Interrogation du 25 septembre 2009

- Mettre sous forme trigonométrique les nombres $-2+2i$ et $3-4i$.
- Esquisser les graphiques des fonctions arcsin et arcos.
- Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|u+v| + |u-v| \geq |u| + |v|.$$
A quelle(s) condition(s) a-t-on l'égalité ?
- Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|.$$
Suggestion : on peut utiliser le point précédent.

Interrogation du 2 octobre 2009

- Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Que vaut la somme des n racines n-ièmes de z ? Justifiez votre réponse.
- Soient a, b deux nombres complexes distincts de module 1 et $z \in \mathbb{C}$.On pose
$$u = \frac{z + ab\,\overline{z} - a - b}{a-b}.$$
Montrez que $u^2 \in \mathbb{R}$ (*suggestion* : montrez que u est imaginaire pur).
- Pour rappel, tout nombre complexe non nul possède un unique argument dans $[0, 2\pi[$. On considère sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ les relations suivantes : pour tous $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $wRz \Leftrightarrow |w| = |z|$ et wSz si et seulement si w et z ont même argument. Vérifiez que R et S sont des relations d'équivalence. Si $\mathbb{C}$ est identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$, donnez la description géométrique d'une classe d'équivalence pour chacune des deux relations R et S.
- **Bonus** (n'est comptabilisé qu'en cas de bonne réponse). Si $\mathbb{C}$ est identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$, esquissez l'ensemble suivant
$$\{\frac{1}{r} e^{ir} \mid r \in [\pi, +\infty[\}.$$

Interrogation du 16 octobre 2009

a) Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation
$$(a,b)\, R\, (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$
S'agit-il d'une relation d'équivalence ? Si oui, identifiez les éléments du quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R$ (autrement dit, caractérisez les éléments d'une classe d'équivalence).

b) Sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la relation
$$f\, R\, g \Leftrightarrow (\exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x)).$$
S'agit-il d'une relation d'équivalence ? Esquissez le graphique d'une fonction non nulle en relation avec la fonction nulle $0 : x \mapsto 0$.

c) Une relation sur un ensemble X transitive et symétrique est-elle toujours réflexive ? (Preuve ou contre-exemple.)

d) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$ un entier. Montrer que
$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}.$$

Interrogation du 30 octobre 2009

a) Soit la permutation

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 4 & 3 & 12 & 10 & 8 & 11 & 7 & 6 & 1 & 9 & 5 & 2 & 14 & 15 & 16 & 13 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la signature de μ ? Justifier votre résultat.

b) Démontrer que pour $n > 1$, $\mathcal{S}_n$ contient le même nombre de permutations paires et impaires.

b) Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que pour tout élément g de G, l'application

$$\pi_g : G \to G,\ a \mapsto g \cdot a$$

est une permutation de G.

Interrogation du 6 novembre 2009

a) Enoncer les deux lois des mineurs (y compris la formulation matricielle).

b) Soit $D : \mathbb{K}_n^n \to \mathbb{K}$ une application multilinéaire et alternée (sur les colonnes). Démontrer que D est anti-symétrique. Justifier votre réponse.

c) Vérifier que pour tout $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n\,\lambda & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \\ 0 & 1 & n\,\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(M - 6I)(M^2 - 3I) = 0$.

Interrogation du 20 novembre 2009

a) On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels, muni des opérations suivantes

$$\forall (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\geq 0} + (y_n)_{n\geq 0} = (x_n + y_n)_{n\geq 0}$$

$$\forall (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda (x_n)_{n\geq 0} = (\lambda x_n)_{n\geq 0}.$$

Fournir une partie génératrice de E. Montrer que

$$F = \{(x_n)_{n\geq 0} \mid \forall i \geq 0,\ x_{i+2} = x_{i+1} + x_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall i \geq 0,\ x_{i+2} = 3x_{i+1} + 2x_i.$$

On considère les matrices

$$M_n^{(k)} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+k-1} \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1} & x_{n+k} & \cdots & x_{n+2k-2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 3$, $\det M_n^{(k)} = 0$.

*) Question bonus : Montrer que F (donné au point a)) est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Interrogation du 27 novembre 2009

a) Définir la notion de système compatible.

b) Quand dit-on qu'un système est de Cramer ? Enoncer les formules de Cramer.

c) Discuter et résoudre le système suivant (m est un paramètre complexe)

$$\begin{cases} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2. \end{cases}$$

*) Question "Bonus" : Démontrer les formules de Cramer.

Interrogation du 4 décembre 2009

a) Quand dit-on que deux espaces vectoriels sont isomorphes ? Donner un exemple, en fournissant explicitement un isomorphisme, de deux espaces vectoriels distincts et isomorphes.

b) Enoncer et démontrer la "formule de changement de bases". Expliciter le problème et préciser la signification des notations utilisées. Les différents indices devront être clairement explicités.

c) Définir l'enveloppe linéaire d'un sous-ensemble A d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E. A quoi correspond cette enveloppe quand A est fini ?

Interrogation du 13 décembre 2009

Sauf mention explicite du contraire (avant-dernier point), on considère tout au long de l'exercice, l'ensemble $E = \mathbb{C}_2^2$ des matrices 2×2 à coefficients complexes comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Soient $\mathcal{A}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments est nulle et $\mathcal{B}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments diagonaux est nulle, i.e.,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b+c+d = 0 \right\} \text{ et } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+d = 0 \right\}.$$

(1) Montrez que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) En admettant que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? oui/non, justifiez.

(3) La somme de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est-elle directe ? oui/non, justifiez.

(4) Donnez une base de $\mathcal{A}$.

(5) Donnez une base de $\mathcal{A}$, si cet espace est, cette fois, considéré non pas comme un $\mathbb{C}$-vectoriel mais comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.

Bonus : Donnez un supplémentaire de $\mathcal{B}$ dans E. Quelle en est sa dimension ?

Interrogation du 8 février 2010

(1) Définir la notion d'anneau principal.

(2) Prouver que dans un anneau intègre, tout élément premier est irréductible.

(3) Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs munis des opérations usuelles d'addition et de multiplication est principal.

(4) **Question bonus**. On considère l'anneau $\mathbb{R}[X,Y]$ de polynômes à coefficients réels à deux variables X et Y. Soit l'idéal

$$I = \{P(X,Y).X + Q(X,Y).Y \mid P, Q \in \mathbb{R}[X,Y]\}.$$

Montrer que I est propre et que I n'est pas principal.

Interrogation du 1 mars 2010

(1) Soit la matrice
$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$, $x \mapsto Mx$, est un projecteur. Caractérisez son image et son noyau.

(2) Définir un système de projecteurs.

(3) Définir les notions de valeur propre, de multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre d'un endomorphisme T.

(4) Soient $E = F \oplus G$ un espace vectoriel de dimension finie, U une base de F, V une base de G. Démontrer que les vecteurs de $U \cup V$ forment une base de E.

Interrogation du 8 mars 2010

(1) Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) une base d'un espace vectoriel E et T un endomorphisme de E défini par $Te_i = e_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$ et $Te_4 = 0$. Pour tout $n \geq 0$, représenter T^n dans cette base.

(2) Soit P un polynôme à coefficients complexes. Démontrer que si λ est une valeur propre d'un endomorphisme T de E, alors
$$E_\lambda(T) \subseteq E_{P(\lambda)}(P(T)).$$
Préciser en particulier la signification des notations $E_\lambda(T)$ et $E_{P(\lambda)}(P(T))$.

(3) Soient E un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 10, U_1 et U_2, deux sous-espaces vectoriels de E tels que $U_1 \subset U_2$, $\dim U_1 = 3$, $\dim U_2 = 6$. Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des endomorphismes $T : E \to E$ tels que U_1 et U_2 sont des sous-espaces stables (i.e., $T(U_i) \subseteq U_i$, $i = 1, 2$). Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$ comme espace vectoriel réel ?

Interrogation du 15 mars 2010

(1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} \\ 0 & x^n & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$$

(2) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice suivante est-elle diagonalisable ?
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(3) Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E dont les polynômes caractéristique et minimum sont respectivement
$$\chi_T(\lambda) = (5-\lambda)^4(7-\lambda)^3$$
et
$$\mathcal{M}_T(\lambda) = (\lambda - 5)^2(\lambda - 7).$$
Quelles sont les réductions possibles de T à la forme de Jordan (à permutation près de blocs de Jordan) ?

Interrogation du 17 septembre 2010

- Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel λ le polynôme $x^2-\lambda x+4$ possède-t-il deux zéros (racines) réels distincts ?
- Soit la fonction $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ par
$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x.$$
Montrer que $f(0,y+1) = f(y,0)+1$ et pour tout $y > 0$,
$$f(x+1,y-1) = f(x,y)+1.$$
- Soit le nombre rationnel x dont le développement décimal illimité périodique de période 3 est donné par
$$x = 18,974\,974\,974\,974\cdots.$$
Exprimer x sous la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{N}$. (Suggestion : calculer $1000\,x$.)

Interrogation du 24 septembre 2010

- Mettre sous forme cartésienne, le nombre complexe $2\,e^{i2\pi/3}$.
- Mettre sous forme trigonométrique (en utilisant les fonctions arcsin et/ou arccos), les nombres $w = -2+3i$ et $z = 3-4i$
- Esquissez les graphiques des fonctions $\arcsin x$ et $\arccos x$.
- Représenter la région du plan complexe donnée par $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ Re(z) \geq 1/2, Im(z) < 0\}$
- Vrai-Faux (justifier). A-t-on $|u+v-t| \leq |u|+|v|+|t|$, pour tous $u, v, t \in \mathbb{C}$?

Interrogation du 1 octobre 2010

- Soient $n \geq 2$ un entier et z un nombre complexe. Démontrer que la somme des n racines n-ièmes de z est nulle.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k = n\,2^{n-1}.$$
- Démontrer que l'application
$$f : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}\setminus\{1\},\ z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$$
est une bijection entre $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Interrogation du 15 octobre 2010

- Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et A une partie de E. On considère la relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(E)$ où, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(E)$,
$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A.$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et caractériser la classe d'équivalence de A.
- Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?
"$x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$ car $\mathfrak{R}$ est symétrique,
or $(x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x\mathfrak{R}x$ car $\mathfrak{R}$ est transitive,
donc $\mathfrak{R}$ est réflexive."
- Soit la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{N}$ par
$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : y = p\, x^q.$$
Montrer que cette relation est réflexive, transitive mais qu'elle n'est pas symétrique. Montrer qu'elle est en fait *antisymétrique*, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $(x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y$.

Interrogation du 22 octobre 2010

- On définit sur $E = [0,1]$ l'opération $*$ par $x*y = x+y-xy$. Vérifier que $*$ est une opération interne et étudier ses propriétés éventuelles : commutativité, associativité, existence d'un neutre, détermination des éventuels éléments inversibles.
- Soit E un ensemble. Si $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ sont deux relations binaires sur E, on définit la relation $\mathfrak{R} * \mathfrak{S}$ par, pour tous $x, y \in E$,
$$x(\mathfrak{R} * \mathfrak{S})y \Leftrightarrow (\exists z,\ x\mathfrak{R}z \text{ et } z\mathfrak{S}y).$$
Montrer que $*$ est une opération associative, mais en général non commutative.
- Soit $m \geq 2$. Un élément $x \in \mathbb{Z}_m$ est un *cube* si il existe $y \in \mathbb{Z}_m$ tel que $x = y^3$.
  - Listez les cubes de $\mathbb{Z}_{13}$.
  - Montrez que dans $\mathbb{Z}_{13}$, $12! = -1$. (Suggestion : $\mathbb{Z}_{13}$ est un champ.)

Interrogation du 5 novembre 2010

- Décomposer la permutation suivante en un produit de cycles disjoints et en déduire sa signature
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 6 & 12 & 11 & 2 & 10 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$
Que vaut μ^2 et μ^{360} ? Justifier ce dernier calcul.
- Déterminer (par récurrence) pour tout $n \geq 1$ la forme générale de J^n où
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Que vaut en particulier $\#\{J^n \mid n \geq 1\}$?
- Soit $m \geq 1$ un entier. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_{2m}^{2i} = 2^{2m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{C}_{2m}^{2i+1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^{2i} = 2^{2m} = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_{2m+1}^{2i+1}.$$
Suggestion : $1+1=2$ et $1-1=0\dots$

- En décomposant la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
sous la forme $A = I + J$, calculer A^n, pour tout entier $n \geq 1$. On pourra utiliser les résultats obtenus aux deux points précédents.