Il s'agit d'un sous-ensemble maximal de sommets fortement connectés. Si V forme une composante f. connexe, on dira que G est *fortement connexe* (ou *f. connexe*).

Les sommets appartenant à un cycle maximal, i.e., un cycle auquel on ne peut adjoindre de nouveaux sommets, constituent une composante f. connexe. Autrement dit, un multi-graphe orienté G est f. connexe si et seulement si il existe un cycle passant par chaque sommet de celui-ci.

Si on supprime l'orientation des arcs de G et si le multi-graphe non orienté obtenu de cette manière est connexe, alors on dira que G est *simplement connexe* (ou *s. connexe*). On pourra bien entendu définir, de manière évidente, les *composantes simplement connexes* (ou *s. connexe* de G).

Remarque I.2.5. Les notions de distance et de diamètre données dans le cas non orienté s'adaptent facilement au cas d'un multi-graphe orienté

⁷On peut vérifier qu'il s'agit effectivement d'une distance au sens mathématique du terme: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et enfin, on vérifie l'inégalité triangulaire.

fortement connexe. On remarquera cependant qu'ici, la fonction $d(\cdot, \cdot)$ n'est en général pas symétrique. Il ne peut donc pas s'agir à proprement parler d'une distance (au sens mathématique du terme).

Exemple I.2.6. Considérons le multi-graphe orienté de la figure I.12 dont l'ensemble des sommets est $\{a, \dots, e\}$ et l'ensemble des arcs est $\{1, \dots, 7\}$. Ce graphe est simplement connexe mais il n'est pas fortement connexe. En

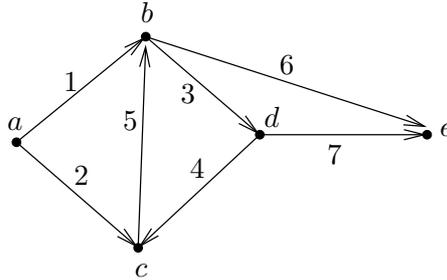


FIGURE I.12. Un graphe orienté.

effet, il n'existe pas de chemin joignant les sommets d à a . L'ensemble $\{b, c, d\}$ est une composante fortement connexe du graphe (les deux autres composantes sont $\{a\}$ et $\{e\}$). La distance entre d et c vaut 1. Par contre, la distance entre c et d vaut 2.

La détermination de la composante fortement connexe contenant un sommet donné v_0 s'inspire de l'algorithme I.2.2. Il est clair que, pour ce problème, il suffit de considérer le cas de graphes orientés simples.

Définition I.2.7. La clôture réflexive et transitive de l'application succ est définie comme suit,

$$\text{succ}^*(v) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{succ}^j(v) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{succ}^0(v) = v \\ \text{succ}^{j+1}(v) = \text{succ}(\text{succ}^j(v)) \end{cases} .$$

Autrement dit, $\text{succ}^*(v)$ est l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis v (en empruntant un chemin de longueur arbitraire). Si le graphe G est fini, il est clair que

$$\text{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^{\#E} \text{succ}^j(v).$$

De même, s'il existe $k < \#E$ tel que $\text{succ}^k(v) = \text{succ}^{k+1}(v)$, alors

$$\text{succ}^*(v) = \bigcup_{j=0}^k \text{succ}^j(v).$$

Avec les notations précédentes, pour tous $a, b \in V$,

$$a \rightarrow b \Leftrightarrow b \in \text{succ}^*(a).$$

Remarque I.2.8. On définit de manière semblable la clôture réflexive et transitive de l'application pred . On a bien évidemment, pour tous sommets a et b ,

$$b \rightarrow a \Leftrightarrow b \in \text{pred}^*(a).$$

Ainsi,

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \in \text{succ}^*(a) \cap \text{pred}^*(a).$$

L'algorithme I.2.2 peut facilement être adapté pour calculer $\text{succ}^*(a)$ (resp. $\text{pred}^*(a)$). Il suffit principalement d'initialiser les variables **Composante** et **New** à $\{a\}$ et de remplacer $\nu(v)$ par $\text{succ}(v)$ (resp. $\text{pred}(v)$). En recherchant ainsi l'intersection des deux ensembles, on détermine la composante f. connexe du sommet a . Si cette composante est égale à l'ensemble des sommets, alors le graphe est f. connexe.

Remarque I.2.9. Supposons qu'un graphe orienté possède au moins deux composantes f. connexes A et B . S'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \rightarrow b$, alors il n'existe aucun $a' \in A$ et $b' \in B$ tels que $b' \rightarrow a'$. En effet, si tel était le cas, $A \cup B$ serait alors une composante f. connexe de G . Ceci est impossible vu la maximalité des composantes connexes.

3. Sous-graphes et arbres

Grosso-modo, un sous-graphe d'un graphe donné est un graphe obtenu en supprimant certains sommets et/ou arêtes.

Définition I.3.1. Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes (orientés ou non). Le graphe G' est un *sous-graphe* de G si

- ▶ $V' \subseteq V$,
- ▶ $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$.

Ainsi, G' est un sous-graphe de G s'il est obtenu en enlevant à G certains sommets et/ou certains arcs ou arêtes. En particulier, si on enlève un sommet v de G , il faut nécessairement enlever tous les arcs (ou arêtes) incidents à v . Par contre, pour construire G' , on peut très bien enlever un arc (ou une arête) de G sans pour autant enlever le moindre sommet de G . Le graphe G' est un *sous-graphe propre* de G si $E' \subsetneq E$ ou $V' \subsetneq V$. Dans le premier

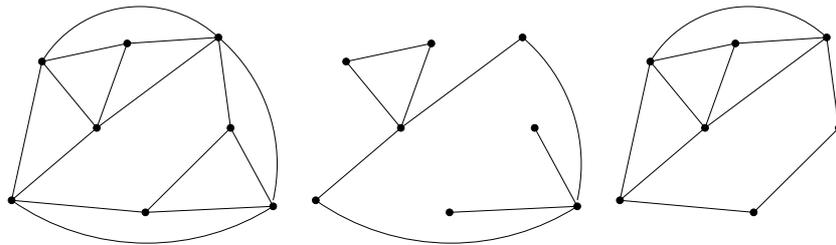


FIGURE I.13. Un graphe et deux sous-graphes.

sous-graphe de la figure I.13, on a enlevé uniquement certaines arêtes. Dans

le second, on a enlevé un sommet et les arêtes adjacentes. Par exemple, tout sous-graphe d'un graphe biparti est encore biparti.

Soient $v \in V$ et $e \in E$. On note $G - e$ (resp. $G - v$) le sous-graphe G' de G obtenu en supprimant l'arc (ou l'arête) e (resp. le sous-graphe G' obtenu en supprimant le sommet v et les arcs (ou les arêtes) adjacents).

Soit $W \subseteq V$. Le sous-graphe de G induit par W est le sous-graphe $G' = (W, E')$ avec $E' = E \cap (W \times W)$. Par exemple, tout sous-graphe induit d'un graphe complet est encore complet.

Si $W \subseteq V$ est tel que le sous-graphe induit par W ne contient aucune arête, alors les sommets de W sont dits *indépendants*. Le nombre maximal de sommets indépendants de G est noté $\alpha(G)$.

Définition I.3.2. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $G' = (V', E')$ un de ses sous-graphes. On dit que G' est un *sous-graphe couvrant* G , si $V' = V$ et si

$$\forall v \in V, \exists z \in V : \{z, v\} \in E'.$$

On dira que E' est une couverture (des sommets) de G . Autrement dit, tout sommet de G est une extrémité d'une arête de E' .

Les graphes connexes acycliques jouent un rôle prépondérant dans diverses applications ou encore dans de nombreux exemples tirés de l'informatique : arbres binaires de recherche, bases de données, etc. . . .

Définition I.3.3. Un graphe simple non orienté $A = (V, E)$ est un *arbre* s'il est connexe et sans *cycle* (sous-entendu, un "véritable" cycle : une piste fermée, pas un cycle "artificiel" comme un trivial $(\{a, b\}, \{b, a\})$ qui est un cycle de longueur 2; le fait d'imposer l'absence d'une piste fermée évite de telles arêtes doublées et on pourrait de manière équivalente imposer l'absence de circuit simple). Une *forêt* est un graphe simple non orienté dont chaque composante connexe est un arbre⁸.

Lemme I.3.4. *Tout arbre (non réduit à un unique sommet) contient un sommet de degré 1.*

Démonstration. Il suffit de procéder par l'absurde. Un graphe connexe dont tout sommet est de degré au moins 2 contient un cycle (cf. preuve du théorème I.5.3). On pourrait aussi raisonner sur un chemin simple de longueur maximale (cf. lemme II.2.1).

■

Proposition I.3.5. *Soit $G = (V, E)$ un arbre ayant n sommets.*

- ▶ *Toute paire de sommets distincts de G est connectée par exactement un chemin simple.*
- ▶ *Soit $e \in (V \times V) \setminus E$ qui n'est pas une boucle. Le graphe G auquel on adjoint l'arête e contient une piste fermée.*

⁸Une forêt est formée d'arbres, fallait-il faire des maths pour s'en rendre compte ?

- ▶ Toute arête e de G est une arête de coupure, i.e., le graphe $G - e$ n'est plus connexe.
- ▶ Le graphe G a exactement $n - 1$ arêtes.

Démonstration. Pour l'avant-dernier point, on remarque qu'une arête est une arête de coupure si et seulement si elle n'appartient à aucune piste fermée. Nous démontrons uniquement le dernier point. On procède par récurrence sur $\#V$. Si $\#V = 1$, on est en présence d'un unique sommet sans la moindre arête. Si $\#V = 2$, on est présence du graphe complet K_2 possédant une unique arête. Supposons le résultat vérifié pour $n \geq 1$ sommets, l'est-il encore avec $n + 1$ sommets ? Au vu du lemme précédent, l'arbre G possède un sommet v de degré 1. Le graphe $G - v$ est encore un arbre et possède un sommet de moins. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure. ■

Corollaire I.3.6. *Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.*

Démonstration. Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $C = (V, E')$ un sous-graphe couvrant connexe minimal (i.e., on ne peut pas remplacer E' par un sous-ensemble strict tout en conservant la connexité de C). Vu la minimalité de C , chacune de ses arêtes est une arête de coupure de C . Par la proposition précédente, on en conclut que C est un arbre. ■

Corollaire I.3.7. *Si $G = (V, E)$ est un graphe (simple non orienté) connexe, alors $\#E \geq \#V - 1$.*

Démonstration. Par le corollaire précédent, G possède un sous-arbre couvrant $C = (V, E')$. De là, il vient

$$\#E \geq \#E' = \#V - 1$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé la proposition I.3.5. ■

Définition I.3.8. Un arbre $A = (V, E)$ dans lequel on a privilégié un sommet v_0 est appelé *arbre pointé*⁹. On le notera (A, v_0) . Le sommet v_0 est parfois appelé la *racine* de l'arbre. Les sommets peuvent dès lors être classés selon leur distance à la racine v_0 . Les sommets à distance i forment les sommets de niveau i . La *hauteur* d'un arbre est la distance maximale des sommets à la racine de l'arbre. Un arbre *k-aire* est tel que chaque sommet de niveau i possède au plus k voisins de niveau $i + 1$. On parlera de ses successeurs ou de ses *filles*. S'il existe un chemin entre un sommet u de niveau i et un sommet v de niveau j , $i < j$, on dira que v est un *descendant* de u ou que u est un *ancêtre* de v .

⁹en anglais, *rooted tree*.

Un parcours d'un arbre est une façon d'en ordonner les sommets. On supposera implicitement que les fils d'un sommet v_i sont ordonnés

$$v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$$

et que cet ordre est connu et fixé une fois pour toutes.

On distingue trois types de *parcours en profondeur*: les parcours préfixe, infixe et suffixe. Soit (A, v_0) un arbre pointé. Pour le *parcours préfixe*, on parcourt d'abord la racine puis on parcourt, de manière récursive et dans l'ordre, les sous-arbres pointés de racine respective $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$. Pour le *parcours suffixe*, on parcourt d'abord, de manière récursive et dans l'ordre, les sous-arbres pointés de racine $v_{0,1}, \dots, v_{0,k_0}$, puis la racine v_0 . Pour le *parcours infixe*, nous supposons disposer d'un arbre binaire. (On peut donc parler du sous-arbre de gauche et du sous-arbre de droite.) On parcourt d'abord, de manière récursive, le sous-arbre de gauche, puis la racine, et enfin le sous-arbre de droite¹⁰.

Exemple I.3.9. Considérons l'arbre binaire pointé donné à la figure I.14. Les fils d'un noeud sont ordonnés par l'ordre alphabétique de leur label. Si

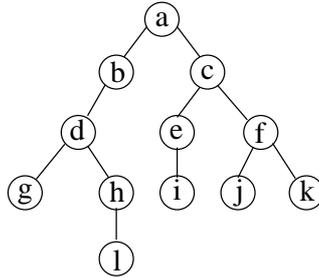


FIGURE I.14. Un arbre à parcourir.

on parcourt cet arbre de manière préfixielle, on obtient la suite :

$$a, b, d, g, h, l, c, e, i, f, j, k.$$

Pour un parcours suffixe, on a

$$g, l, h, d, b, i, e, j, k, f, c, a.$$

Enfin, pour un parcours infixe, on obtient

$$g, d, l, h, b, a, i, e, c, j, f, k.$$

On rencontre parfois des *parcours en largeur*. Dans ce cas, on parcourt les noeuds de l'arbre pointé par niveau croissant. Sur l'exemple précédent, on a simplement l'ordre a, b, c, \dots, k, l .

¹⁰Si dans un arbre binaire, un sommet n'a qu'un seul fils, on convient que le sous-arbre de droite de ce sommet est vide.

Remarque I.3.10. On peut également définir un parcours en profondeur d'un graphe quelconque. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un problème concernant spécifiquement les arbres, nous pensons qu'il s'agit du moment opportun pour le définir. Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non) que l'on peut supposer simple et connexe. Un *parcours en profondeur* de G est défini récursivement comme suit. Sélectionner un sommet v_0 . A l'étape $k \geq 1$, on choisit un voisin de v_{k-1} qui n'a pas encore été sélectionné. Si un tel voisin n'existe pas, on cherche dans l'ordre, un voisin non sélectionné de v_{k-2}, \dots, v_0 .

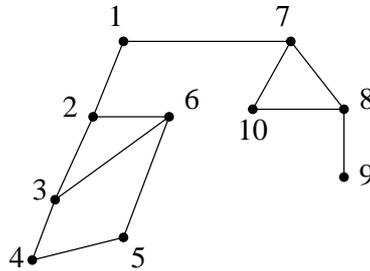


FIGURE I.15. Exemple de parcours en profondeur d'un graphe.

L'algorithme ci-dessous est un raffinement de l'algorithme I.2.2 permettant de tester la connexité.

Algorithme I.3.11. La donnée fournie à cet algorithme est un graphe non orienté $G = (V, E)$, la sortie est un arbre couvrant G s'il existe.

```

Considérer un sommet quelconque  $v_0 \in V$ 
Composante :=  $\{v_0\}$ , New :=  $\{v_0\}$ , Aretes :=  $\emptyset$ 
Tant que New  $\neq \emptyset$ 
  Voisins :=  $\emptyset$ 
  pour tout sommet  $u$  appartenant à New
    Voisins := Voisins  $\cup \nu(u)$ 
  New := Voisins  $\setminus$  Composante
  pour tout sommet  $v$  appartenant à New
    sélectionner une arête  $\{v, w\}$  telle que  $w \in$  Composante
    ajouter cette  $\{v, w\}$  à Aretes
  Composante := Composante  $\cup$  New
Si Composante  $\neq V$ 
  alors sortie : " $G$  n'est pas connexe"
  sinon sortie : (Composante, Arete) est un arbre couvrant

```

A chaque étape de cet algorithme, lorsqu'une nouvelle arête est ajoutée à l'ensemble *Aretes*, celle-ci possède une extrémité dans *New*. Cet ensemble étant constitué de sommets n'ayant pas été déjà visités, cela garantit qu'aucun cycle ne sera créé.

4. Recherche d'un chemin de coût minimum

Si $G = (V, E)$ est pondéré par une fonction de poids $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, la distance entre les sommets a et b est égale au poids minimal des chemins joignant a et b , i.e.,

$$d(a, b) = \min_{\substack{\text{chemin } (e_1, \dots, e_t) \\ \text{joignant } a \text{ et } b}} \sum_{i=1}^t p(e_i).$$

Exemple I.4.1. Le graphe de la figure I.16 représente quelques villes belges connectées par un réseau autoroutier. Le poids de chaque arête représente la distance, par autoroute, entre les deux extrémités de celle-ci. Nous avons

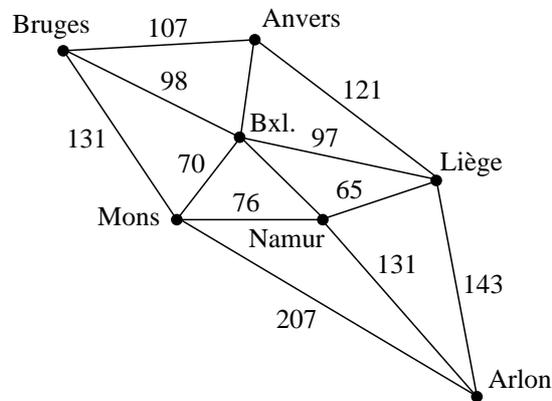


FIGURE I.16. Graphe pondéré par les distances entre villes.

choisi un graphe non orienté car les autoroutes belges vont toujours dans les deux sens.

Soit $G = (V, E)$ un digraphe pondéré par la fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Nous allons présenter l'algorithme de Dijkstra de recherche d'un plus court chemin (i.e., un chemin de poids minimal) d'un sommet u fixé à un sommet quelconque de G . Il est clair que l'on peut restreindre ce problème au cas d'un digraphe simple¹¹. Si $u \not\rightarrow v$, par convention, on posera que la "distance" de u à v est alors $+\infty$.

L'algorithme de Dijkstra s'applique également à un graphe non orienté. Il suffit de remplacer l'arête $\{u, v\}$ de poids α par deux arcs (u, v) et (v, u) ayant chacun un poids α et ainsi obtenir un digraphe (symétrique).

Remarque I.4.2. Quitte à supposer p à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on étend p de E à $V \times V$ tout entier en posant $p(x, x) = 0$, pour tout $x \in V$ et $p(x, y) = +\infty$, si $(x, y) \notin E$. C'est ce que nous supposons par la suite.

¹¹En effet, passer par une boucle de poids $\alpha > 0$ ne ferait qu'augmenter inutilement le poids de ce chemin. De même, si plusieurs arcs joignent deux sommets, il suffit de conserver l'arc de poids minimal.

Intuitivement, l'algorithme fonctionne de la manière suivante. A chaque sommet v de G , on associe une valeur $T(v)$, initialisée à $p(u, v)$ et une liste de sommets $C(v)$ censée correspondre à un chemin de u à v . Lorsque l'algorithme s'achève, $T(v)$ contient le poids minimal des chemins joignant u à v et $C(v)$ réalise un tel chemin (ou alors, $T(v) = +\infty$ si $u \not\rightarrow v$). L'idée est de construire de proche en proche un ensemble $X \subseteq V$ de manière telle qu'un chemin de poids minimal de u à $v \in X$ passe uniquement par des sommets de X . L'ensemble X est initialisé à $\{u\}$ et à chaque étape, on ajoute un sommet à l'ensemble.

Algorithme I.4.3 (Algorithme de Dijkstra). Les données sont un digraphe simple $G = (V, E)$ pondéré par une fonction $p : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (cf. remarque I.4.2) et un sommet u .

```

Pour tout sommet  $v \in V$ ,  $T(v) := p(u, v)$ ,  $C(v) := (u, v)$ 
 $X := \{u\}$ 
Tant que  $X \neq V$ , répéter
    Choisir  $v \in V \setminus X$  tel que, pour tout  $y \in V \setminus X$ ,  $T(v) \leq T(y)$ 12
     $X := X \cup \{v\}$ 
    Pour tout  $y \in V \setminus X$ 
        Si  $T(y) > T(v) + p(v, y)$ ,
            alors  $T(y) := T(v) + p(v, y)$  et  $C(y) := [C(v), y]$ 

```

Dans cet algorithme, la notation $[C(v), y]$ représente la liste $C(v)$ à laquelle on ajoute un élément y . Intuitivement, lorsqu'on ajoute un sommet v à X , on regarde s'il est avantageux pour les sommets y ne se trouvant pas dans X de passer par ce sommet v nouvellement ajouté à X . Si tel est le cas, on met à jour les informations concernant y .

Il est clair que l'algorithme de Dijkstra s'achève puisqu'à chaque étape, on considère un nouveau sommet. Il faut alors se convaincre qu'il fournit le bon résultat. Si on note X_n et $T_n(v)$ les contenus de X et $T(v)$ à la n ème étape de l'algorithme, alors pour prouver l'exactitude de celui-ci, il suffit de montrer (mais cela nécessite une bonne dose de réflexion), par récurrence sur n , que

- ▶ $\forall v \in X_n$, $T_n(v)$ est le poids minimal de *tous* les chemins joignant u à v .
- ▶ $\forall v \notin X_n$, $T_n(v)$ est le poids minimal des chemins joignant u à v qui, à l'exception de v , passent uniquement par des sommets de X_n .

5. Chemins et graphes eulériens ou hamiltoniens

Les ouvrages de théorie des graphes reprennent inlassablement l'exemple des *ponts de Königsberg*. Nous ne dérogerons pas à cette règle. Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuel Kaliningrad, ville de Russie proche de la Lituanie et de la Pologne où coule la rivière Pregel) désiraient

¹²On suppose que $r < +\infty$, si $r \in \mathbb{R}$ et que $+\infty \leq +\infty$.

se promener le dimanche en passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville. Les ponts étaient disposés comme à la figure I.17. Une modélisation du problème revient à considérer un graphe ayant comme sommets, les deux rives et les deux îles et comme arêtes, les sept ponts. Puisqu'il n'y a aucune contrainte sur le sens de parcours des ponts, nous avons choisi un multi-graphe non orienté.

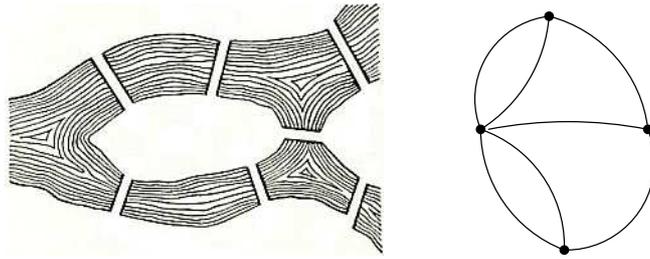


FIGURE I.17. Les sept ponts de Königsberg.

La question générale sous-jacente est donc de *déterminer pour un multi-graphe donné (éventuellement orienté) s'il existe un circuit, i.e., un chemin fermé, passant une et une seule fois par chaque arête.*

Définition I.5.1. Un chemin (resp. un circuit) d'un multi-graphe G est *eulérien* s'il passe une et une seule fois par chaque arête/arc de G . Un tel chemin (resp. circuit) peut bien évidemment passer plus d'une fois par un même sommet. Autrement dit, un chemin (resp. un circuit) eulérien est une piste (resp. une piste fermée) passant par chaque arête/arc de G . Un *multi-graphe eulérien* est un graphe qui possède un circuit eulérien.

Remarque I.5.2. Dans le problème consistant à déterminer si un graphe G possède ou non un chemin eulérien, l'existence de boucles au sein de G n'a aucune importance. En effet, soient G un graphe et G' le graphe obtenu en supprimant les boucles de G . Il est évident que G possède un chemin ou un circuit eulérien si et seulement si G' en possède un.

Considérons le cas des multi-graphes finis non orientés. On se restreint au cas d'un graphe connexe (des sommets isolés n'ont que peu d'intérêt). Il est évident que pour que G possède un circuit eulérien, i.e., pour que G soit eulérien, il est nécessaire que le degré de chaque sommet soit pair. Comme le montre le résultat suivant, cette condition est également suffisante. On peut donc constater que le fait d'être eulérien est une propriété "locale" (elle ne fait intervenir que le degré de chaque sommet pris "isolément").

Théorème I.5.3 (Euler). *Un multi-graphe fini non orienté connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien si et seulement si le degré de chaque sommet est pair.*

Démonstration. Supposons donc que chaque sommet de G est de degré pair. Débutons la construction d'une piste avec un sommet a_1 de G . A

chaque étape $i \geq 1$ de cette construction, on choisit un sommet a_{i+1} de manière telle qu'une arête $\{a_i, a_{i+1}\} \in E$ est sélectionnée parmi les $\#E - i + 1$ arêtes non déjà sélectionnées. Puisque chaque sommet est de degré pair, cette sélection est toujours possible ("lorsqu'on aboutit dans un sommet, on peut toujours en repartir"). Puisque le graphe est fini, cette procédure s'achève toujours.

On dispose alors d'une piste P joignant a_1 à un certain sommet a_ℓ . En fait, on peut supposer que cette piste est fermée, i.e., $a_\ell = a_1$. En effet, si a_ℓ diffère de a_1 , puisque le degré de chaque sommet est pair, on peut étendre la piste en ajoutant une arête $\{a_\ell, a_{\ell+1}\}$. En continuant de la sorte¹³, on épuise les sommets jusqu'à revenir en a_1 .

Si la piste fermée P est un circuit eulérien, le théorème est démontré. Sinon, puisque le graphe est connexe, il existe un sommet b de P qui est l'extrémité d'un nombre pair d'arêtes n'apparaissant pas dans P . Depuis b , il est possible de construire une piste fermée Q formée uniquement d'arêtes n'apparaissant pas dans P . (On utilise la même procédure que précédemment; il est clair que le degré de chaque sommet est encore pair.) De cette façon, nous avons étendu la piste P en une piste plus longue $P \cup Q$ (couvrant un plus grand nombre d'arêtes). On obtient alors un circuit eulérien en répétant cette étape un nombre fini de fois.

■

Corollaire I.5.4. *Le problème des sept ponts de Königsberg donné à la figure I.17 n'admet pas de solution.*

Démonstration. C'est immédiat, le graphe de la figure I.17 possède un sommet de degré 5 et 3 sommets de degré 3.

■

Corollaire I.5.5. *Un multi-graphe non orienté connexe possède un chemin eulérien joignant deux sommets a et b si et seulement si a et b sont les deux seuls sommets de degré impair.*

Démonstration. Pour se ramener au théorème précédent, il suffit de considérer le graphe G auquel on ajoute une arête supplémentaire joignant les sommets a et b .

■

Le cas des multi-graphes orientés se traite de manière analogue. Les preuves sont laissées à titre d'exercices.

¹³Procédons par l'absurde et imaginons un instant ne jamais revenir en a_1 . A chaque sélection d'une nouvelle arête depuis a_ℓ , le sommet atteint diffère donc de a_1 et une des arêtes restantes est consommée. Ainsi, le nombre d'arêtes disponibles décroît strictement. Pourtant, chaque sommet étant de degré pair, on peut continuer de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste, dans le pire cas, qu'une seule arête disponible, celle retournant à a_1 .

Théorème I.5.6. *Un multi-graphe fini orienté simplement connexe $G = (V, E)$ possède un circuit eulérien si et seulement si le demi-degré entrant de chaque sommet est égal à son demi-degré sortant.*

Corollaire I.5.7. *Un multi-graphe fini orienté connexe $G = (V, E)$ possède un chemin eulérien si et seulement si il existe deux sommets v_0 et v_1 tel que*

- ▶ pour tout $v \in V \setminus \{v_0, v_1\}$, $d^-(v) = d^+(v)$,
- ▶ $d^+(v_0) = d^-(v_0) + 1$,
- ▶ $d^-(v_1) = d^+(v_1) + 1$.

On peut aussi s'intéresser à la question posée initialement par Sir W. R. Hamilton qui concerne cette fois l'existence d'un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet¹⁴ de G . Il est frappant de constater qu'il n'existe, à ce jour, pas de méthode efficace permettant de répondre à cette question. Un chemin (resp. circuit) passant une et une seule fois par chaque sommet de G sera qualifié d'*hamiltonien*. Un graphe *hamiltonien* est un graphe possédant un circuit hamiltonien¹⁵.

Exemple I.5.8. On considère un dodécaèdre régulier (polyèdre régulier possédant 12 faces pentagonales et 20 sommets). Le graphe associé, ou squelette, est représenté à la figure I.18. La question originale posée par Hamilton était de déterminer un circuit passant une et une seule fois par chaque arête de ce graphe.

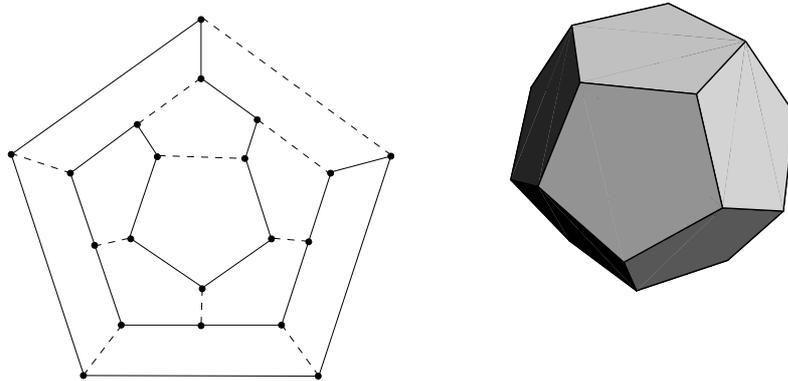


FIGURE I.18. Squelette d'un dodécaèdre et circuit hamiltonien.

¹⁴Dans sa version initiale (1859), Hamilton avait choisi un dodécaèdre dont chaque sommet représentait une ville importante: Bruxelles, Canton, Delhi,...

¹⁵Nous poserons qu'un graphe restreint à une unique arête $\{a, b\}$ (resp. restreint à un unique sommet) est hamiltonien. En effet, on peut considérer le circuit $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ passant par les sommets a, b puis a . Par contre, il est facile de voir qu'un arbre contenant 3 sommets au moins n'est jamais hamiltonien.

Exemple I.5.9. Sur un échiquier, le cavalier se déplace de deux cases dans une direction (horizontale ou verticale) puis d'une case dans une direction orthogonale. Est-il possible qu'un cavalier passe par toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois par la même case et revenir à son point de départ? Il s'agit encore de la recherche d'un circuit hamiltonien. On peut considérer un graphe dont les sommets représentent les cases de l'échiquier et une arête joint deux sommets si et seulement si un cavalier peut passer de l'une des cases correspondantes à la suivante en un mouvement. (Ainsi, le degré de chaque sommet varie entre 2 et 8). On peut répondre affirmativement à cette question comme le prouve la figure I.19.

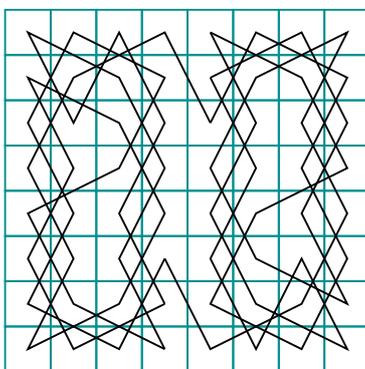


FIGURE I.19. Déplacement d'un cavalier.

Le résultat suivant (sa contraposée) peut être utilisé pour vérifier que certains graphes ne sont pas hamiltoniens.

Proposition I.5.10. *Si $G = (V, E)$ est un graphe (simple et non orienté) hamiltonien, alors pour tout ensemble non vide $S \subseteq V$, le nombre de composantes connexes de $G - S$, le graphe obtenu en supprimant les sommets de S , est inférieur ou égal à $\#S$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\#S$, le nombre de sommets à supprimer. Par hypothèse, on dispose d'un circuit hamiltonien \mathcal{C} . Ce circuit passant par tous les sommets, le graphe est connexe. Si $\#S = 1$, lorsqu'on supprime un sommet, le circuit \mathcal{C} devient un chemin simple passant par chacun des sommets restants, le graphe reste connexe : $G - S$ a une seule composante connexe.

Supposons le résultat vérifié lorsque l'on retire n sommets. Vérifions-le lorsque l'on retire $n + 1$ sommets. Par hypothèse de récurrence, si on retire n sommets, le graphe obtenu a au plus n composantes connexes. Le circuit \mathcal{C} privé de ces n points est dès lors "découpé" en au plus n chemins simples (on regarde la trace de \mathcal{C} dans les différentes composantes connexes). Il reste à supprimer un $(n + 1)$ ième sommet. Ce sommet appartient à l'un des n chemins simples. En supprimant ce sommet, seul un des chemins

pourra donner deux chemins simples. Le nombre de composantes connexes n'augmente que d'au plus une unité.

■

Par contre, cette condition n'est pas suffisante. En effet, le *graphe de Petersen* (figure I.20) la vérifie et pourtant, ce dernier n'est pas hamiltonien (cela sera vérifié aux séances de répétition).

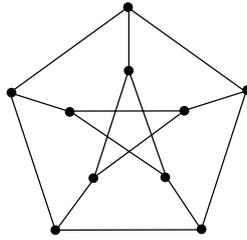


FIGURE I.20. Le graphe de Petersen.

On dispose de plusieurs conditions suffisantes (théorèmes de Dirac, de Bondy–Chvátal, ou encore de Chvátal–Erdős, ...) pour assurer qu'un graphe est hamiltonien. On supposera toujours le graphe simple et non orienté. La première de ces conditions est une condition *locale*, elle exprime que si chaque sommet a “suffisamment” de voisins, alors le graphe est hamiltonien. Pour rappel, la partie entière *par excès* (resp. *par défaut*) d'un réel x est $\lceil x \rceil = \inf\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq x\}$ (resp. $\lfloor x \rfloor = \sup\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$).

Théorème I.5.11 (Dirac). *Tout graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets et tel que le degré de chaque sommet est au moins égal à $n/2$, possède un circuit hamiltonien.*

Dans ce cours introductif, nous ne donnerons que la preuve du théorème de Dirac. Les autres preuves reposent sur des arguments similaires. Le lecteur intéressé peut consulter [6].

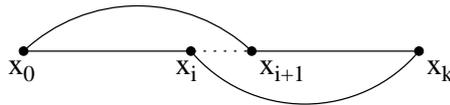
Démonstration. Notons $\delta = \inf_{v \in V} \deg(v)$. Puisque $\delta \geq \lceil n/2 \rceil$, on en conclut que G est connexe. En effet, si ce n'était pas le cas, G posséderait au moins deux composantes connexes distinctes dont une contient $\leq \lfloor n/2 \rfloor$ sommets¹⁶. Or si $\delta \geq \lceil n/2 \rceil$, alors un des sommets de cette composante doit être voisin d'un sommet d'une autre composante, ce qui n'est pas possible (vu la maximalité des composantes connexes).

Soit C un chemin de longueur maximale passant par des sommets tous distincts (i.e., un chemin simple). Puisque G est simple, C est entièrement défini par une suite de sommets x_0, \dots, x_k . Par maximalité, tous les voisins de x_0 et de x_k appartiennent à C (en effet, sinon, on pourrait étendre C en un chemin plus long).

¹⁶Il n'est pas possible que chaque composante ait plus de $\lceil n/2 \rceil$ éléments. Sinon le nombre total de sommets dépasserait n .

Par conséquent, au moins $\lceil n/2 \rceil$ sommets parmi x_0, \dots, x_{k-1} sont voisins de x_k et au moins $\lceil n/2 \rceil$ sommets parmi x_1, \dots, x_k sont voisins de x_0 . De plus, $k + 1 \leq n$ (ou encore $k < n$). Par conséquent, il existe un indice $i < k$ tel que

$$\{x_0, x_{i+1}\} \in E \quad \text{et} \quad \{x_i, x_k\} \in E.$$



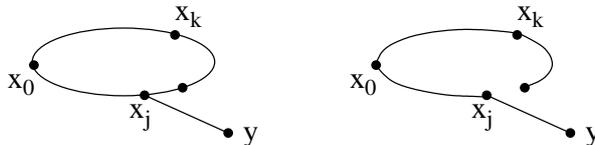
Prouvons-le par l'absurde. Supposons que cela ne soit pas le cas.

- ▶ Pour tout $0 \leq i < k$ tel que $\{x_0, x_{i+1}\} \in E$, on a $\{x_i, x_k\} \notin E$. Soit I l'ensemble de ces indices. Il y a au moins $\lceil n/2 \rceil$ indices distincts $i \in I \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ tels que $\{x_0, x_{i+1}\} \in E$.
- ▶ De la même manière, pour tout $0 \leq j < k$ tel que $\{x_j, x_k\} \in E$, on a $\{x_0, x_{j+1}\} \notin E$. Soit J l'ensemble de ces indices. Il y a au moins $\lceil n/2 \rceil$ indices distincts $j \in J \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ tels que $\{x_j, x_k\} \in E$.
- ▶ Remarquons que $I \cap J = \emptyset$. Ceci conduit à une absurdité car $I \cup J \subset \{0, \dots, k-1\}$ mais $\#(I \cup J) = \#I + \#J \geq n > k$.

Ainsi,

$$x_0, x_1, \dots, x_i, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{i+2}, x_{i+1}, x_0$$

est un circuit passant une seule fois par chacun des sommets x_0, \dots, x_k . Ce circuit est hamiltonien. En effet, supposons qu'il existe un sommet y n'appartenant pas à ce circuit. Puisque G est connexe, il existe $j \in \{0, \dots, k\}$ tel que $\{x_j, y\} \in E$. De là, on peut construire un chemin passant par $k + 2$ sommets distincts. C'est impossible vu le choix de C (de longueur maximale).



■

On peut prouver le théorème suivant en adaptant quelque peu les raisonnements effectués dans la preuve précédente.

Théorème I.5.12 (“premier” Théorème d’Ore). *Soient $G = (V, E)$ un graphe (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets et x et y deux sommets tels que $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Le graphe G est hamiltonien si et seulement si le graphe $G + \{x, y\}$ l’est.*

Corollaire I.5.13 (“deuxième” Théorème d’Ore). *Soit $G = (V, E)$ un graphe (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets. Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y) , on a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$, alors G*

est hamiltonien. En particulier, si $\min_{v \in V} \deg(v) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

On peut observer que le théorème de Dirac est un corollaire immédiat du deuxième théorème d'Ore. En effet, si pour chaque sommet $\deg(v) \geq n/2$, alors pour toute paire de sommets x et y , on a trivialement $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Il est à noter que chronologiquement, c'est d'abord le théorème de Dirac qui fut obtenu (1952), puis celui d'Ore (1960) et enfin celui de Bondy–Chvátal (1971).

Introduisons à présent la *fermeture* d'un graphe simple et non orienté.

Définition I.5.14. Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ un graphe simple et non orienté. On définit une suite finie

$$G_0, G_1, \dots, G_i = (V_i, E_i), \dots, G_k$$

de graphes (simples) de la manière suivante. Pour tout i , on ajoute à G_i une arête comme suit :

$$G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$$

où u et v sont des sommets de G_i qui sont tels que $\{u, v\} \notin E_i$ et

$$\deg_{G_i}(u) + \deg_{G_i}(v) \geq \#V$$

où \deg_{G_i} désigne bien sûr le degré d'un sommet dans le graphe G_i . La procédure s'arrête lorsqu'il n'y a plus moyen d'ajouter de nouvelles arêtes à G_k . Ainsi, pour tous sommets u, v , soit $\{u, v\}$ appartient à E_k , soit $\deg_{G_k}(u) + \deg_{G_k}(v) < \#V$. Le graphe obtenu à la dernière étape s'appelle la *fermeture* de G_0 et est noté $\mathcal{F}(G_0)$

Quels que soient les choix d'arêtes réalisés dans les étapes intermédiaires, on aboutit toujours au même graphe. Ainsi la définition ci-dessus est bien licite. En admettant le premier théorème d'Ore, le résultat suivant est immédiat.

Théorème I.5.15. Soit G un graphe (simple et non orienté) ayant au moins trois sommets.

- ▶ Le graphe G est hamiltonien si et seulement si $\mathcal{F}(G)$ l'est.
- ▶ Si $\mathcal{F}(G)$ est un graphe complet, alors G est hamiltonien.

Remarque I.5.16. La condition suffisante donnée dans le théorème précédent n'est pas nécessaire. En effet, considérons un graphe constitué de $n > 4$ sommets et de n arêtes et formant un unique circuit hamiltonien. Chaque sommet étant de degré 2, le graphe est égal à sa fermeture et bien que le graphe soit hamiltonien, la fermeture n'est pas le graphe complet K_n .

Théorème I.5.17 (Bondy–Chvátal). Soit G un graphe (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets ordonnés par degré croissant, i.e.,

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n).$$

Si, pour tout $k < n/2$, le graphe satisfait

$$(1) \quad \deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k,$$

alors G possède un circuit hamiltonien.

La preuve de ce résultat n'est pas difficile mais sort du cadre de ce cours introductif. On peut montrer que ces hypothèses impliquent que la fermeture du graphe est un graphe complet K_n .

Remarque I.5.18. La condition du théorème de Bondy–Chvátal peut facilement être testée pour un graphe donné. Il suffit d'ordonner la suite des degrés et de vérifier une condition combinatoire élémentaire. Rappelons que d'un point de vue strictement logique, si pour $k < n/2$, on a $\deg(v_k) > k$, alors l'implication $\deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k$ est toujours vraie.

5.1. Quelques mots sur la complexité. Il ne sera pas question d'introduire le formalisme des machines de Turing, des problèmes de décision et les classes de complexité P ou NP. Par complexité, on entend les ressources spatiale et temporelle (espace mémoire ou nombre d'opérations élémentaires) à consommer pour résoudre un problème de nature algorithmique. Pour un algorithme donné, sa complexité temporelle *dans le pire cas* fournit (ou estime) le nombre d'opérations à réaliser par l'algorithme pour des entrées valides de taille n (pensez par exemple à un algorithme de tri auquel on fournit une liste de n entiers à classer). Ce nombre d'opérations peut varier d'une entrée à l'autre, on s'intéresse alors le plus souvent à la situation la moins favorable (worst case analysis) : l'entrée de taille n pour laquelle le plus grand nombre d'opérations est requis — on pourrait (mais c'est plus difficile) analyser son comportement en moyenne. Puisque la complexité est une fonction de la taille n des entrées, si cette fonction est bornée par un polynôme en n , on admet généralement que le problème peut être traité efficacement (ceci donne la classe de complexité P). On remarquera toutefois que, pour de grands graphes, un algorithme quadratique est déjà peu exploitable. Il existe des problèmes pour lesquels aucun algorithme polynomial n'est connu (sans pour autant savoir avec certitude qu'il n'en existe pas). De nombreux problèmes de la théorie des graphes sont de ce type, on dit qu'ils sont NP-complets. De façon rapide et non rigoureuse, on peut dire qu'ils s'agit de problèmes difficiles pour lesquels (sauf si on pouvait montrer l'égalité¹⁷ des classes de complexité $P = NP$) il est inutile de chercher un algorithme de complexité polynomiale. Remarquons cependant que même si un algorithme possède un mauvais comportement dans le pire cas, il se peut qu'on obtienne la solution en un temps raisonnable pour les cas qui se présentent en pratique. On dispose aussi parfois de solutions approchées (heuristiques) suffisantes.

¹⁷Il s'agit d'un des sept problèmes du millénaire.

- ▶ Déterminer si un graphe est connexe est un problème *polynomial* (par rapport à la taille du graphe donnée par $\#V$ et $\#E$) : le nombre d'opérations à réaliser est proportionnel au nombre de sommets du graphe, cf. algorithme I.2.2.
- ▶ Idem pour tester la forte connexité d'un graphe orienté.
- ▶ Déterminer si un graphe possède un sous-graphe couvrant (et le fournir le cas échéant) est aussi polynomial, cf. algorithme I.3.11.
- ▶ On peut montrer que l'algorithme de Dijkstra, s'il est implémenté efficacement, a une complexité temporelle en

$$\mathcal{O}(\#E + \#V \cdot \log(\#V)).$$

- ▶ Déterminer si un graphe est eulérien est aussi polynomial puisqu'il suffit de connaître la parité du degré de chaque sommet. On passe donc en revue les sommets et les arêtes.
- ▶ Déterminer si un graphe est hamiltonien est par contre un problème NP-complet. On ne connaît aucune procédure générique efficace (sous-entendu, de complexité polynomiale). Naïvement, il est nécessaire de passer en revue les $n!$ permutations des n sommets du graphe pour rechercher un éventuel circuit hamiltonien. Par contre, et c'est une caractéristique des problèmes NP-complets, vérifier pour un graphe et un circuit donnés que ce dernier est effectivement hamiltonien se fait de manière efficace. Ainsi, la vérification est aisée lorsqu'on fournit par avance un candidat mais, l'obtention d'un candidat est délicate !
- ▶ Soit p un entier. Déterminer si un graphe contient une *clique* de taille p , i.e., une copie de K_p comme sous-graphe, est NP-complet.
- ▶ Soit p un entier. Déterminer si un graphe contient p sommets indépendants est NP-complet (il s'agit du complément du problème précédent).
- ▶ Déterminer le nombre chromatique d'un graphe (qui sera défini dans les prochaines sections) est aussi NP-complet.

6. Planarité et formule d'Euler

Définition I.6.1. Un multi-graphe G est *planaire* (ou *planaire topologique*) s'il est possible de le représenter dans le plan affiné euclidien de manière telle que les sommets distincts de G soient des points distincts du plan et les arêtes soient des courbes simples¹⁸. On impose en plus que deux arêtes distinctes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. On parlera alors de *représentation planaire* de G .

Le théorème de Jordan stipule que pour toute courbe simple fermée Γ , $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes (au sens de la topologie). Cela permettrait de définir la notion de face de manière rigoureuse.

¹⁸Aucun point multiple.

Soit G un multi-graphe planaire. Une *face* de G est une région du plan délimitée par des arêtes formant un circuit simple. Par conséquent, deux points arbitraires de cette région peuvent être joints par un trait continu ne rencontrant aucun sommet ni arête de G . La *frontière* ∂F d'une face F est l'ensemble des arêtes qui "touchent"¹⁹ la face (on omet donc les sommets). Par extension et pour simplifier notre exposé, on s'autorisera à parler des sommets et des arêtes appartenant à une face (si les arêtes appartiennent à la frontière de la face considérée ou si un sommet est une extrémité d'une telle arête). Deux faces F et F' sont *adjacentes* si leur frontière ont au moins une arête commune, i.e., $\partial F \cap \partial F' \neq \emptyset$. En particulier, deux faces ne se touchant que par un sommet ne sont pas considérées comme adjacentes. Un multi-graphe planaire (fini) contient toujours une et une seule *face infinie*, i.e., non bornée. On peut néanmoins toujours parler de la frontière de la face infinie.

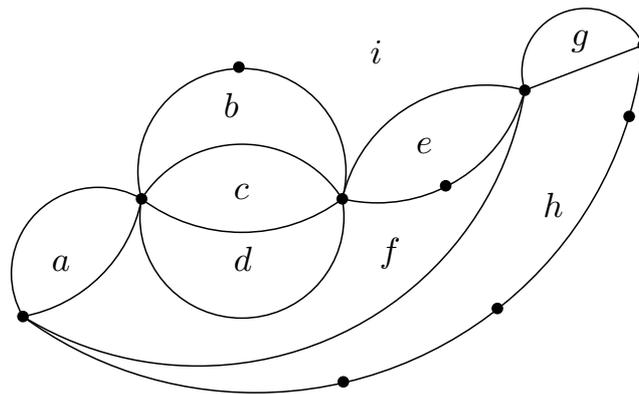


FIGURE I.21. Un graphe planaire et ses faces (i est la face infinie).

Remarque I.6.2. A titre indicatif, citons le théorème de Steinitz (1922). Rappelons que le *squelette* d'un polyèdre P est le graphe dont les sommets sont les sommets de P et dont les arêtes sont aussi celles de P . Le résultat s'énonce comme suit. *Un graphe est le squelette d'un polyèdre convexe (borné) de \mathbb{R}^3 si et seulement si c'est un graphe planaire au moins 3-connexe (i.e., ne pouvant pas être disconnecté en retirant moins de trois sommets).*

Proposition I.6.3. *Si G est un multi-graphe planaire et Δ une face de G . Il est possible d'obtenir une représentation planaire du graphe G dans le plan affiné euclidien de manière telle que Δ soit la face infinie. En particulier, pour tout sommet x de G , on peut obtenir une représentation planaire du graphe G telle que x appartienne à la frontière de la face infinie.*

¹⁹Nous nous autorisons une définition naïve pour ne pas compliquer inutilement l'exposé. Il suffit de parler de la frontière au sens topologique du terme.

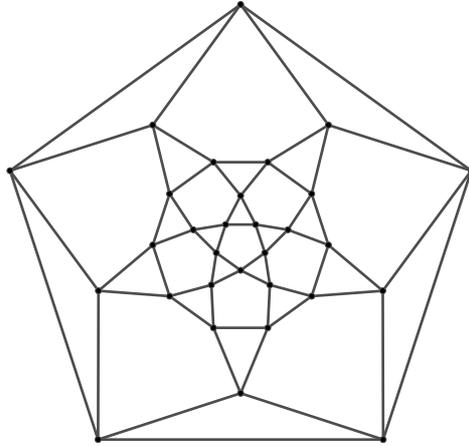


FIGURE I.22. Le squelette d'un icosidodécaèdre

Démonstration. Par projection stéréographique, on se ramène à une représentation du graphe sur la sphère et inversement. Par rotation (cf. figure I.23), on peut toujours amener la face Δ à contenir le pôle de la projection. Il s'agit d'un argument purement géométrique.

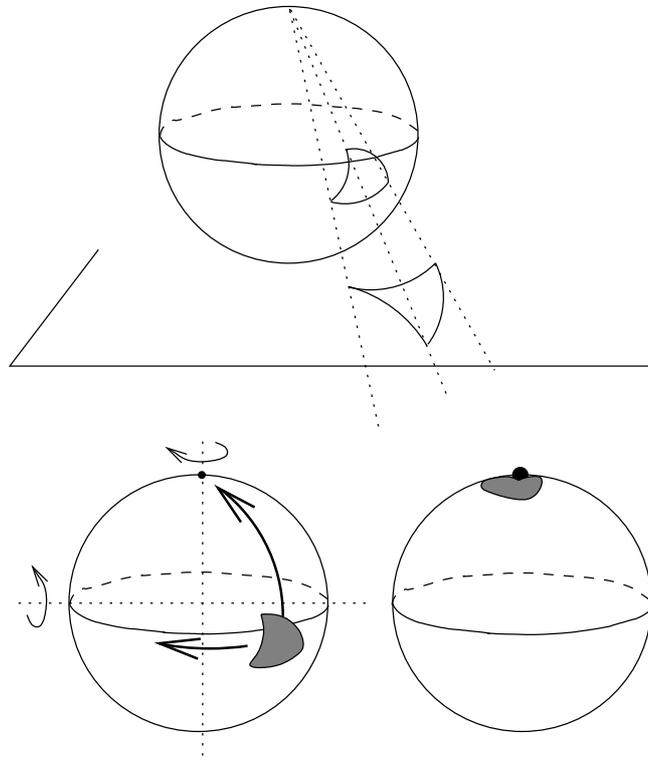


FIGURE I.23. Projection stéréographique et rotation sur la sphère

■

Le théorème suivant nous permettra de montrer que ni K_5 ni $K_{3,3}$ ne sont planaires.

Théorème I.6.4 (Formule d'Euler²⁰). *Dans un multi-graphe planaire connexe (fini) possédant s sommets, a arêtes et f faces, on a*

$$s - a + f = 2.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre f de faces. Si $f = 1$, le graphe possède uniquement une face infinie. Par conséquent, le graphe connexe ne possède aucun cycle, il s'agit d'un arbre. Ainsi, $s = a + 1$ et la formule est vérifiée.

Supposons à présent la formule d'Euler satisfaite pour les valeurs $< f$ et démontrons-la pour $f \geq 2$. Soit e une arête d'un cycle du graphe. Cette arête appartient à la frontière de deux faces A et B . Si on supprime l'arête e , on obtient un nouveau graphe ayant $a - 1$ arêtes, le même nombre s de sommets et $f - 1$ faces (en effet, A et B forment une face de ce nouveau graphe). Par hypothèse de récurrence, on a $s - (a - 1) + f - 1 = 2$ ce qui suffit.

■

Définition I.6.5. La *subdivision* d'une arête $e = \{a, b\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à remplacer cette arête par deux nouvelles arêtes $e_1 = \{a, u\}$ et $e_2 = \{u, b\}$ où u est un nouveau sommet n'appartenant pas à V . Le



FIGURE I.24. Subdivision d'une arête.

graphe obtenu est alors $G' = (V \cup \{u\}, (E \cup \{e_1, e_2\}) \setminus \{e\})$.

Définition I.6.6. Deux graphes sont *homéomorphes* s'ils peuvent tous deux être obtenus par une suite finie (voir vide) de subdivisions à partir d'un même graphe. En particulier, si un graphe G' résulte de subdivisions d'arêtes de G , alors G et G' sont homéomorphes.

Exemple I.6.7. La figure I.25 reprend deux graphes homéomorphes construits à partir d'un même graphe.

Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont l'archétype même des graphes non planaires. Cette phrase prendra vite tout son sens, à la lecture du théorème de Kuratowski caractérisant les graphes (non) planaires.

Lemme I.6.8. *Le graphe K_5 n'est pas planaire.*

²⁰Formule bien connue en géométrie pour les polyèdres convexes (considérés comme enveloppes convexes d'un nombre fini de points). D'où le lien avec le théorème de Steinitz.

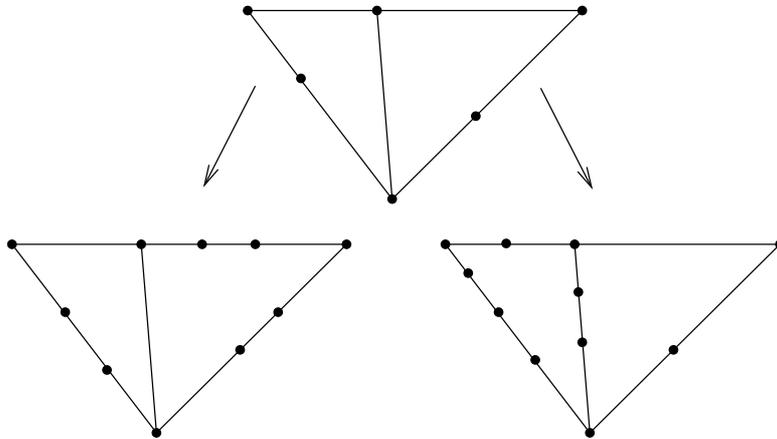


FIGURE I.25. Graphes homéomorphes.

Démonstration. On utilise les notations de la formule d'Euler. D'une manière générale, dans un graphe simple et planaire, on a $3f \leq 2a$ et de la formule d'Euler ($3a - 3f = 3s - 6$), on tire que

$$a \leq 3s - 6.$$

Or, K_5 est un graphe simple qui possède 5 sommets et 10 arêtes et $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. On en conclut que K_5 ne peut être planaire. ■

Lemme I.6.9. *Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.*

Démonstration. On utilise une fois encore le même raisonnement mais, dans un graphe simple, planaire et biparti, chaque face a une frontière déterminée par au moins 4 arêtes et on en tire que $4f \leq 2a$, i.e., $2f \leq a$. De la formule d'Euler, $2a - 2f = 2s - 4$, on en tire que

$$a \leq 2s - 4.$$

Or, $K_{3,3}$ est un graphe biparti simple qui possède 6 sommets et 9 arêtes. Il ne peut donc pas être planaire car $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$. ■

On admettra le théorème suivant caractérisant les graphes planaires. Ce résultat est remarquable car il n'y a *in fine* que deux "types" de graphes qui font obstruction à la planarité. Pour une preuve, cf. par exemple [1].

Théorème I.6.10 (Kuratowski). *Un multi-graphe (non orienté) est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou à $K_{3,3}$.*

7. Problèmes de coloriage

Cette section ne sera abordée qu'en fin de cours — si l'on dispose d'un temps imparti suffisant. Elle permet de revenir sur des problèmes de comptage de nature plus combinatoire. On notera tout de même que la notion de coloriage a des applications pratiques évidentes (planification de tâches, problèmes d'ordonnancement, etc.).

Définition I.7.1. Soit $c : V \rightarrow \Sigma$ un étiquetage des sommets du graphe où l'on suppose que Σ est fini. Dans le contexte qui nous intéresse, on parlera plutôt de *coloriage* et pour tout sommet u , on dira que $c(u)$ est la couleur de u . Un coloriage c des sommets d'un graphe est dit *propre* si des sommets voisins ont des couleurs distinctes pour c .

S'il existe un coloriage propre $c : V \rightarrow \Sigma$ de G tel que $\#\Sigma = k$, on dira que G est *k-colorable*. La valeur minimum de k pour laquelle G est *k-colorable* est appelée le *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$.

Remarque I.7.2. Pour obtenir un coloriage propre, on peut attribuer à des sommets indépendants (définition I.3.1) une même couleur. Ainsi, le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$ est le nombre minimum de sous-ensembles de sommets indépendants nécessaires pour partitionner V .

Proposition I.7.3. *Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si et seulement si il est 2-colorable.*

Démonstration. C'est immédiat. ■

Remarque I.7.4. Un graphe $G = (V, E)$ est 1-colorable si et seulement si $E = \emptyset$.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la possibilité de colorier ou non un graphe donné à l'aide de k couleurs. La question suivante serait de déterminer le nombre de façons distinctes de réaliser un tel coloriage.

Définition I.7.5. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté ayant n sommets. On dénote par $m_{k,G}$, le nombre de coloriages propres distincts²¹ de G utilisant **exactement** k couleurs et par $z^{\underline{k}}$, le polynôme²² en $z \in \mathbb{C}$ de degré k

$$z^{\underline{k}} = z(z-1)\cdots(z-k+1).$$

²¹On suppose que les sommets de G sont énumérés une fois pour toutes : $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et que les k couleurs sont données par $\{1, \dots, k\}$. On énumère donc les fonctions de coloriage $c : V \rightarrow \Sigma$ qui sont propres.

²²Il s'agit d'une notation classique "falling power" que l'on retrouve chez Graham, Knuth et Patashnik. Remarquez que $1, z, \dots, z^{\underline{k}}$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus k .

Avec ces notations, le *polynôme chromatique* de G est donné par

$$\begin{aligned}\pi_G(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,G}}{i!} z^i \\ &= \frac{m_{1,G}}{1!} z + \frac{m_{2,G}}{2!} z(z-1) + \frac{m_{3,G}}{3!} z(z-1)(z-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{m_{n,G}}{n!} z(z-1) \cdots (z-n+1).\end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n en la variable z .

Remarque I.7.6. La quantité

$$\frac{m_{k,G}}{k!}$$

est le nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriage propres possibles de G utilisant exactement k couleurs. En fait, cette quantité équivaut au *nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) de sommets indépendants*.

Exemple I.7.7. Soit le graphe de la figure I.26. Considérons les partitions

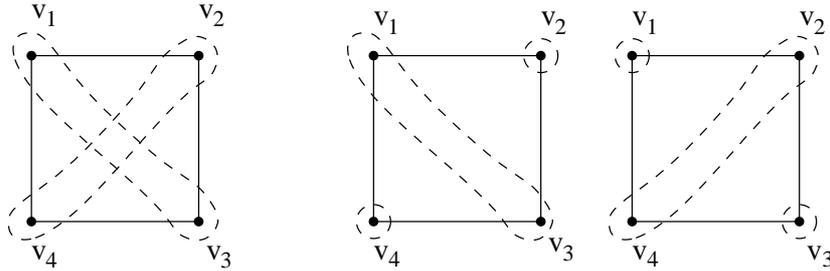


FIGURE I.26. Illustration de $m_{k,G}$.

de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides) donnant lieu à tous les coloriage propres possibles de G utilisant exactement k couleurs, $k = 2, 3$. Pour $k = 2$, on a la partition $V = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\}$ et les coloriage $c_1 : v_1, v_3 \mapsto 1, v_2, v_4 \mapsto 2$ et $c_2 : v_1, v_3 \mapsto 2, v_2, v_4 \mapsto 1$. Ainsi, $m_{2,G} = 2$ et $m_{2,G}/2! = 1$ correspond bien à la seule partition convenable de V . Pour $k = 3$, on a deux partitions possibles de V en $\{v_1, v_3\} \cup \{v_2\} \cup \{v_4\}$ ou bien $\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_2, v_4\}$. Chaque partition donne lieu à $3!$ coloriage propres distincts de G . Ainsi, $m_{3,G} = 12$ et $m_{3,G}/3! = 2$. Pour $k = 4$, il y a une seule partition de V en quatre singletons donc $m_{4,G}/4! = 1$. Par conséquent, le polynôme chromatique du graphe est donné par

$$\underbrace{m_{1,G}}_{=0} z + \underbrace{\frac{m_{2,G}}{2!}}_{=1} z(z-1) + \underbrace{\frac{m_{3,G}}{3!}}_{=2} z(z-1)(z-2) + \underbrace{\frac{m_{4,G}}{4!}}_{=1} z(z-1)(z-2)(z-3)$$

ou encore

$$\pi_G(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 3z.$$

Exemple I.7.8. Pour le graphe complet K_n , les seuls ensembles de sommets indépendants sont les singletons. Ainsi, pour tout $k < n$,

$$\frac{m_{k,K_n}}{k!} = 0 \quad \text{et} \quad \pi_{K_n}(z) = z^n.$$

Remarque I.7.9. Quelques remarques immédiates.

- ▶ Si G possède n sommets, alors $m_{n,G} = n!$ car on assigne une couleur par sommet. On en déduit que le polynôme chromatique a 1 comme coefficient principal.
- ▶ Si G n'est pas connexe mais possède 2 composantes G_1 et G_2 , alors

$$\pi_G(z) = \pi_{G_1}(z) \cdot \pi_{G_2}(z).$$

Cela résulte du fait que les sommets de G_1 peuvent être colorés indépendamment de ceux de G_2 .

- ▶ Il est clair que $\pi_G(0) = 0$ pour tout graphe G .

Exemple I.7.10. A titre indicatif, le polynôme chromatique du graphe de Petersen (figure I.20) est donné par

$$z^{10} - 15z^9 + 105z^8 - 455z^7 + 1353z^6 - 2861z^5 + 4275z^4 - 4305z^3 + 2606z^2 - 704z.$$

Proposition I.7.11. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le nombre $\pi_G(k)$ est le nombre de coloriage propre de G utilisant au plus k couleurs.

Exemple I.7.12. Avec le graphe de la figure I.26, si on calcule $\pi_G(4)$, on trouve $\pi_G(4) = 84$ et donc, il y est possible de colorier proprement G avec au plus 4 couleurs de 84 façons distinctes.

Démonstration. Tout d'abord, il est inutile de considérer dans l'expression de $\pi_G(k)$, les termes d'exposant $> k$. En effet, si $i > k$, alors z^i évalué en k est nul. Ainsi, on a

$$\pi_G(k) = \sum_{i=1}^k \frac{m_{i,G}}{i!} k^i.$$

Ensuite, pour tout $i \leq k$, on dispose de $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles de sommets indépendants. Considérons ces partitions et autorisons-nous cette fois à choisir i couleurs parmi k , pour chaque partition $C_1 \cup \dots \cup C_i$ de V , à C_1 , on peut assigner k couleurs, pour C_2 , on a $k-1$ choix possibles, ... et pour C_i , on a $k-i+1$ choix possibles. Ainsi, chacune des $\frac{m_{i,G}}{i!}$ partitions de V en i sous-ensembles donnent lieu à k^i coloriage utilisant exactement i des k couleurs disponibles. La conclusion en découle. ■

Exemple I.7.13. En continuant l'exemple précédent, le nombre de coloriage du graphe repris à la figure I.26 utilisant au plus 3 couleurs vaut

$$\pi_G(3) = \underbrace{m_{1,G}}_{=0} 3 + \frac{m_{2,G}}{2!} 3 \cdot 2 + \frac{m_{3,G}}{3!} 3 \cdot 2 \cdot 1 = 0 + 6 + 2 \cdot 6 = 18.$$

Ces coloriage sont donnés par

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	2
2	1	2	1
1	3	1	3
3	1	3	1
2	3	2	3
3	2	3	2

v_1	v_2	v_3	v_4
1	2	1	3
1	3	1	2
2	1	2	3
2	3	2	1
3	1	3	2
3	2	3	1

v_1	v_2	v_3	v_4
2	1	3	1
3	1	2	1
1	2	3	2
3	2	1	2
1	3	2	3
2	3	1	3

Corollaire I.7.14. *Le nombre chromatique de G est le plus petit entier k tel que $\pi_G(k) \neq 0$.*

Ainsi, la détermination du nombre chromatique d'un graphe à n sommets peut se ramener à l'estimation des zéros d'un polynôme de degré n . Par exemple, avec le graphe repris à la figure I.26, on a $\pi_G(1) = 0$ et $\pi_G(2) \neq 0$.

Remarque I.7.15. Déterminer le nombre chromatique d'un graphe est un problème difficile d'un point de vue combinatoire. Il s'agit une fois encore d'un problème NP-complet. Par conséquent, fournir les coefficients du polynôme chromatique est tout aussi ardu.

CHAPITRE II

Rudiments de théorie algébrique des graphes

Le but de ce chapitre est d'employer le calcul matriciel et l'algèbre linéaire pour obtenir des informations importantes sur les graphes considérés. Ainsi, on peut associer à un graphe donné plusieurs matrices, l'une d'elles étant la matrice d'adjacence encodant les arcs entre les sommets.

1. Matrice d'adjacence

Rappelons que le cas non orienté n'est qu'un cas particulier (symétrique) du cas orienté.

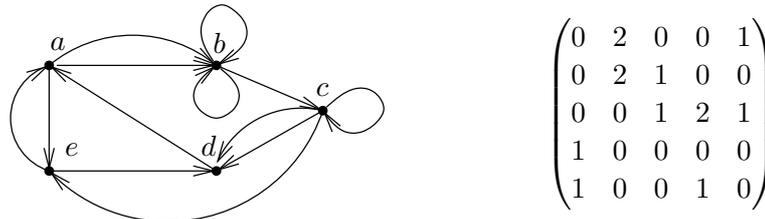
Définition II.1.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté dont les sommets sont ordonnés par $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $A(G)$ dont l'élément

$$[A(G)]_{i,j} = \#(\omega^+(v_i) \cap \omega^-(v_j))$$

est égal au nombre d'arcs (v_i, v_j) présents dans E , $1 \leq i, j \leq n$. La définition s'adapte au cas particulier des graphes non orientés. Dans ce cas, $A(G)$ est une matrice symétrique.

On pourra dès lors parler du polynôme caractéristique, des valeurs propres du graphe, de son spectre (ensemble des valeurs propres), etc.

Exemple II.1.2. Voici un multi-graphe et sa matrice d'adjacence.



On dira que ce graphe possède

$$-x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x + 4$$

comme polynôme caractéristique (simple vérification).

Définition II.1.3. Deux multi-graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre les sommets de G_1 et de G_2 telle que (x, y) est un arc de multiplicité k de G_1 si et seulement si $(f(x), f(y))$ est un arc de multiplicité k de G_2 . Autrement dit, quitte à renommer les sommets, G_1 et G_2 sont deux copies d'un même graphe.

Proposition II.1.4. *Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence. Autrement dit, il existe une matrice de permutation¹ P telle que*

$$A(G_1) = P^{-1}A(G_2)P.$$

Voici un premier résultat permettant de dénombrer les chemins d'une longueur donnée dans un multi-graphe.

Théorème II.1.5. *Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté tel que $V = \{v_1, \dots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout $n > 0$,*

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

est exactement le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j .

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Le cas de base $n = 1$ découle de la définition même de la matrice d'adjacence. Supposons le résultat vérifié pour $n > 0$ et vérifions-le pour $n + 1$. On a bien sûr

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}.$$

Par hypothèse de récurrence, $[A(G)^n]_{i,s}$ compte le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_s . De plus, $[A(G)]_{s,j}$ compte le nombre d'arcs joignant v_s à v_j . Par conséquent, $[A(G)^n]_{i,s} [A(G)]_{s,j}$ compte le nombre de chemins de longueur $n + 1$ joignant v_i à v_j en passant par v_s , d'où la conclusion. ■

Nous énonçons sans démonstration quelques résultats montrant l'intérêt de la matrice d'adjacence.

Définition II.1.6. Dans un graphe simple (non orienté), on appelle *triangle*, tout triplet d'arêtes distinctes deux à deux de la forme $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ (i.e., tout circuit de longueur trois formé d'arêtes distinctes).

Proposition II.1.7. *Si le polynôme caractéristique d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ (on autorise des boucles mais pas les arêtes multiples) est de la forme*

$$(2) \quad \chi_G(z) = (-z)^n + c_1(-z)^{n-1} + c_2(-z)^{n-2} + \dots + c_n,$$

alors certains coefficients de χ_G sont en relation directe avec G :

- ▶ c_1 est le nombre de boucles de G , en particulier, si G est simple, $c_1 = 0$.
- ▶ Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G .
- ▶ Si G est simple, alors c_3 est le double du nombre de triangles de G .

¹Une matrice de permutation est une matrice pour laquelle chaque ligne et chaque colonne contient exactement un 1, les autres entrées étant nulles.

La preuve de ce résultat repose sur le fait suivant : le coefficient c_i du polynôme caractéristique $\chi_G(z)$, donné en (2), est égal à la somme des déterminants des sous-matrices diagonales de dimension i de $A(G)$. Autrement dit, on sélectionne i lignes et i colonnes de même indice et ce, de toutes les façons possibles; puis on somme les déterminants obtenus. De là, le résultat annoncé suit facilement.

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté étant symétrique, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, dans le cas non orienté, on peut ordonner les valeurs propres par ordre croissant. Il est remarquable que le caractère biparti d'un graphe se traduise en une propriété purement algébrique de ses valeurs propres. Encore une fois, le lecteur intéressé trouvera les preuves dans [6].

Proposition II.1.8. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et non orienté. Le graphe est biparti si et seulement si son spectre (ensemble des valeurs propres) est symétrique par rapport à 0 : λ est valeur propre si et seulement si $-\lambda$ l'est aussi avec la même multiplicité.*

La condition nécessaire est facile à prouver (pour la condition suffisante, on utilise des outils plus sophistiqués comme le théorème de Perron–Frobenius). Soit la partition de V donnée par V_1 et V_2 . Si on énumère d'abord les sommets de V_1 , la matrice $A(G)$ a une forme particulière que nous allons exploiter. Soit x un vecteur propre non nul de $A(G)$ de valeur propre λ . Notons x_1 (resp. x_2) le vecteur obtenu en considérant les $\#V_1$ premières (resp. les $\#V_2$ dernières) composantes de x . Ainsi,

$$A(G)x = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de dimension $\#V_1 \times \#V_2$. On obtient aisément un vecteur propre non nul de valeur propre $-\lambda$,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \tilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Un arbre pointé est *orienté depuis la racine* si les arcs constituant celui-ci sont tous orientés des sommets de niveau i vers les sommets de niveau $i+1$ (pour i allant de 0 à la hauteur de l'arbre). Bien évidemment, le graphe non orienté sous-jacent est lui-même un arbre.

Définition II.1.9. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe orienté sans boucle dont les sommets sont énumérés par $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matrice $D(G)$ de demi-degré entrant*² est définie par

$$[D(G)]_{j,j} = d^-(v_j) \quad \text{et} \quad [D(G)]_{i,j} = -[A(G)]_{i,j}, \quad \text{si } i \neq j.$$

²Elle est aussi parfois appelée *matrice de Kirchoff*. Dans le cas de graphes simples non orientés, on trouve aussi la matrice Laplacienne donnée par $\Delta - A(G)$ où Δ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les degrés des différents sommets.

Autrement dit, $[D(G)]_{i,j}$ est l'opposé du nombre d'arcs joignant v_i à v_j , si $i \neq j$. En conséquence de cette définition, il est clair que la somme des éléments de toute colonne de $D(G)$ est nulle.

Théorème II.1.10 (Bott–Mayberry). *Soit G un multi-graphe orienté sans boucle. Le nombre de sous-arbres couvrant G pointés au sommet v_i et orientés est égal au mineur $M_{i,i}(G)$ de la matrice $D(G)$, c'est-à-dire au déterminant de $D(G)$ privé de sa i ème ligne et de sa i ème colonne.*

Exemple II.1.11. A la figure II.1, on a représenté un graphe orienté et un sous-arbre couvrant orienté depuis la racine 1. Pour le graphe de la

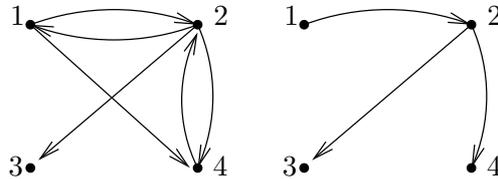


FIGURE II.1. Un sous-arbre couvrant pointé et orienté.

figure II.1, on trouve

$$D(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{1,1}(G) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

On vérifiera qu'il y a exactement 3 sous-arbres pointés en 1 et couvrant G .

Corollaire II.1.12 (Kirchoff). *Le nombre de sous-arbres couvrant un multi-graphe $G = (V, E)$ non orienté sans boucle, et pour lequel les sommets ont été énumérés, vaut $M_{i,i}(G')$ quel que soit i , où G' est le graphe symétrique (orienté) déduit de G .*

Exemple II.1.13. Sur la figure II.2, on a représenté un graphe non orienté G , le graphe orienté symétrique G' correspondant à G , ainsi qu'un arbre couvrant G et les arbres couvrants correspondants dans G' avec comme racines respectives les différents sommets de G' .

$$D(G') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les quatre mineurs principaux valent 8. On a ainsi 8 arbres couvrants distincts (comme le montre la figure II.3). Insistons sur le fait que nous avons compté l'ensemble des sous-arbres d'un graphe dont les sommets ont été numérotés. Ainsi, parmi les 8 arbres trouvés ci-dessus, seulement 3 sont 2 à 2 non isomorphes. Il ne s'agit pas d'un comptage "à isomorphisme près".

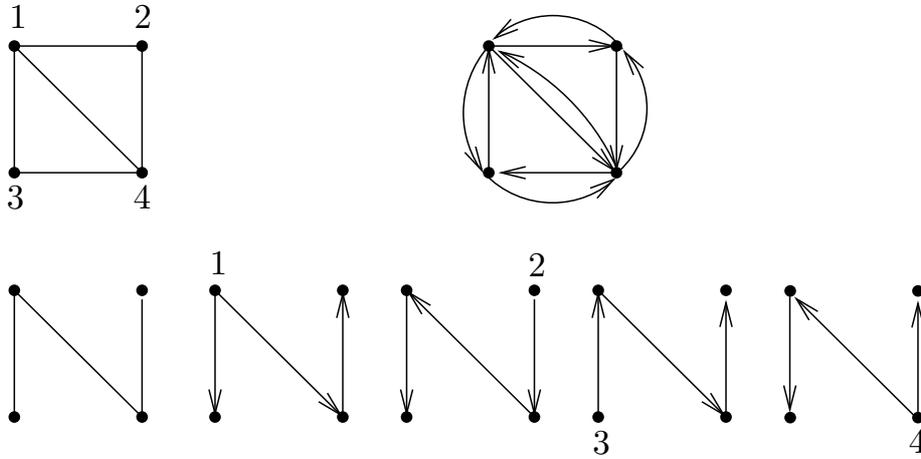


FIGURE II.2. Nombre de sous-arbres couvrants pour G et G' .

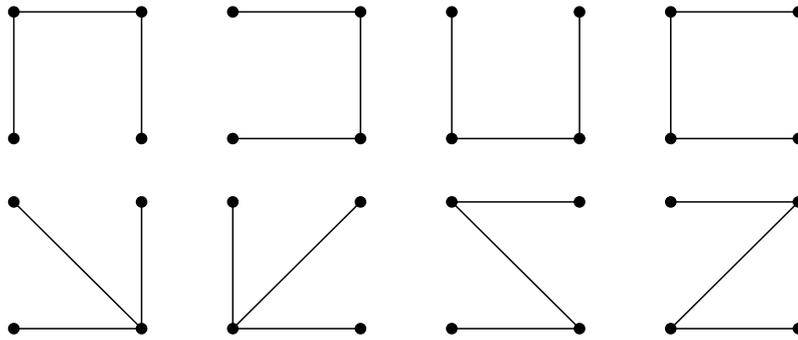


FIGURE II.3. Les sous-arbres couvrants du graphe G .

Soit $G = (V, E)$, un multi-graphe non orienté. On dénote par \mathcal{A}_G l'algèbre sur \mathbb{C} des polynômes en la matrice d'adjacence de G . On la dénomme l'algèbre d'adjacence de G . Si $A = A(G)$, un polynôme en A est une expression de la forme $\sum_{k=0}^t \alpha_k A^k$ où les α_k sont des coefficients complexes. Il est clair que l'ensemble de ces polynômes est un espace vectoriel sur \mathbb{C} et que le produit de deux polynômes en A est encore un polynôme en A . Il s'agit donc d'une algèbre avec unité. Les vérifications sont immédiates.

Proposition II.1.14. *Soit $G = (V, E)$, un multi-graphe non orienté connexe ayant $A(G)$ comme matrice d'adjacence et \mathcal{A}_G comme algèbre d'adjacence. Si $\text{diam}(G) = k$, alors la dimension de \mathcal{A}_G est supérieure ou égale à $k + 1$.*

Démonstration. En mettant en évidence un chemin simple de longueur k réalisant le diamètre, il est facile de se convaincre que les matrices I, A, A^2, \dots, A^k sont linéairement indépendantes où $A = A(G)$.

■

Si on connaît bien la théorie de la diagonalisation et en particulier la notion de polynôme minimum, on peut déduire du résultat précédent que le nombre de valeurs propres distinctes de la matrice d'adjacence d'un multi-graphe non orienté connexe est strictement supérieur à son diamètre.

Théorème II.1.15 (Hoffman). *La matrice $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ appartient à l'algèbre d'adjacence \mathcal{A}_G si et seulement si G est un multi-graphe (non orienté) connexe et régulier.*

2. Tri topologique

Lemme II.2.1. *Si un graphe simple orienté $G = (V, E)$ est sans cycle, alors il existe un sommet v tel que $d^-(v) = 0$ (resp. $d^+(v) = 0$).*

Démonstration. Considérons un chemin simple (x_1, \dots, x_k) de G de longueur maximale déterminé par des sommets de G (autrement dit, ce chemin passe par des sommets distincts et il n'est pas possible d'avoir un chemin passant par un plus grand nombre de sommets).

Si $d^-(x_1) > 0$, alors il existe $y \in \text{pred}(x_1)$. Si y était égal à un des x_j , on aurait alors un cycle (y, x_1, \dots, x_j) , ce qui est impossible par hypothèse. Or par maximalité du chemin (x_1, \dots, x_k) , il n'est pas possible d'avoir un sommet distinct des x_j et tel que $(y, x_1) \in E$.

On procède de la même façon si on suppose que $d^+(x_k) > 0$. ■

Théorème II.2.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple orienté. Le graphe G est sans cycle si et seulement si il est possible d'énumérer³ les sommets de $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de manière telle que, pour tout $i = 1, \dots, n$, le demi-degré entrant de v_i restreint au graphe $G_i = G - v_1 - \dots - v_{i-1}$ soit nul, ce que l'on note $d_{G_i}^-(v_i) = 0$.*

Une énumération comme celle obtenue dans le théorème précédent est un tri topologique.

Définition II.2.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple orienté. Un *tri topologique* de G est une énumération v_1, \dots, v_n des sommets de G de manière telle que si (v_i, v_j) est un arc de G , alors $i < j$.

Théorème II.2.4. *Un graphe simple orienté admet un tri topologique si et seulement si il est sans cycle.*

Définition II.2.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On construit un nouveau graphe orienté, appelé *graphe acyclique des composantes*⁴ ou encore *condensé* de G , dont les sommets sont les composantes f. connexes de G . Un arc joint deux composantes f. connexes A et B , s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \rightarrow b$.

³On entend par énumération, une bijection f de V à valeurs dans $\{1, \dots, \#V\}$. L'unique sommet v tel que $f(v) = i$ sera alors noté v_i . Chaque sommet reçoit un numéro.

⁴en anglais, (*directed acyclic collapse* ou, *acyclic component graph*).

Au vu de la Remarque I.2.9, le condensé de G est sans cycle. Il existe donc un tri topologique des composantes f. connexes de G . Si on énumère les sommets de G en suivant l'ordre prescrit par le tri topologique, i.e., on énumère d'abord tous les sommets de la première composante f. connexe avant de passer à la deuxième composante et ainsi de suite, alors $A(G)$ est une matrice bloc triangulaire et les blocs carrés diagonaux correspondent aux différentes composantes f. connexes.

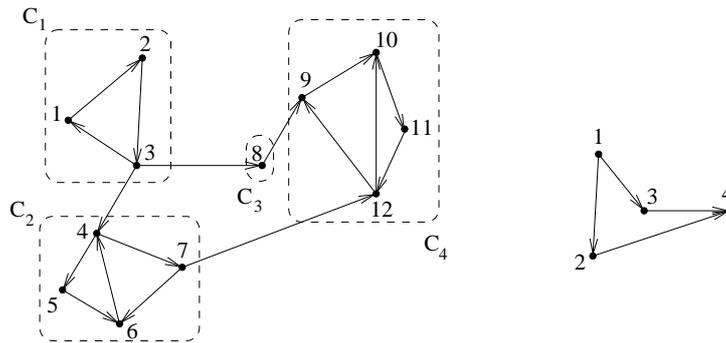


FIGURE II.4. Composantes f. connexe d'un graphe et condensé.

Si on considère le graphe représenté à la figure II.4 et qu'on énumère les sommets composante par composante, on obtient une matrice bloc triangulaire supérieure, les connexions entre composantes sont indiquées en gras :

$$A(G) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Le spectre d'un graphe est l'union des spectres de ses composantes connexes. En effet, on retrouve exactement les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice bloc triangulaire en étudiant les blocs carrés diagonaux. Ainsi, il suffit souvent de se concentrer sur les composantes f. connexes d'un graphe pour en extraire l'information utile.

3. Matrices primitives et algorithme du PageRank

Définition II.3.1. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est *irréductible* si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un entier $N(i, j) > 0$ tel que

$$[A^{N(i, j)}]_{i, j} > 0.$$

Autrement dit, la matrice d'adjacence d'un digraphe est irréductible si et seulement si ce graphe est fortement connexe.

Définition II.3.2. Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ à coefficients (réels) positifs ou nuls est *primitive* s'il existe un entier $N > 0$ tel que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$[A^N]_{i, j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter $A^N > 0$ étant sous-entendu que les inégalités sont interprétées composante à composante. On remarque aussi que toute matrice primitive est irréductible.

On peut définir la *période d'un sommet* comme étant le p.g.c.d. des longueurs des cycles qui le traverse. On vérifie aisément que tous les sommets d'un graphe fortement connexe ont la même période. On peut ainsi parler de la *période du graphe*. On admettra le résultat suivant.

Proposition II.3.3. *Un graphe fortement connexe possède une matrice d'adjacence primitive si et seulement si la période du graphe vaut 1 (on parle alors souvent de graphe/matrice apériodique).*

Par convention, nous supposons qu'un élément x de \mathbb{R}^n est toujours un vecteur colonne. Ainsi, pour obtenir un vecteur ligne, on en prend la transposée \tilde{x} .

Théorème II.3.4 (Perron). *Soit $A \geq 0$ une matrice carrée primitive de dimension n .*

- ▶ *La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. un vecteur propre à gauche $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,*

$$A v_A = \lambda_A v_A \quad (\text{resp. } \tilde{w}_A A = \lambda_A \tilde{w}_A).$$

- ▶ *Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et donc, géométrique) simple.*
- ▶ *Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A .*
- ▶ *Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| < \lambda_A$.*

Dans le cas d'une matrice irréductible, un raffinement de ce résultat (théorème de Perron–Frobenius) fait apparaître d'autres valeurs propres de module maximum. En fait, on a toujours une valeur propre réelle λ_A associée

à un espace propre de dimension 1 et les autres valeurs propres de module maximum sont de la forme

$$\lambda_A e^{2ik\pi/p}, \quad k = 1, \dots, p-1$$

et on peut montrer que p est la période de la matrice irréductible considérée (la notion de période d'un graphe s'étend à celle d'une matrice).

Avec les notations du théorème de Perron, si A est une matrice primitive, alors il est possible de montrer que ⁵

$$(3) \quad \boxed{A^k = \lambda_A^k v_A \widetilde{w}_A + o(\lambda_A^k)}$$

où v_A et \widetilde{w}_A sont des vecteurs propres choisis de telle sorte que $\widetilde{w}_A \cdot v_A = 1$. De façon équivalente (c'est juste une histoire de notations), cela revient aussi à écrire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{\lambda_A^k} = v_A \widetilde{w}_A.$$

Remarquez que $v_A \widetilde{w}_A$ est une matrice carrée de dimension n dont les éléments sont tous strictement positifs. Autrement dit, ce résultat stipule qu'asymptotiquement, tout élément de A^k est proportionnel à λ_A^k (la constante de proportionnalité dépendant de l'élément envisagé).

Nous allons illustrer certainement l'une des applications les plus célèbres du théorème de Perron : le succès de Google basé sur leur algorithme de classement des pages web ! Plusieurs aspects ne sont pas pris en compte dans cette présentation (développement et efficacité des méthodes numériques, choix de la constante α , mise en pratique, sensibilité aux perturbations, modèle plus évolué, ...). Pour plus de détails, consulter par exemple l'excellent ouvrage de C. Meyer et A. Langville [5] consacré entièrement au sujet.

L'idée originale de L. Page et S. Brin est très simple :

- ▶ on accorde plus d'importance, i.e., un score de "PageRank" plus élevé, aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine, c'est-à-dire qui ont un PageRank élevé;
- ▶ on accorde d'autant moins de crédit à une citation si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens (on ne peut qu'accorder moins de poids aux sites qui galvaudent leurs recommandations).

On suppose disposer d'un graphe simple $G = (V, E)$ où les sommets notés $1, \dots, n$ représentent les pages de l'Internet et où l'on dispose d'un arc (i, j) si et seulement si la page i possède un lien pointant vers la page j . Au vu du modèle proposé par Page et Brin, le PageRank $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, \dots, n\}$ serait donné par

$$(4) \quad \pi_j = \sum_{i \in \text{pred}(j)} \frac{\pi_i}{d^+(i)}$$

⁵Pour rappel, une fonction $f(x)$ est en $o(g)$ si f/g tend vers 0 si $x \rightarrow \infty$. Cela se lit "f est en petit oh de g".

qui est une formule récursive pour laquelle on ne dispose pas *a priori* de méthode permettant d'assurer l'existence, l'unicité ou le calcul efficace d'une solution $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ non triviale. On peut de plus supposer que les scores recherchés sont normalisés,

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1.$$

Le problème peut se réécrire sous forme matricielle (“ H ” comme “hyperlien”),

$$(5) \quad \pi = \pi H$$

où

$$H_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 0 & \text{si } d^+(i) = 0 \end{cases}$$

avec $A(G)$ la matrice d'adjacence du graphe G et rappelons que π est un vecteur ligne. Sous cette forme, il n'est pas clair que le problème possède une solution (ni qu'elle soit unique et on dispose encore moins d'une méthode de calcul). Autrement dit, il n'y a pas de raison évidente pour laquelle 1 est valeur propre de H et qui plus est, valeur propre simple.

L'astuce pour pouvoir appliquer la théorie de Perron est double. Tout d'abord, pour se débarrasser des “puits”, i.e., des sommets de demi-degré sortant nul et pour obtenir une matrice stochastique, on introduit une matrice S (“ S ” comme “stochastique”) définie par

$$S_{ij} = \begin{cases} A(G)_{ij}/d^+(i) & \text{si } d^+(i) > 0 \\ 1/n & \text{si } d^+(i) = 0. \end{cases}$$

Ensuite, pour assurer la forte connexité du graphe (i.e., le caractère irréductible), on construit une matrice G (“ G ” comme Google) donnée par la combinaison affine (et même convexe) suivante avec un réel $\alpha \in [0, 1]$ fixé,

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) J/n$$

où $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$. L'équation initiale (5) est remplacée par

$$\pi = \pi G.$$

(La matrice J/n est parfois appelée *matrice de téléportation*, cf. remarque suivante.) Google attribue à α une valeur de 0,85. Ce choix n'est pas arbitraire. Au plus α est proche de 1 (G est un point du segment $[S, J/n]$ de l'espace des matrices), au mieux on approche le modèle “naturel” (5) proposé initialement : on diminue le rôle artificiel de la matrice de téléportation. Cependant, on peut montrer que ce paramètre α contrôle la vitesse de convergence de la méthode de calcul développée et donc le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une estimation du vecteur π (par calcul de puissances successives de G qui contient plus de $8 \cdot 10^9$ entrées). Quand α tend vers 1, ce nombre devient prohibitif comme le montre la table II.1 (tirée de l'ouvrage de C. Meyer et A. Langville). Ainsi, $\alpha = 0,85$ semble un bon compromis en-

α	nombre d'itérations
0,5	34
0,75	81
0,8	104
0,85	142
0,9	219
0,95	449
0,99	2292
0,999	23015

TABLE II.1. Rôle du paramètre α [5]

tre le caractère artificiel introduit par la matrice de téléportation et la masse de calculs à réaliser. De plus, on peut montrer par une discussion plus fine sur les valeurs propres des matrices envisagées qu'au plus α est proche de 1, au plus le vecteur π est sensible aux petites perturbations de la matrice H (ce qui s'avère être gênant vu la grande volatilité du web et de sa structure, de nombreux liens apparaissent et disparaissent chaque jour). Idéalement, on désirerait obtenir une mesure peu sensible à de telles perturbations.

Remarque II.3.5 (Chaînes de Markov). On peut donner une interprétation "probabiliste" de la matrice G . Considérons un surfeur qui, se trouvant sur une page quelconque, a deux choix possibles. Soit, avec une probabilité α , il clique au hasard et de manière uniforme sur l'un des liens de la page pour changer de page. Soit, avec une probabilité $1 - \alpha$, il choisit au hasard et de manière uniforme l'une des n pages de l'Internet tout entier. Ainsi, G_{ij} représente la probabilité de transition lorsque le surfeur se trouve sur la page i de passer à la page j .

Ainsi, partant d'une distribution initiale de probabilités, par exemple $\pi^{(0)} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, l'application de G^k permet d'estimer la probabilité de notre surfeur de se trouver sur l'une des pages $1, \dots, n$ après k clics,

$$\pi^{(k)} = \pi^{(0)} G^k.$$

Nous allons à présent montrer que l'utilisation de cette matrice G (à la place de H) assure l'existence et l'unicité d'une distribution limite π .

Proposition II.3.6. *Les matrices S , J/n et G sont stochastiques, autrement dit, la somme des éléments d'une ligne quelconque vaut 1.*

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification. ■

Proposition II.3.7. *Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté k -régulier. Alors*

- ▶ k est une valeur propre de G ,
- ▶ pour toute valeur propre λ de G , on a $|\lambda| \leq k$,

- si G est connexe, k est valeur propre simple (i.e., les multiplicités géométrique et algébrique valent 1).

Remarque II.3.8. Cette proposition peut aussi se réexprimer en termes de multi-graphes orientés k -réguliers. Il suffit de préciser au troisième point que G est fortement connexe.

Démonstration. Le premier point est immédiat. Il est clair que le vecteur $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre de $A(G)$ de valeur propre k .

Passons au deuxième point et considérons une valeur propre λ de $A(G)$ ayant $y \neq 0$ comme vecteur propre. Soit y_j une composante de y de module maximum. On a

$$|\lambda| |y_j| = |[A(G)y]_j| \leq \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} |y_i| \leq |y_j| \sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} = k |y_j|$$

et donc, $|\lambda| \leq k$. On a utilisé le fait que les coefficients $[A(G)]_{j,i}$ sont ≥ 0 , qu'au plus k d'entre eux sont non nuls et que $\sum_{i=1}^n [A(G)]_{j,i} = k$.

Pour le dernier point, puisque G est connexe, $A(G)$ est irréductible et on peut donc utiliser le théorème de Perron–Frobenius. La matrice $A(G)$ possède une unique valeur propre réelle dominante et au vu du point précédent, il ne peut s'agir que de k . ■

Lemme II.3.9. Si M est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre dominante de M .

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{Q}_r^r$. En multipliant tous les éléments de M par le p.p.c.m. γ des dénominateurs des éléments de M , la matrice

$$M' = \gamma M$$

obtenue est telle que la somme des éléments de chaque ligne vaut $\gamma \in \mathbb{N}$. Il s'agit donc de la matrice d'adjacence d'un graphe γ -régulier. Comme nous venons de le voir, il suffit d'appliquer la proposition II.3.7 pour conclure que γM possède γ comme valeur propre dominante (i.e., toute autre valeur propre μ est telle que $|\mu| \leq \gamma$). La conclusion suit aisément en divisant par γ . ■

Par construction, la matrice G est primitive puisque toutes ses entrées sont strictement positives. On peut donc lui appliquer le théorème de Perron, or par le lemme précédent, nous savons déjà que 1 est valeur propre dominante de G . Par conséquent, la valeur propre dominante 1 est simple et il existe un unique vecteur colonne $x > 0$ (resp. ligne $y > 0$) tel que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (\text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1) \quad \text{et} \quad Gx = x \quad (\text{resp.} \quad yG = y).$$

Ainsi, déterminer le vecteur π des “PageRanks” revient à chercher le vecteur propre y de Perron à gauche de G (ou le vecteur propre de Perron à droite de

\tilde{G}). En appliquant le résultat asymptotique (3) énoncé à la page 45, puisque $e = (1 \cdots 1)$ est un vecteur propre à droite de G de valeur propre 1 (G est stochastique) et que $\pi \cdot e = 1$ (puisque les scores sont normalisés), on a que

$$(6) \quad G^k = e\pi + o(1) \text{ autrement dit, } \lim_{k \rightarrow \infty} G^k = e\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1 \quad \cdots \quad \pi_n).$$

Nous pouvons à présent obtenir aisément une méthode itérative pour estimer π . Soit $p^{(0)} = (p_1^{(0)} \quad \cdots \quad p_n^{(0)}) > 0$ un vecteur tel que $\sum_i p_i^{(0)} = 1$. Pour tout $k \geq 1$, on pose $p^{(k)} = p^{(0)} G^k = p^{(k-1)} G$. Il nous reste à montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)} = \pi$$

ainsi, il suffit dès lors de partir d'une distribution initiale et d'appliquer G de manière itérative jusqu'à obtenir la précision voulue mesurée par $\|p^{(k)} - p^{(k-1)}\|$. C'est immédiat, au vu de (6),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^k = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix} =: P$$

et

$$[p^{(0)} P]_j = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)} \pi_j = \pi_j \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i^{(0)}}_{=1} = \pi_j.$$

CHAPITRE III

Techniques de dénombrement

1. Un peu de combinatoire

Dans ce chapitre, si $f : A \rightarrow B$ est une application entre deux ensembles A et B , on supposera que f est définie pour tout élément de A , i.e., le domaine de f coïncide avec A . Par contre, f est à valeurs dans B : tout élément de B est image par f d'au plus un élément de A , i.e., l'image de f est un sous-ensemble de B .

Pour rappel, $f : A \rightarrow B$ est une *injection* si pour tous $x, y \in A$, si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$ (ou de façon équivalente, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$). En outre, f est une *surjection* si pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Une *bijection* $f : A \rightarrow B$ entre les ensembles A et B est une application injective et surjective. Pour rappel, on note le cardinal de A par $\#A$ (certains auteurs utilisent aussi $|A|$).

Théorème III.1.1. *Soient A et B deux ensembles finis.*

- ▶ *S'il existe une injection de A dans B , alors $\#A \leq \#B$.*
- ▶ *S'il existe une surjection de A dans B , alors $\#A \geq \#B$.*
- ▶ *Ils sont en bijection si et seulement si $\#A = \#B$.*

Théorème III.1.2. *Soient A et B deux ensembles finis de même cardinal et $f : A \rightarrow B$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- ▶ *f est une injection,*
- ▶ *f est une surjection,*
- ▶ *f est une bijection de A dans B .*

Proposition III.1.3. *Si A_1, \dots, A_k sont des ensembles disjoints finis, alors*

$$\#\bigcup_{i=1}^k A_i = \sum_{i=1}^k \#A_i.$$

Remarquons qu'il est important que les ensembles soient disjoints. En effet, en toute généralité, on a

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Proposition III.1.4. *Si A_1, \dots, A_k sont des ensembles finis, alors*

$$\#(A_1 \times \dots \times A_k) = \prod_{i=1}^k \#A_i.$$

Lorsqu'on travaille avec un ensemble fini contenant n éléments, il est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$. On peut donc l'identifier avec celui-ci. Rappelons une fois encore qu'énumérer les éléments d'un ensemble A définit une bijection entre $\{1, \dots, \#A\}$ et A , chaque élément de A est indicé.

Théorème III.1.5 (Arrangements avec répétition). *Le nombre d'applications de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, \ell\}$, $k \leq \ell$ est égal à ℓ^k . En particulier, le nombre de façons de choisir k éléments parmi ℓ avec remise (l'ordre est important) vaut ℓ^k .*

Théorème III.1.6 (Arrangements). *Le nombre d'injections de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, \ell\}$, $k \leq \ell$ est égal à*

$$\ell(\ell - 1) \cdots (\ell - k + 1) = \frac{\ell!}{(\ell - k)!} = \ell^{\underline{k}}.$$

En particulier, le nombre de façons d'énumérer k éléments parmi ℓ (l'ordre est important et il n'y a pas de répétition) vaut $\frac{\ell!}{(\ell - k)!}$ et le nombre de permutations de $\{1, \dots, k\}$ vaut $k!$.

1.1. Coefficients binomiaux. Si on s'intéresse au nombre de façons de choisir k éléments parmi ℓ (ici, l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition), alors on identifiera les injections de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, \ell\}$ ayant le même ensemble de valeurs prises. Pour un ensemble image donné, il y en a $k!$. Par conséquent, le nombre de façons de choisir k éléments parmi ℓ vaut

$$\frac{\ell!}{(\ell - k)! k!}$$

on définit cette quantité comme le coefficient binomial $\binom{\ell}{k}$ aussi noté C_{ℓ}^k .

Lemme III.1.7 (Triangle de Pascal). *Si $1 \leq k \leq n$, alors*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

■

Proposition III.1.8 (Binôme de Newton). *Soient w et z deux nombres complexes. On a*

$$(w + z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k w^k z^{n-k}.$$

Démonstration. Le terme en $w^i z^{n-i}$, $0 \leq i \leq n$, s'obtient par distributivité en sélectionnant dans l'expression

$$(w + z)^n = (w + z)(w + z) \cdots (w + z)$$

i fois un terme w dans les n facteurs $(w + z)$ et les $n - i$ autres fois, un terme z . Pour conclure, rappelons que choisir i facteurs parmi n peut se faire de C_n^i façons distinctes. ■

Démonstration. — Alternative classique — On procède par récurrence. La formule est vraie si $n = 0$. Supposons-la satisfaite pour $n \geq 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} (w + z)^{n+1} &= (w + z)(w + z)^n \\ &= (w + z) \sum_{k=0}^n C_n^k w^k z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k w^{k+1} z^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k w^k z^{n-k+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} C_n^{\ell-1} w^\ell z^{n-\ell+1} + \sum_{\ell=0}^n C_n^\ell w^\ell z^{n-\ell+1} \\ &= w^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n (C_n^{\ell-1} + C_n^\ell) w^\ell z^{n-\ell+1} + z^{n+1}. \end{aligned}$$

En utilisant à présent la formule du triangle de Pascal, on trouve

$$\begin{aligned} (w + z)^{n+1} &= C_{n+1}^{n+1} w^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n C_{n+1}^\ell w^\ell z^{n-\ell+1} + C_{n+1}^0 z^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k w^k z^{n+1-k}. \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule annoncée quand l'exposant est $n + 1$. Par conséquent, la formule du binôme de Newton est satisfaite pour tout entier naturel n . ■

Remarque III.1.9. Un moyen commode pour retenir la formule du binôme de Newton est d'introduire les *puissances divisées* notées $x^{[n]}$ et définies comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$x^{[n]} = \frac{x^n}{n!}.$$

Avec cette notation, la formule du binôme de Newton se réécrit simplement

$$(w + z)^{[n]} = \sum_{k=0}^n w^{[k]} z^{[n-k]}.$$

1.2. Quelques identités classiques.

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1} = \frac{n-2k}{n} C_n^k$$

$$\sum_{j=k}^n C_j^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

1.3. Coefficients multinomiaux. On peut généraliser aisément la formule du binôme de Newton au cas multinomial. Soient z_1, \dots, z_p des nombres complexes. On a

$$(z_1 + \dots + z_p)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_p = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}.$$

On trouve parfois la notation anglo-saxonne $\binom{n}{k_1 \dots k_p}$ pour le coefficient multinomial $\frac{n!}{k_1! \dots k_p!}$. En recourant aux puissances divisées, cette identité se réécrit

$$(z_1 + \dots + z_p)^{[n]} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_p = n}} z_1^{[k_1]} \dots z_p^{[k_p]}.$$

Le principe de démonstration est simple mais peu élégant. Il suffit de procéder une fois encore par récurrence. Par exemple, pour ne pas surcharger l'écriture, prenons le cas $p = 3$,

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2 + z_3)^{[n]} &= \sum_{k=0}^n (z_1 + z_2)^{[k]} z_3^{[n-k]} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k z_1^{[\ell]} z_2^{[k-\ell]} z_3^{[n-k]} = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + k_3 = n}} z_1^{[k_1]} z_2^{[k_2]} z_3^{[k_3]}. \end{aligned}$$

Une autre méthode consiste à développer les produits se trouvant dans $(z_1 + \dots + z_p)^{[n]}$ pour obtenir une expression de la forme

$$(z_1 + \dots + z_p)^{[n]} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_p = n}} \alpha_{k_1, \dots, k_p} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$$

puis d'appliquer l'opérateur de dérivation $D_{z_1}^{k_1} \dots D_{z_p}^{k_p}$ aux deux membres (où $k_1 + \dots + k_p = n$) pour déterminer la valeur de ces coefficients α_{k_1, \dots, k_p} .

Théorème III.1.10 (Berge). *Le nombre d'arbres ayant n sommets de label respectif x_1, \dots, x_n et dont les degrés sont donnés par $\deg(x_1) = d_1, \dots, \deg(x_n) = d_n$ vaut le coefficient multinomial*

$$\binom{n-2}{d_1-1 \ \dots \ d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \ \dots \ (d_n-1)!},$$

à condition qu'un arbre ayant de telles spécificités existe¹.

2. Suites linéaires récurrentes

Revenons sur le comptage des chemins dans un graphe et considérons le graphe suivant. Si on désire compter le nombre de chemins de longueur n



FIGURE III.1. Compter les chemins de longueur n de a vers b .

de a vers b , le théorème II.1.5 stipule qu'il suffit de calculer $[A(G)^n]_{1,2}$ où

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les chemins de longueur $n \geq 2$ débutent soit par une boucle sur a et sont suivis par un chemins de longueur $n - 1$ de a vers b , soit par le cycle de longueur 2 passant par b et suivi par un chemin de longueur $n - 2$ de a vers b . Autrement dit,

$$[A(G)^n]_{1,2} = [A(G)^{n-1}]_{1,2} + [A(G)^{n-2}]_{1,2}.$$

Dès lors, plutôt que de calculer les puissances successives de $A(G)$, on peut calculer de proche en proche les termes d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Pour notre exemple, les premiers termes de la suite sont

$$(7) \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Définition III.2.1. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *linéaire récurrente homogène* si elle satisfait, pour tout $n \geq 0$, une *relation de récurrence linéaire homogène* (à coefficients constants) de la forme

$$(8) \quad \boxed{x_{n+k} = a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n}$$

avec $a_{k-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$. Les k premières valeurs x_0, \dots, x_{k-1} sont appelées les *conditions initiales* (associées à une suite particulière vérifiant (8)). On

¹Par exemple, il n'existe aucun arbre ayant 5 sommets tous de degré 2.

dit que k est le *degré* ou l'*ordre* de la relation. La relation de récurrence linéaire est parfois notée

$$x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \cdots - a_0x_n = 0.$$

On emploie aussi les termes *équation de récurrence linéaire* et *solution* pour désigner respectivement la relation de récurrence et une suite la satisfaisant.

Remarque III.2.2. On supposera toujours dans (8) que le coefficient

$$a_0 \neq 0.$$

Si tel n'était pas le cas, on se ramène alors aisément à une équation d'ordre inférieur pour la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ puisque le terme x_0 n'a alors aucune influence sur les autres termes de la suite.

En vertu du théorème de Cayley–Hamilton, toute matrice (en particulier, la matrice d'adjacence $A = A(G)$ du graphe) annule son polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$. Si $\#V = k$, A est une matrice carrée de dimension k et $\det(A - \lambda I)$ est un polynôme en λ à coefficients dans \mathbb{Z} de degré k dont le coefficient dominant vaut 1,

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \cdots - c_{k-1}\lambda - c_k.$$

Autrement dit, il existe des entiers $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$A^k = c_1A^{k-1} + \cdots + c_kI.$$

En multipliant les deux membres par A^{n-k} , on obtient pour tout $n \geq k$,

$$A^n = c_1A^{n-1} + \cdots + c_kA^{n-k}.$$

Puisque cette relation a lieu entre matrices, elle a lieu pour chacun des éléments : pour tous $1 \leq i, j \leq k$ et $n \geq k$, on a

$$[A^n]_{i,j} = c_1[A^{n-1}]_{i,j} + \cdots + c_k[A^{n-k}]_{i,j}.$$

Autrement dit, les suites comptant le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets quelconques de G satisfont toutes la même relation de récurrence linéaire. Elles diffèrent uniquement par leurs conditions initiales.

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{C} , c'est-à-dire, l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{C} . Cet ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} : on peut additionner (terme à terme) deux éléments de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et multiplier un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par un "scalaire", un élément de \mathbb{C} .

Proposition III.2.3. *L'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire (8) d'ordre k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ isomorphe à \mathbb{C}^k .*

Démonstration. Nous devons montrer que la somme (terme à terme) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de deux suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (8) est encore solution de (8). De même, la multiplication (terme à terme) $\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'une suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (8) par un complexe α est encore

solution de (8). Enfin, il y a bijection entre les k -uples $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ et les suites vérifiant (8) ayant un tel k -uple comme conditions initiales. ■

Au vu de cette dernière proposition, il serait intéressant de trouver une base de l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant (8). Cette base doit contenir k suites linéairement indépendantes et il suffit de vérifier que les vecteurs de \mathbb{C}^k correspondant aux conditions initiales sont linéairement indépendants. Si les k suites $(u_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient (8), elles sont linéairement indépendantes si et seulement si

$$(9) \quad \det \begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \cdots & u_0^{(k)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k-1}^{(1)} & u_{k-1}^{(2)} & \cdots & u_{k-1}^{(k)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dans le même ordre d'idée, une même suite peut vérifier plusieurs relations de récurrence. Par exemple, la suite de Fibonacci (7) est solution de

$$u_{n+4} = u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n$$

avec les conditions initiales 0, 1, 1. Ainsi, l'ordre minimal d'une relation de récurrence pour une solution donnée $(u_n)_{n \geq 0}$ est le plus grand entier k tel que

$$\det \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{k-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k-1} & u_k & \cdots & u_{2k-2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

En effet, si k n'était pas minimal, la dernière colonne serait combinaison linéaire des colonnes précédentes. Une telle matrice est parfois appelée *matrice de Hankel*. Pour la suite de Fibonacci (7), on vérifie que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dans la matrice de droite, la troisième colonne est la somme des deux premières.

Définition III.2.4. A l'équation (8), on associe le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \cdots - a_1 X - a_0.$$

Ce polynôme de degré k est le *polynôme caractéristique de la relation de récurrence*. On rencontrera aussi le *polynôme réciproque de la relation de récurrence* défini par

$$X^k \cdot \chi(1/X) = 1 - a_{k-1} X - \cdots - a_1 X^{k-1} - a_0 X^k.$$

Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que, dans \mathbb{C} , un polynôme de degré k possède exactement k zéros comptés avec leur multiplicité. Il se factorise donc complètement en un produit de facteurs du premier degré (10). Nous exploitons ce fait dans l'énoncé qui suit.

Théorème III.2.5. *Si on dispose de la factorisation*

$$(10) \quad \chi(X) = \prod_{j=1}^r (X - \alpha_j)^{m_j}$$

où les α_i sont les zéros de $\chi(X)$ de multiplicité m_i ($m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$), alors pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et tout $t < m_j$, la suite

$$(n^t \alpha_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une solution de l'équation linéaire homogène (8).

Démonstration. Il faut vérifier que, pour tout n ,

$$(n+k)^t \alpha_j^{n+k} - a_{k-1} (n+k-1)^t \alpha_j^{n+k-1} - \dots - a_0 n^t \alpha_j^n = 0.$$

Or, α_j est un zéro du polynôme caractéristique, autrement dit

$$\alpha_j^k - a_{k-1} \alpha_j^{k-1} - \dots - a_0 = 0.$$

Et on obtient la relation cherchée pour $t = 0$ en multipliant par α_j^n . Maintenant, exploitons le fait que α_j est un zéro de multiplicité m_j , i.e., les dérivées de χ jusqu'à l'ordre $m_j - 1$ évaluées en α_j sont nulles. Par commodité, posons $a_k = -1$, on est alors ramener à étudier

$$\sum_{i=0}^k a_i (n+i)^t \alpha_j^{n+i}.$$

En utilisant le binôme de Newton, cette somme se réécrit,

$$\sum_{i=0}^k a_i \left(\sum_{s=0}^t \binom{t}{s} n^{t-s} i^s \right) \alpha_j^{n+i} = \sum_{s=0}^t \binom{t}{s} n^{t-s} \alpha_j^n \left(\sum_{i=0}^k a_i i^s \alpha_j^i \right).$$

Et on peut montrer (avec un peu de travail) que la dernière expression entre parenthèses est nulle pour $s < m_j$. ■

Ce théorème fournit $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$ solutions de (8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \alpha_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{m_1-1} \alpha_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ (\alpha_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \alpha_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{m_2-1} \alpha_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \vdots \\ (\alpha_r^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \alpha_r^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{m_r-1} \alpha_r^n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

En exploitant la proposition III.2.3 et (9), ces suites forment une base de l'ensemble des solutions si et seulement si (on calcule les k premières valeurs prises par chacune de ces k suites et on les place dans des vecteurs colonnes)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 2\alpha_1^2 \\ \vdots \\ (k-1)\alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 2^{m_1-1}\alpha_1^2 \\ \vdots \\ (k-1)^{m_1-1}\alpha_1^{k-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_r \\ \alpha_r^2 \\ \vdots \\ \alpha_r^{k-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_r \\ 2^{m_r-1}\alpha_r^2 \\ \vdots \\ (k-1)^{m_r-1}\alpha_r^{k-1} \end{pmatrix}$$

forment une base de \mathbb{C}^k . Ceci a lieu si et seulement si

$$\det \left(n^t \alpha_i^n \right)_{\substack{n=0, \dots, k-1; \\ i=1, \dots, r; t=0, \dots, m_i-1}} \neq 0$$

Nous admettrons (des calculs semblables sont réalisés en annexe) le résultat suivant qui permet de conclure.

Proposition III.2.6. *La valeur du déterminant*

$$\det \left(n^t \alpha_i^n \right)_{\substack{n=0, \dots, k-1; \\ i=1, \dots, r; t=0, \dots, m_i-1}}$$

est donnée par

$$\prod_{i=1}^r 0! 1! \dots (m_i - 1)! \alpha_i^{m_i(m_i-1)/2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^{m_i m_j}.$$

Puisque les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont distincts, le déterminant est non nul et ses colonnes sont donc linéairement indépendantes. En conclusion, la solution générale de l'équation linéaire récurrente homogène (8) est donnée par la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$s_n = \sum_{i=1}^r P_i(n) \alpha_i^n$$

où P_i est un polynôme de degré strictement inférieur à m_i . Les coefficients des polynômes P_i sont entièrement déterminés par les conditions initiales.

Exemple III.2.7. Considérons la suite satisfaisant pour tout $n \geq 0$, l'équation linéaire récurrente suivante

$$x_{n+4} = 6x_{n+3} - 13x_{n+2} + 24x_{n+1} - 36x_n$$

avec $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$. Le polynôme caractéristique est donné par

$$\chi(X) = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 24X + 36 = (X - 3)^2(X - 2i)(X + 2i).$$

Ainsi, la solution générale de la récurrence est de la forme

$$x_n = (c_1 n + c_2) 3^n + c_3 (2i)^n + c_4 (-2i)^n.$$

On détermine c_1, c_2, c_3, c_4 grâce aux conditions initiales. On résout le système

$$\begin{cases} x_0 = 0 & = c_2 + c_3 + c_4 \\ x_1 = 2 & = 3c_1 + 3c_2 + 2ic_3 - 2ic_4 \\ x_2 = 1 & = 18c_1 + 9c_2 - 4c_3 - 4c_4 \\ x_3 = 1 & = 81c_1 + 27c_2 - 8ic_3 + 8ic_4 \end{cases}$$

pour trouver

$$c_1 = \frac{2}{13}, \quad c_2 = -\frac{23}{169}, \quad c_3 = \frac{23}{338} - \frac{329}{676}i, \quad c_4 = \overline{c_3}.$$

Remarquons que

$$c_3(2i)^n + c_4(-2i)^n = c_3(2i)^n + \overline{c_3(2i)^n} = 2\Re(c_3(2i)^n).$$

De là, on obtient la forme close pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = \frac{2}{13}n3^n - \frac{23}{169}3^n + \frac{23}{338}2^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{329}{676}2^{n+1}\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Les premiers termes de la suite sont

$$0, 2, 1, 1, 41, 185, 565, 1933, 7217, 25073, 82669, 273685, 909353, 2979641, \dots$$

2.1. Le cas général. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite *linéaire récurrente (non homogène)* si elle satisfait, pour tout $n \geq 0$, une *relation de récurrence linéaire* (à coefficients constants) de la forme

$$(11) \quad x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n + b_n$$

avec $a_{k-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée. L'équation linéaire récurrente homogène associée est

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n.$$

Ce qui se passe ici est analogue à ce que l'on peut rencontrer dans l'étude des systèmes d'équations linéaires ou dans l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants : si on dispose d'une suite particulière $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant (11), alors les solutions de (11) sont exactement les suites de la forme

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} + (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution quelconque de l'équation homogène associée. Autrement dit, l'ensemble des solutions de (11) n'est qu'un translaté (structure de variété affine) de l'ensemble des solutions de l'équation linéaire récurrente homogène associée par une solution particulière $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Il est clair que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} + (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de (11). Il reste à montrer que toute solution $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (11) a la bonne forme. Or

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} - (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} - (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien solution de l'équation homogène associée. ■

Toute la difficulté revient ici à obtenir une solution de l'équation non homogène (11). Avec de l'entraînement, on arrive parfois à deviner une telle solution. Nous ne traiterons que le cas où b_n est une *exponentielle-polynôme*, i.e., b_n est de la forme $P(n)\lambda^n$ où P est un polynôme et λ une constante non nulle.

Remarquons qu'une somme d'exponentielle-polynômes n'est pas plus difficile à traiter. Il suffit de considérer chaque terme séparément puis de les superposer (i.e., de les additionner). On pourra aussi traiter des expressions

faisant intervenir sin ou cos en prenant la partie imaginaire ou réelle de e^{ix} .

Soit P un polynôme de degré $d \geq 0$ et $\lambda \neq 0$. Cherchons dès lors une solution de l'équation

$$(12) \quad x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \cdots - a_0x_n = \lambda^n P(n).$$

Supposons disposer d'une solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et essayons d'en déterminer la forme. Dès lors, pour tout $i = 0, \dots, d+1$, on a

$$x_{n+k+i} - a_{k-1}x_{n+k+i-1} - \cdots - a_0x_{n+i} = \lambda^{n+i} P(n+i).$$

Or, on peut montrer que (cf. Section 6)

$$P(n), P(n+1), \dots, P(n+d)$$

forment une base de l'espace des polynômes de degré au plus d . Il en est donc de même de

$$P(n), \lambda P(n+1), \dots, \lambda^d P(n+d).$$

Dès lors, il existe des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ tels que

$$\lambda^{d+1} P(n+d+1) = \sum_{j=0}^d \alpha_j \lambda^j P(n+j)$$

et donc, en multipliant les deux membres par λ^n

$$\lambda^{n+d+1} P(n+d+1) = \sum_{j=0}^d \alpha_j \lambda^{n+j} P(n+j).$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} & u_{n+k+d+1} - a_{k-1}u_{n+k+d} - \cdots - a_0u_{n+d+1} \\ &= \sum_{j=0}^d \alpha_j (u_{n+k+j} - a_{k-1}u_{n+k+j-1} - \cdots - a_0u_{n+j}) \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence homogène d'ordre $k+d$.

Si on note $\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$ le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à (12), on déduit aisément de l'équation précédente

$$X^{d+1}\chi(X) = \sum_{j=0}^d \alpha_j X^j \chi(X)$$

et donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une équation de récurrence linéaire homogène dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\chi(X) \left(X^{d+1} - \sum_{j=0}^d \alpha_j X^j \right).$$

Il suffit dès lors d'appliquer le théorème III.2.5 donnant la structure des solutions.

Exemple III.2.8. Considérons l'équation

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = n 2^n$$

Avec les notations précédentes, $d = 1$ et on peut donc exprimer $(n + 2) 2^{n+2}$ comme une combinaison linéaire de $(n + 1) 2^{n+1}$ et $n 2^n$. On trouve

$$(n + 2) 2^{n+2} = \underbrace{4}_{\alpha_1} (n + 1) 2^{n+1} - \underbrace{4}_{\alpha_0} n 2^n.$$

La suite recherchée est solution de l'équation homogène ayant pour polynôme caractéristique

$$\chi(X) (X^2 - \alpha_1 X - \alpha_0) = (X^2 - 5X + 3)(X^2 - 4X + 4)$$

les racines de ce polynôme sont $(5 \pm \sqrt{13})/2$ et 2 (de multiplicité 2). Ainsi, la forme générale de la solution est donnée par

$$A \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right)^n + B \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)^n + (Cn + D)2^n.$$

Avec les conditions initiales $x_0 = 1$ et $x_1 = 3$, les premiers termes de la suite sont donnés par

$$1, 3, 12, 53, 237, 1050, 4603, 20025, 86700, 374321, 1613553, \dots$$

Connaissant x_0, \dots, x_3 , on dispose d'un système de 4 équations à 4 inconnues permettant de déterminer A, B, C, D :

$$A = \frac{91 + 23\sqrt{13}}{234}, \quad B = \frac{91 - 23\sqrt{13}}{234}, \quad C = -\frac{1}{3}, \quad D = \frac{2}{9}$$

3. Matrice compagnon

Nous avons vu dans la section précédente que pour obtenir une forme close pour une suite linéaire récurrente, il "suffit" de rechercher les racines du polynôme caractéristique χ de la récurrence. Nous présentons ici deux autres techniques.

Définition III.3.1. A l'équation (8), on associe la *matrice compagnon* de la récurrence définie par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de (8), alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+k} \\ x_{n+k-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et en particulier, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+k-1} \\ x_{n+k-2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}^n \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si la matrice compagnon \mathcal{M} est diagonalisable (ou à défaut, on exploitera alors la forme de Jordan), on peut une nouvelle fois trouver une formule close.

Exemple III.3.2. Poursuivons l'exemple introductif. Pour la suite satisfaisant la relation $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, la matrice compagnon est donnée par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisons la matrice compagnon. En posant $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, il vient

$$S = \begin{pmatrix} \Phi' & \Phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1}\mathcal{M}S = \begin{pmatrix} \Phi' & 0 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^n &= S \begin{pmatrix} \Phi'^n & 0 \\ 0 & \Phi^n \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi' & \Phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'^n & 0 \\ 0 & \Phi^n \end{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} -1 & \Phi \\ 1 & -\Phi' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \Phi^{n+1} - \Phi'^{n+1} & \Phi^n - \Phi'^n \\ \Phi^n - \Phi'^n & \Phi \Phi'^n - \Phi' \Phi^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De là, on obtient, pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = x_1 \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^n - \Phi'^n) + x_0 \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi \Phi'^n - \Phi' \Phi^n)$$

et en particulier, pour la suite de Fibonacci, si les conditions initiales sont $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (2\Phi^n - 2\Phi'^n + \Phi \Phi'^n - \Phi' \Phi^n) = \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{5} (2 - \Phi')}_{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}} \Phi^n + \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi - 2)}_{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}} \Phi'^n.$$

En particulier, on en déduit le comportement asymptotique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{\Phi^n} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{10}.$$

4. Séries formelles

On introduit l'anneau $\mathbb{C}[[z]]$ des séries formelles sur \mathbb{C} comme suit. Une *série formelle* à coefficients dans \mathbb{C} est simplement une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ que l'on notera symboliquement

$$s_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On dit que z est l'*indéterminée* de la série. On ignorera le plus souvent les questions de convergence.

Une *série formelle* est un moyen commode de disposer les éléments d'une suite. On la présente parfois comme "une corde à linge" sur laquelle on dispose les éléments de la suite d'intérêt. Le véritable gain par rapport aux méthodes précédentes réside alors dans les manipulations effectuées.

On définit la *somme* de deux séries formelles par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Autrement dit, aux séries formelles associées aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on fait correspondre la série formelle de la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit comme seconde opération, le *produit de Cauchy* (certains auteurs parlent parfois du *produit de convolution*) de deux séries formelles par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n.$$

Cette opération étend naturellement l'opération de produit de deux polynômes de $\mathbb{C}[z]$.

Exemple III.4.1. Imaginons que la série formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

encode le nombre de chemins de longueur n de a vers b dans le graphe de la figure III.2. On remarque qu'elle encode aussi les chemins de longueur n de a' vers b' dans ce même graphe (nous avons deux composantes f. connexes identiques). Dès lors, le nombre de chemins de longueur n de a vers b' sera

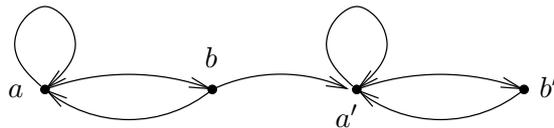


FIGURE III.2. Compter les chemins de longueur n de a vers b' .

donné par

$$z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \right).$$

En effet, les chemins de longueurs n de a vers b' se décomposent en un chemin de longueur i de a à b , d'un chemin de longueur 1 de b à a' (d'où la multiplication par z) et enfin, d'un chemin de longueur $n - i - 1$ de a' à b' . C'est exactement ce que traduit le produit de convolution.

Définition III.4.2. Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. La fonction (ou série) génératrice (ordinaire) de \mathbf{a} est la série formelle

$$s_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Rappelons une fois encore, que les fonctions génératrices sont des objets algébriques pouvant être manipulés comme tels, sans trop se préoccuper d'une hypothétique convergence².

Remarque III.4.3. Une fraction rationnelle (i.e., le quotient de deux polynômes) est considérée comme une expression compacte pour une fonction génératrice. Etant donné la fraction rationnelle P/Q , $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, une manière d'obtenir le développement en série correspondant est d'effectuer la (longue³) division euclidienne de P par Q . On peut remarquer que si Q est le polynôme réciproque d'une suite linéaire récurrente, une telle division est toujours possible. En effet, le coefficient du terme indépendant vaut 1.

Exemple III.4.4. Soit la fraction rationnelle propre $\frac{1}{1-z}$. Si on effectue l'algorithme de la longue division, on obtient

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - z \\ \hline -(1 & -z) & 1 - z \\ \hline & z & 1 + z + z^2 + \dots \\ & -(z & -z^2) & \\ \hline & & z^2 & \\ & & -(z^2 & -z^3) & \\ \hline & & & z^3 & \\ & & & \dots & \end{array}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

est la fonction génératrice de la suite constante $\mathbf{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple III.4.5. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{z + z^2}{1 - 3z + 3z^2 - z^3}.$$

²En fait, les notions de convergence peuvent s'avérer utiles lorsqu'on désire, par exemple, estimer le comportement asymptotique d'une suite. Le plus souvent, elles convergent dans un disque centré en 0 de rayon convenable et y définissent donc une fonction au sens habituel.

³Contrairement à la division euclidienne classique, on commence avec les termes de plus petit degré.

On a

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 z \quad +z^2 \\
 -(z \quad -3z^2 \quad +3z^3 \quad -z^4) \\
 \hline
 4z^2 \quad -3z^3 \quad +z^4 \\
 -(4z^2 \quad -12z^3 \quad +12z^4 \quad -4z^5) \\
 \hline
 9z^3 \quad -11z^4 \quad +4z^5 \\
 -(9z^3 \quad -27z^4 \quad +27z^5 \quad -9z^6) \\
 \hline
 16z^4 \quad -23z^5 \quad 9z^6 \\
 \vdots
 \end{array} & \left| \begin{array}{l}
 1 - 3z + 3z^2 - z^3 \\
 \hline
 z + 4z^2 + 9z^3 + \dots
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

On s'apercevra qu'il s'agit en fait de la fonction génératrice $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$. Autrement dit, la fraction rationnelle contient toute l'information de la suite encodée.

En plus de la somme et du produit (de Cauchy), on dispose d'autres opérations dans $\mathbb{C}[[z]]$ pour manipuler les séries formelles. Bien sûr, on peut tout d'abord considérer des combinaisons linéaires de séries formelles. Si $s_{\mathbf{a}}(z)$ et $s_{\mathbf{b}}(z)$ sont deux séries de $\mathbb{C}[[z]]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors on considère

$$\alpha s_{\mathbf{a}}(z) + \beta s_{\mathbf{b}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n.$$

La multiplication de la série génératrice de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par z^m permet d'obtenir la série génératrice de la suite translaturée

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ fois}}, a_0, a_1, a_2, \dots,$$

$$z^m s_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m} = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} z^n.$$

Pour passer de la série génératrice de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à la série translaturée de k termes vers la droite $(a_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de considérer la série formelle

$$\frac{s_{\mathbf{a}}(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n.$$

Si, dans $s_{\mathbf{a}}(z)$, on remplace l'indéterminée z par cz , on obtient la série génératrice de la suite $(c^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$s_{\mathbf{a}}(cz) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n a_n z^n.$$

On peut introduire une *dérivée formelle* définie par

$$D \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Insistons encore sur le fait qu'on ne donne aucun sens analytique à cet opérateur et il n'y a donc aucun problème, ni aucune objection à lever, pour "dériver" une série. Ainsi, $Ds_{\mathbf{a}}(z)$ est la série génératrice de la suite

$((n+1)a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. En combinant dérivation formelle et multiplication par z , il vient

$$zD s_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n.$$

Par analogie avec l'opérateur de dérivation formelle, on introduit également un opérateur d'intégration formelle,

$$\int_0^z s_{\mathbf{a}}(t) dt = a_0 z + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \frac{1}{3} a_2 z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n.$$

Notez que le terme constant est nul.

Proposition III.4.6. Si $s_{\mathbf{a}}(z)$ est la série génératrice de $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\frac{1}{1-z} s_{\mathbf{a}}(z)$$

est la série génératrice de la suite $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de \mathbf{a} .

Proposition III.4.7. La série formelle

$$\frac{s_{\mathbf{a}}(z) + s_{\mathbf{a}}(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

$$\text{resp. } \frac{s_{\mathbf{a}}(z) - s_{\mathbf{a}}(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$$

est la série génératrice de la suite $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$ des termes d'indice pair de \mathbf{a} (resp. de la suite $(0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots)$ des termes d'indice impair de \mathbf{a}).

Exemple III.4.8. Appliquons les constructions précédentes pour prouver que

$$\frac{z + z^2}{1 - 3z + 3z^2 - z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n.$$

On sait que

$$1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Ainsi, en appliquant zD aux deux membres, on trouve

$$z/(1-z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Puis, une seconde application de zD aux deux membres donne

$$(z + z^2)/(1-z)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

Comme nous le verrons, cela signifie que la suite $(n^2)_{n \geq 0}$ des carrés satisfait la relation de récurrence

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n.$$

Nous avons introduit les séries formelles dans le but principal de résoudre des équations de récurrence linéaires. On procède alors par “*identification des coefficients*”. On recherche tout d’abord, par un procédé purement mécanique, une forme close (sous forme d’une fraction rationnelle) pour la série génératrice de la suite et ensuite, on développe cette fraction en série de puissances. Etant en présence de deux expressions représentant la même série, il suffit alors de remarquer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

si et seulement si $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$. Nous décrivons la marche à suivre sur un exemple.

Soit la suite de Fibonacci satisfaisant la relation

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \\ x_0 = 1, x_1 = 1. \end{cases}$$

(Nous avons choisi ces conditions initiales particulières pour simplifier un rien les calculs.) Soit s la série génératrice de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n.$$

Étape 1. Par de simples manipulations algébriques faisant bien évidemment intervenir l’équation de récurrence, on peut exprimer s sous forme d’une fraction rationnelle. Il vient

$$\begin{aligned} s(z) &= x_0 + x_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} z^{n+2} \\ &= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} + x_n) z^{n+2} \\ &= 1 + z + z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \\ &= 1 + z + z [s(z) - x_0] + z^2 s(z). \end{aligned}$$

De là, on en tire que

$$s(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

En fait, on peut sans grande difficulté obtenir le résultat général suivant.

Théorème III.4.9. *La suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente satisfaisant l’équation (8) si et seulement si la série génératrice $s_{\mathbf{x}}(z)$ est une fraction rationnelle ayant pour dénominateur le polynôme réciproque⁴ $1 - a_{k-1}z - \dots - a_0 z^k$. De plus, le numérateur de la fraction dépend uniquement des conditions initiales x_0, \dots, x_{k-1} .*

⁴En anglais, l’inverse d’un nombre se dit “reciprocal”. Par contre, l’inverse d’une fonction se traduit par “inverse”.

Remarque III.4.10. Si le polynôme caractéristique de la relation

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0$$

ne s'annule pas en zéro (autrement dit, si $a_0 \neq 0$, ce que nous supposons ici) et possède $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ comme zéros de multiplicité respective m_1, \dots, m_r , alors le polynôme réciproque $1 - a_{k-1}X - \dots - a_0X^k = X^k \chi(\frac{1}{X})$ possède évidemment les inverses $1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_r$ des zéros de $\chi(X)$ comme zéros avec les mêmes multiplicité m_1, \dots, m_r .

Etape 2. La deuxième partie de la méthode consiste à développer la fraction rationnelle en série de puissances. Si on décompose $\frac{1}{1-z-z^2}$ en fractions simples, on obtient

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{\sqrt{5}}{5(z+\Phi)} - \frac{\sqrt{5}}{5(z+\Phi')}$$

où on emploie les mêmes notations qu'à l'exemple III.3.2. Le résultat suivant est alors fort utile.

Proposition III.4.11. *On a*

$$\frac{1}{(1-\rho z)^{t+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+t}^t \rho^n z^n.$$

On remarquera que C_{n+t}^t est un polynôme en n de degré t .

Démonstration. Nous savons que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

En dérivant t fois cette relation, on obtient

$$D^t \frac{1}{1-z} = t! \frac{1}{(1-z)^{t+1}} = \sum_{n=t}^{\infty} n(n-1) \dots (n-t+1) z^{n-t}.$$

De là,

$$\frac{1}{(1-z)^{t+1}} = \frac{1}{t!} \sum_{n=t}^{\infty} \frac{n!}{(n-t)!} z^{n-t} = \frac{1}{t!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+t)!}{n!} z^n.$$

D'où la conclusion, en remplaçant l'indéterminée z par ρz . ■

Nous pouvons utiliser ce résultat pour obtenir le développement recherché. Il vient⁵

$$\frac{1}{z+\Phi} = \frac{1}{\Phi(1+\frac{1}{\Phi}z)} = \frac{-\Phi'}{1-\Phi'z} = -\Phi' \sum_{n=0}^{\infty} \Phi'^n z^n$$

⁵Puisque Φ et Φ' sont les racines de $X^2 - X - 1$, on a $\Phi^2 = \Phi + 1$ et donc $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. De plus, il est clair que $\Phi - 1 = -\Phi'$ et donc $-\Phi' = 1/\Phi$.

de même que

$$\frac{1}{z + \Phi'} = - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1} z^n.$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} s(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1} z^n + \frac{\sqrt{5}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi'^{n+1} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^{n+1} - \Phi'^{n+1}) z^n \end{aligned}$$

et par identification des coefficients, pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^{n+1} - \Phi'^{n+1}).$$

Exemple III.4.12. On peut aussi traiter des équations non homogènes avec les séries génératrices. Reprenons l'équation

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = n 2^n$$

de l'exemple III.2.8 (avec les conditions initiales 1 et 3).

$$\begin{aligned} s(z) &= x_0 + x_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+2} z^{n+2} \\ &= 1 + 3z + \sum_{n=0}^{\infty} (5x_{n+1} - 3x_n + n 2^n) z^{n+2} \\ &= 1 + 3z + 5z \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{n+1} - 3z^2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n z^{n+2} \\ &= 1 + 3z + 5z [s(z) - x_0] - 3z^2 s(z) + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n 2^n z^n. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition III.4.11, on remarque que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n 2^n z^n = \frac{2z}{(1-2z)^2}.$$

De là,

$$(1 - 5z + 3z^2) s(z) = 1 - 2z + \frac{2z^3}{(1-2z)^2}$$

et

$$s(z) = \frac{1-2z}{1-5z+3z^2} + \frac{2z^3}{(1-5z+3z^2)(1-2z)^2}.$$

Pour obtenir le même résultat que précédemment, il suffit alors de décomposer ces fractions en fractions simples (suivre l'étape 2 décrite ci-dessus). Nous n'allons pas effectuer ici ces développements. En guise de vérification, dans *Mathematica*,

```
>> Series[(1-2 z)/(1-5 z+3 z^2)
+ (2 z^3)/((1-5 z+3 z^2)(1-2 z^2)), {z, 0, 8}]
```

on trouve

$$1 + 3z + 12z^2 + 53z^3 + 229z^4 + 990z^5 + 4263z^6 + 18353z^7 + 78976z^8 + O(z^9).$$

5. Equations aux différences

Une *équation aux différences* est l'analogue "discret" d'une équation différentielle. Ces équations apparaissent naturellement lorsque l'on *discrétise* une équation différentielle pour en chercher numériquement une solution. Il s'agit d'une généralisation des équations de récurrence présentées aux sections précédentes. La forme générale d'une telle équation d'ordre k est

$$(13) \quad x_{n+k} = F(x_{n+k-1}, \dots, x_n, n)$$

où F est une fonction donnée (à valeurs dans \mathbb{C}). Une *solution* est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant (13) pour tout $n \geq 0$. Tout comme pour les suites linéaires récurrentes, les conditions initiales déterminent entièrement la solution.

Théorème III.5.1. *Pour des conditions initiales x_0, \dots, x_{k-1} données, l'équation (13) possède une unique solution.*

Une équation aux différences est dite *linéaire* si il existe des fonctions G_1, \dots, G_k, H telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$F(x_{n+k-1}, \dots, x_n, n) = G_1(n)x_{n+k-1} + \dots + G_k(n)x_n + H(n).$$

Si G_1, \dots, G_k sont des constantes, on retrouve exactement le cadre des équations de récurrence linéaires (à coefficients constants) présenté dans les sections précédentes.

Pour une équation aux différences linéaire, le lecteur ne sera pas surpris que les solutions s'expriment à partir d'une solution particulière à laquelle on ajoute la solution générale de l'équation homogène associée. Comme pour les équations différentielles, on pourra par exemple en rechercher une solution particulière en ayant recours à la méthode de variation des constantes.

6. Annexe

Soit P un polynôme de degré d . Soient x_0, \dots, x_d des complexes deux à deux distincts. Nous allons montrer que $P(x + x_0), \dots, P(x + x_d)$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d .

On sait que cet espace est de dimension $d+1$, il suffit dès lors de prouver que ces $d+1$ polynômes sont linéairement indépendants. La formule de Taylor donne

$$P(x + x_i) = \sum_{k=0}^d \frac{(D^k P)(x_i)}{k!} x^k.$$

Puisque l'on connaît à présent les composantes de ces polynômes dans la base canonique $1, x, \dots, x^d$, l'indépendance linéaire se traduit par la non-annulation du déterminant suivant

$$(14) \quad \frac{1}{d!(d-1)!\dots 2!} \det \begin{pmatrix} (D^d P)(x_0) & (D^{d-1}P)(x_0) & \dots & P(x_0) \\ (D^d P)(x_1) & (D^{d-1}P)(x_1) & \dots & P(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (D^d P)(x_d) & (D^{d-1}P)(x_d) & \dots & P(x_d) \end{pmatrix}$$

Nous allons prouver le résultat (un peu plus général) suivant qui s'applique en particulier à (14).

Proposition III.6.1. *Soient P_0, \dots, P_d des polynômes où $\deg P_i = i$ et où le coefficient dominant de P_i est noté a_i . Soient x_0, \dots, x_d des complexes deux à deux distincts. On a*

$$\det \begin{pmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \dots & P_d(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \dots & P_d(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(x_d) & P_1(x_d) & \dots & P_d(x_d) \end{pmatrix} = a_0 a_1 \dots a_d \prod_{0 \leq i < j \leq d} (x_j - x_i).$$

Démonstration. Remarquons que $P_0(x_0) = \dots = P_0(x_d) = a_0$ (il s'agit simplement d'une même constante). On va procéder comme pour le déterminant de Vandermonde. Si on remplace la ligne i par, elle-même moins la première ligne, pour $i = 2, \dots, d+1$, en appliquant la règle des mineurs, on se ramène à

$$a_0 \det \begin{pmatrix} P_1(x_1) - P_1(x_0) & \dots & P_d(x_1) - P_d(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_d) - P_1(x_0) & \dots & P_d(x_d) - P_d(x_0) \end{pmatrix}.$$

Pour $j \geq 1$, si on note $P_j(x) = a_j x^j + \sum_{r=0}^{j-1} c_{j,r} x^r$, alors

$$P_j(x) - P_j(x_0) = a_j(x^j - x_0^j) + \sum_{r=1}^{j-1} c_{j,r}(x^r - x_0^r)$$

les termes constants se simplifient. On peut dès lors mettre en évidence $(x - x_0)$ en se rappelant que, pour $r \geq 1$,

$$x^r - x_0^r = (x - x_0) \sum_{i=0}^{r-1} x^i x_0^{r-i-1}.$$

Ainsi, $P_j(x) - P_j(x_0)$ peut se mettre sous la forme $(x - x_0)Q_{j-1}(x)$ où Q_{j-1} est un polynôme de degré $j - 1$ dont le coefficient dominant est égal à celui de P_j . En effet,

$$Q_{j-1}(x) = a_j \sum_{i=0}^{j-1} x^i x_0^{j-i-1} + \sum_{r=1}^{j-1} c_{j,r} \sum_{i=0}^{r-1} x^i x_0^{r-i-1}.$$

en permutant les sommes, on réécrit

$$Q_{j-1}(x) = a_j x^{j-1} + \sum_{i=0}^{j-2} \left(x_0^{j-i-1} + \sum_{r=i+1}^{j-1} c_{j,r} x_0^{r-i-1} \right) x^i.$$

Ainsi, le déterminant de départ est égal à

$$a_0 \prod_{i=1}^d (x_i - x_0) \det \begin{pmatrix} Q_0(x_1) & Q_1(x_1) & \cdots & Q_{d-1}(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ Q_0(x_d) & Q_1(x_d) & \cdots & Q_{d-1}(x_d) \end{pmatrix}$$

et on remarque qu'on s'est ramené à une matrice de dimension $d \times d$ et on peut procéder par récurrence pour conclure. On a une matrice ayant une structure analogue à celle de départ et on connaît explicitement les coefficients dominants des polynômes y apparaissant. On fera jouer à x_1 le rôle joué précédemment par x_0 et ainsi de suite. ■

En corollaire, le déterminant (14) est bien différent de zéro car il vaut

$$\frac{(d!)^{d+1} a^{d+1}}{(d!(d-1)! \cdots 2!)^2}$$

où a est le coefficient dominant du polynôme considéré.

Bibliographie

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press Ltd. (1982).
- [2] P. Cull, M. Flahive, R. Robson, *Difference Equations, From Rabbit to Chaos*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (2005).
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, 3rd Edition, Graduate Text in Math. **173**, Springer, (2005).
- [4] R. L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison–Wesley (1994).
- [5] C. Meyer, A. Langville, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, (2006).
- [6] M. Rigo, *Advanced Graph Theory and Combinatorics*, ISTE–Wiley (2016).
- [7] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (2011).
- [8] H. Wilf, *generatingfunctionology*, A K Peters (2006).

Index

- $A(G)$ (matrice d'adjacence), 37
- K_n (graphe complet), 7
- $K_{m,n}$ (graphe biparti complet), 8
- $\mathbb{C}[[z]]$ (anneau séries formelles), 64
- $\alpha(G)$ (sommets indépendants), 14
- $\chi(G)$ (nombre chromatique), 33
- \leftrightarrow (sommets f. connectés), 11
- $\mathcal{F}(G_0)$ (fermeture), 26
- $\nu(v)$ (ens. des voisins), 7
- $\omega(v)$ (arcs adjacents), 4
- $\omega^+(v)$ (arcs sortants), 4
- $\omega^-(v)$ (arcs entrants), 4
- \sim (sommets connectés), 10
- $d^+(v)$ (demi-degré sortant), 4
- $d^-(v)$ (demi-degré entrant), 4
- $x^{[n]}$ (puissance divisée), 53
- $\text{diam}(G)$ (diamètre), 11
- $d(a, b)$ (distance), 11
- $\text{pred}(v)$ (prédécesseur), 4
- $\text{pred}^*(v)$, 13
- $\text{succ}(v)$ (successeur), 4
- $\text{succ}^*(v)$, 12
- adjacent
 - arc, 3
 - sommet, 7
- algèbre d'adjacence, 41
- algorithme
 - arbre couvrant, 17
 - Dijkstra, 19
 - test connexité, 10
- ancêtre, 15
- arête
 - adjacente, 7
 - incidente, 7
 - subdivision, 31
- arbre, 14
 - orienté, 39
 - parcours, 16
 - pointé, 15
 - orienté, 39
 - racine, 15
- arc, 3
 - adjacent, 3
 - destination, 3
 - entrant, 4
 - extrémité, 3
 - incident, 4
 - origine, 3
 - sortant, 4
- arrangement, 52
- Berge (théorème), 55
- binôme de Newton, 52
- Bondy–Chvátal (théorème), 26
- Bott–Mayberry (théorème), 40
- boucle, 3
- cardinal, 3
- chemin, 8
 - élémentaire, 9
 - eulérien, 20
 - hamiltonien, 22
 - simple, 9
- circuit, 9
 - eulérien, 20
 - hamiltonien, 22
- clique, 28
- coefficient
 - binomial, 52
 - multinomial, 54
- coloriage, 33
- composante
 - connexe, 10
 - fortement connexe, 11
 - simplement connexe, 11
- condensé, 42
- cycle, 9
- dérivée (formelle), 66
- degré, 4, 7

- demi-degré
 - entrant, 4
 - sortant, 4
- descendant, 15
- destination, 3
- diamètre, 11
- digraphe, 6
- Dijkstra (algorithme), 19
- Dirac (théorème), 24
- distance, 11

- Euler (formule), 31
- exponentielle-polynôme, 60
- extrémité, 3

- face, 29
 - adjacente, 29
 - infinie, 29
- fermeture, 26
- fil, 15
- fonction
 - génératrice, 65
- forêt, 14
- frontière, 29

- graphe, 3
 - biparti, 7
 - biparti complet, 8
 - clique, 28
 - complet, 7
 - connexe, 10
 - des composantes, 42
 - diamètre, 11
 - dirigé, 3, 6
 - eulérien, 20
 - fermeture, 26
 - fini, 3
 - fortement connexe, 11
 - hamiltonien, 22
 - isomorphe, 6
 - non dirigé, 6
 - non orienté, 6
 - orienté, 3
 - parcours en profondeur, 17
 - Petersen, 24
 - planaire, 28
 - planaire topologique, 28
 - régulier, 7
 - simple, 5
 - simplement connexe, 11
 - sous-graphe, 13
 - couvrant, 14
 - induit, 14
 - propre, 13
- handshaking formula, 4, 7
- Hankel (matrice), 57
- Hoffman (théorème), 42
- homéomorphisme, 31

- incident
 - arête, 7
 - arc, 4
- intégration (formelle), 67
- isomorphisme, 6, 37

- Kuratowski (théorème), 32

- matrice
 - adjacence, 37
 - compagnon, 62
 - demi-degré entrant, 39
 - irréductible, 44
 - période, 44
 - primitive, 44
- multi-ensemble, 5
- multi-graphe, 5
- multinomial (coefficient), 54

- Newton (binôme de), 52
- nombre chromatique, 33

- Ore (théorème), 25
- origine, 3

- période, 44
- parcours
 - en largeur, 16
 - en profondeur, 16, 17
 - infixe, 16
 - préfixe, 16
 - suffixe, 16
- Pascal (triangle de), 52
- Perron (théorème), 44
- Petersen (graphe), 24
- piste, 9
- polynôme
 - caractéristique, 57
 - chromatique, 34
 - réciroque, 57
- prédécesseur, 4
- produit de convolution, 64
- puissance divisée, 53

- racine, 15

- série
 - formelle, 64

- génératrice, 65
- sommet, 3
 - adjacent, 4, 7
 - connecté, 10
 - distance, 11
 - fortement connecté, 11
 - indépendant, 14
 - voisin, 4, 7
- sous-graphe, 13
 - couvrant, 14
 - induit, 14
 - propre, 13
- squelette, 29
- Steinitz (théorème), 29
- subdivision, 31
- successeur, 4
- suite
 - linéaire récurrente
 - homogène, 55
 - non homogène, 60
- théorème
 - Berge, 55
 - Bondy–Chvátal, 26
 - Bott–Mayberry, 40
 - Dirac, 24
 - Hoffman, 42
 - Kuratowski, 32
 - multinomial, 54
 - Ore, 25
 - Perron, 44
 - Steinitz, 29
- tri topologique, 42
- triangle, 38
- triangle de Pascal, 52