Premiers bacheliers en sciences mathématiques
Interrogation du 3 décembre 2014

1. Enoncer et démontrer le théorème de Steinitz.

2. Vrai-Faux. Justifier vos réponses (par un développement théorique ou un contre-exemple)

- Deux parties génératrices finies quelconques d'un $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension finie, ont le même nombre d'éléments.
- Le $\mathbb{R}$-vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 et le $\mathbb{R}$-vectoriel des matrices symétriques de $\mathbb{R}_2^2$ sont isomorphes.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont en somme directe :

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle \text{ et } \rangle \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \langle$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre complexe α la matrice suivante est-elle inversible ? Lorsque la matrice n'est pas inversible, quel est son rang ?

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 2i-\alpha & 2 \\ 1 & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Soit $x = (x_1 \cdots x_n)$ un vecteur ligne de $\mathbb{R}_n$ dont la somme des composantes est égale à 1. Soit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathbb{R}_n^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = 1.$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, la somme des composantes du vecteur ligne xS^k est égale à 1.