

**Premiers bacheliers en sciences mathématiques**  
**Interrogation du 20 novembre 2017**

**Consignes :**

- Sur chaque feuille, indiquer vos nom et prénom.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la notation de l'interrogation. Énoncer les résultats que vous utilisez.

**1.** Énoncer et démontrer la proposition permettant le calcul du rang d'une matrice par la méthode des sous-matrices bordées.

**2.** Vrai-Faux. Justifier vos réponses (par un développement théorique ou un contre-exemple)

(a) Soit  $A \in \mathbb{R}_n^n$ . Si  $B$  est une matrice obtenue en permutant deux colonnes de  $A$ , alors

$$\det B = (-1)^n \det A.$$

(b) Soient  $A, B \in \mathbb{C}_n^n$  des matrices inversibles. La matrice  $A^{-1}BA$  est inversible.

(c) Soient  $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ . Le rang de  $AB$  est égal à celui de  $BA$ .

(d) Soit  $A \in \mathbb{R}_n^n$ . Si l'enveloppe linéaire des colonnes de  $A$  (i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de  $A$ ) est  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\det A \neq 0$ .

**3.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de  $\lambda \in \mathbb{C}$  la matrice  $A + \lambda I$  est-elle inversible ?

**4.** Calculer le rang de la matrice suivante en fonction du paramètre complexe  $a$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -4 & 2 & a \\ a & -1 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$