

Premiers bacheliers en sciences mathématiques
Interrogation du 30 novembre 2015

Consignes :

- Sur chaque feuille, indiquer vos nom et prénom.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la notation de l'interrogation. Énoncer les résultats que vous utilisez.

1. Énoncer et démontrer la formule donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

2. Vrai-Faux. Justifier vos réponses (par un développement théorique ou un contre-exemple)

- (a) Deux parties génératrices finies quelconques d'un \mathbb{K} -vectoriel de dimension finie, ont le même nombre d'éléments.
- (b) Soient E un \mathbb{C} -vectoriel et x_1, \dots, x_k des éléments de E linéairement indépendants. Si on considère E comme un \mathbb{R} -vectoriel, x_1, \dots, x_k sont encore linéairement indépendants.
- (c) Soient E un \mathbb{C} -vectoriel et x_1, \dots, x_k des éléments de E linéairement dépendants. Si on considère E comme un \mathbb{R} -vectoriel, x_1, \dots, x_k sont encore linéairement dépendants.

3. On considère le \mathbb{C} -vectoriel \mathbb{C}_2^2 . Soit l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} : a + b = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel. En donner une base. Soit

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quelle est l'intersection de F et G ? En déduire une base de $F + G$.

4. On considère le \mathbb{R} -vectoriel $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2.

(a) Montrer que les polynômes

$$p_1(x) = 2x^2 + 3x - 1, \quad p_2(x) = x^2 + x + 1, \quad p_3(x) = x^2 + 1$$

forment une base de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

(b) Décomposer le polynôme $q(x) = 9x^2 + 12x - 3$ dans la base (p_1, p_2, p_3) .

(c) Écrire la formule de changement de bases de la base (p_1, p_2, p_3) à la base canonique $(x^2, x, 1)$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

(d) Prouver que le polynôme $20x^2 + 26x + 2$ appartient à l'enveloppe linéaire $\langle p_1, p_2 \rangle$. Donner un exemple de polynôme n'appartenant pas à cette enveloppe (justifier votre réponse).

(e) Donner un supplémentaire de $\langle p_1, p_2 \rangle$ dans $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.