Matrices (introduction)

Michel Rigo

Premiers bacheliers en sciences mathématiques

October 7, 2009

UNIVERSITÉ de Liège

champ $\mathbb{K}$ fixé une fois pour toutes

matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'élément de la matrice A se trouvant à la i-ième ligne et à la j-ième colonne : a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ ou simplement } A = (a_{ij}).$$

L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}_n^m$

Soit $A \in \mathbb{K}_n^m$, m est la hauteur de A et n sa largeur.
La matrice A est

- horizontale si $m < n$,
- verticale si $m > n$,
- carrée si $m = n$,
- rectangulaire si $m \neq n$.

$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de forme $m \times n$ sont égales si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemple

La matrice horizontale A de $\mathbb{Q}_3^2$ définie par
$a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3/4$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -1$ et $a_{23} = 5$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemple

La matrice verticale B de $\mathbb{R}_2^3$ définie par $a_{ij} = i - j$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE (MATRICE DE HILBERT)

$\mathfrak{H} = (h_{ij})$ de $\mathbb{R}_n^n$ définie par

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Si $n = 4$, alors

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée

Diagonale principale $a_{i,i}$ – diagonale secondaire $a_{i,n-i+1}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & \boxed{*} \\ * & \boxed{*} & \boxed{*} & * \\ * & \boxed{*} & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & * & \boxed{*} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * & \boxed{*} \\ * & \boxed{*} & * & \boxed{*} & * \\ * & * & \boxed{*} & * & * \\ * & \boxed{*} & * & \boxed{*} & * \\ \boxed{*} & * & * & * & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

On dit que A est diagonale si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$.

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

La matrice A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(resp. triangulaire inférieure)

Exemple

Considérons la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^n_n$ définie par

$$a_{ij} = i\,\delta_{ij}.$$

C'est une matrice diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n).$$

La matrice nulle $m \times n$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls. On la note $0_{m,n}$ ou même 0 si m et n sont sous-entendus.

La matrice identité de dimension n est la matrice diagonale

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Une matrice $m \times 1$ est appelée vecteur colonne. L'ensemble de ces vecteurs se note $\mathbb{K}^m$.

De même, une matrice $1 \times n$ est appelée vecteur ligne. L'ensemble de ces vecteurs se note $\mathbb{K}_n$.

OPERATIONS SUR LES MATRICES

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathbb{K}_n^m$. $\mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \to \mathbb{K}_n^m$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et si $A \in \mathbb{K}_n^m$, alors

$$1A = A,$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

EXEMPLE

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & 3\pi & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soient $A, B \in \mathbb{K}_n^m$. $+ : \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \to \mathbb{K}_n^m$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}.$$

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A, B, C \in \mathbb{K}_n^m$, alors

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = 0 + A = A.$$

$(\mathbb{K}_n^m, +)$ est un groupe commutatif.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et si $A, B, C \in \mathbb{K}_n^m$, alors

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$\mathbb{K}_n^m$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soient $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}_n^m$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Une expression de la forme

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_i A_i = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r$$

est appelée une combinaison linéaire des matrices $A_1, \ldots, A_r$. Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les coefficients de cette combinaison.

Le produit de deux matrices A et B n'est défini que si
le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Soient $A \in \mathbb{K}_n^m$ et $B \in \mathbb{K}_\ell^n$.

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le \ell}}.$$

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

I) Si λ est un scalaire et si $A \in \mathbb{K}_n^m$, $B \in \mathbb{K}_\ell^n$, alors

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

II) Le produit matriciel est bilinéaire, i.e., si A, B et C sont des matrices et λ, μ des scalaires, alors

$$(\lambda A + \mu B).C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A.(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

où l'on suppose que les produits matriciels ont un sens.

III) Le produit matriciel est associatif : $\forall A \in \mathbb{K}_q^m$, $B \in \mathbb{K}_p^q$, $C \in \mathbb{K}_n^p$

$$A(BC) = (AB)C.$$

IV) Si $A \in \mathbb{K}_n^m$, alors

$$0_{\ell,m}A = 0, \quad A0_{n,\ell} = 0 \quad \text{et} \quad I_m A = A, \quad AI_n = A.$$

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{q} A_{i\ell} B_{\ell k} \right) C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} A_{i\ell} B_{\ell k} C_{kj}.
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{q} A_{i\ell} (BC)_{\ell j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{q} A_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} B_{\ell k} C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} A_{i\ell} B_{\ell k} C_{kj}.
\end{aligned}
$$

On conclut en permutant les sommes.

$AI_n = A$:
$(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$. Dès lors,

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}.$$

Remarque

Vérifier que le produit de deux matrices carrées de même dimension et diagonales (resp. triangulaires supérieures, triangulaires inférieures) est encore une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, triangulaire inférieure).

Remarque

Le produit de matrices carrées n'est en général pas commutatif

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deux matrices carrées A et B commutent si $AB = BA$

Puisque le produit matriciel est associatif, on peut définir la puissance n-ième d'une matrice carrée A de dimension k, $n > 0$, par

$$A^n = \underbrace{A \dots A}_{n \text{ fois}}.$$

Si $n = 0$, on pose $A^0 = I_k$.

Si les matrices A et B sont carrées de même dimension et commutent alors,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k A^k B^{n-k}.$$

Par contre, si A et B ne commutent pas

$$\begin{aligned}(A+B)^n &= A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + ABA^{n-2} + BA^{n-1} \\ &\quad + A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n.\end{aligned}$$

Par exemple, si A et B ne commutent pas, alors

$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + BA^2 + B^2A + BAB + AB^2 + B^3$$

et

$$\begin{aligned}(A+B)^4 &= A^4 + A^3B + A^2BA + ABA^2 + BA^3 + A^2B^2 \\ &\quad + ABAB + BA^2B + AB^2A + BABA + B^2A^2 + \cdots\end{aligned}$$

- Toute matrice carrée A commute avec 0 et I. En effet, $A0 = 0A = 0$ et $AI = IA = A$.
- Les puissances d'une même matrice carrée A commutent. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Il vient

$$A^p A^q = A^q A^p.$$

Par conséquent, si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_s$ sont des scalaires et si A et une matrice carrée, alor

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_r A^r \quad \text{et} \quad \mu_0 I + \mu_1 A + \cdots + \mu_s A^s$$

commutent.
- Deux matrices diagonales (de même dimension) commutent et

$$\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\,\text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_r\mu_r).$$

- Il existe des matrices A, B telles que $BA = -AB$ (dans ce cas, on dit que les matrices sont *anticommutatives*). Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}^2 = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

La transposée de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}_n^m$ est la matrice $\widetilde{A} \in \mathbb{K}_m^n$ dont les lignes sont les colonnes de A,

$$(\widetilde{A})_{ij} = a_{ji}.$$

$$\tilde{\tilde{A}} = A,$$

$$(\lambda A + \mu B)\widetilde{\ } = \lambda \widetilde{A} + \mu \widetilde{B},$$

$$(AB)\widetilde{\ } = \widetilde{B}\widetilde{A}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée telle que $\widetilde{A} = A$, alors on dit que A est symétrique. En d'autres termes, A est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j.

Si $\widetilde{A} = -A$, alors A est dite antisymétrique. Dans ce cas, $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous i, j.

OPÉRATIONS SPÉCIFIQUES AUX MATRICES COMPLEXES

On peut associer à la matrice complexe $A = (a_{ij})$, les matrices suivantes

- la partie réelle de A : $(\mathfrak{Re}\, A)_{ij} = \mathfrak{Re}\, a_{ij}$,
- la partie imaginaire de A : $(\mathfrak{Im}\, A)_{ij} = \mathfrak{Im}\, a_{ij}$,
- la matrice conjuguée de A : $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$,
- la matrice adjointe de A :

$$A^* = \tilde{\overline{A}} = \overline{\tilde{A}},$$

autrement dit, $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1-i \\ 0 & \pi & 3+2i \end{pmatrix},$$

on a

$$\mathfrak{Re}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \pi & 3 \end{pmatrix},\ \mathfrak{Im}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1+i \\ 0 & \pi & 3-2i \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 2 & \pi \\ 1+i & 3-2i \end{pmatrix}.$$

$$A = \mathfrak{Re}\, A + i\, \mathfrak{Im}\, A \qquad \overline{A} = \mathfrak{Re}\, A - i\, \mathfrak{Im}\, A$$

$$\mathfrak{Re}\, A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}) \qquad \mathfrak{Im}\, A = \frac{1}{2i}(A - \overline{A})$$

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad (A^*)^* = A$$

$$\overline{\lambda A + \mu B} = \overline{\lambda}\, \overline{A} + \overline{\mu}\, \overline{B} \qquad (\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$$

Une matrice carrée A est hermitienne si $A^* = A$.

Elle est antihermitienne si $A^* = -A$.

Si A est hermitienne (resp. antihermitienne), alors ses éléments diagonaux sont réels (resp. imaginaires purs).

Considérons les entiers $i_1, \ldots, i_r$ et $j_1, \ldots, j_s$ tels que

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m,$$

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n.$$

$$A_{(i_1,\ldots,i_r;j_1,\ldots,j_s)} = (a_{i_k j_\ell})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq \ell \leq s}}.$$

On dit que cette matrice est une sous-matrice de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

On a par exemple,

$$A_{(1,2;1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{(1;1,2,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{(1,2,3;3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

on appelle sous-matrice diagonale de A, une sous-matrice de A pour laquelle on a sélectionné des lignes et des colonnes de même indice dans A.

$$A_{(i_1,\dots,i_k;i_1,\dots,i_k)}.$$

les éléments de la diagonale principale de $A_{(i_1,\dots,i_k;i_1,\dots,i_k)}$ sont des éléments de la diagonale principale de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Si $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{K}_n$ (resp. $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^m$) sont les lignes (resp. colonnes) de $A \in \mathbb{K}_n^m$ alors

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices A_{ij}, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, où A_{ij} est une matrice $m_i \times n_j$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r, \\ 1 \leq j \leq s}}$$

Les matrices A_{ij} sont les *matrices partielles* de la matrice composée.

Exemple

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

La matrice composée $(C_1\ C_2\ C_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}.$$

La matrice composée $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ est la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$$

Soient $A_1, \ldots, A_r$ des matrices carrées de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_r$. On peut construire la matrice composée diagonale

$$\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} = (A_i \delta_{ij})_{1 \le i,j \le r}.$$

Cette matrice est une matrice carrée de dimension $\sum_{j=1}^{r} n_j$.

Exemple

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

La matrice composée diagonale $\mathrm{diag}(A_1, A_2)$ est la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array}\right).$$

Les opérations sur les matrices composées peuvent s'exprimer en termes de leurs matrices partielles

Si A et B sont des matrices composées

$$A = (A_{ij})_{\substack{1 \le i \le r, \\ 1 \le j \le s}}, \quad B = (B_{ij})_{\substack{1 \le i \le t, \\ 1 \le j \le u}}$$

telles que $r = t$, $s = u$ et pour tous i, j, A_{ij} et B_{ij} ont même forme, alors

$$\lambda A + \mu B = (\lambda A_{ij} + \mu B_{ij})_{\substack{1 \le i \le r, \\ 1 \le j \le s}}.$$

Le produit de deux matrices composées peut s'effectuer lignes de matrices partielles par colonnes de matrices partielles à condition que la division des lignes de la première soit identique à la division des colonnes de la seconde.
Si

$$A = (A_{ij})_{\substack{1 \le i \le r, \\ 1 \le j \le s}}, \quad B = (B_{ij})_{\substack{1 \le i \le t, \\ 1 \le j \le u}}$$

sont telles que $s = t$ et que les produits $A_{ik}B_{kj}$ ont un sens, alors

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj} \right)_{\substack{1 \le i \le r, \\ 1 \le j \le u}}.$$

On dit parfois qu'on effectue le produit "grosse ligne par grosse colonne".

Exemple

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier où $L_1, \ldots, L_m$ sont les lignes de $A \in \mathbb{K}_n^m$ et $C_1, \ldots, C_r$ les colonnes de $B \in \mathbb{K}_r^n$, alors

$$AB = (L_i C_j)_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le r}}.$$

Enfin, si

$$A = (A_{ij})_{\substack{1 \le i \le r, \\ 1 \le j \le s}}, \quad \text{alors } \widetilde{A} = (\widetilde{A_{ji}})_{\substack{1 \le i \le s, \\ 1 \le j \le r}}.$$