“Partiel blanc” 1/12/2007

1ers bacheliers en sciences mathématiques et physiques

Le but de ces quelques questions est de présenter des exercices qui “auraient pu” être donnés à la prochaine interrogation dispensatoire de janvier. Ces exercices n'ont aucune valeur prédictive sur ce que pourront, ou ne pourront pas, être les exercices de la véritable interrogation dispensatoire. Pour avoir un réel effet bénéfique, le mieux est d'essayer de faire ces exercices en situation “réelle” (seul, sans référence, à cahiers fermés, ...).

1BM uniquement : Sauf mention explicite du contraire (point (g) uniquement), on considère tout au long de l'exercice, l'ensemble $E = \mathbb{C}_2^2$ des matrices 2×2 à coefficients complexes comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Soient $\mathcal{A}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments est nulle et $\mathcal{B}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments diagonaux est nulle, i.e.,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b+c+d = 0 \right\} \text{ et } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+d = 0 \right\}.$$

(a) Montrez que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Montrez que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? oui/non, justifiez.
(d) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? oui/non, justifiez.
Une justification “courte” est-elle possible ?
référence à un résultat théorique admise.
(e) La somme de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est-elle directe ? oui/non, justifiez.
(f) Donnez une base de $\mathcal{A}$.
(g) Donnez une base de $\mathcal{A}$, si cet espace est, cette fois, considéré non pas comme un $\mathbb{C}$-vectoriel mais comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.
(h) Donnez un supplémentaire de $\mathcal{B}$ dans E. Quelle en est sa dimension ?
(i) Toute matrice de $\mathcal{A}$ est-elle inversible ? oui/non, justifiez.

1BP+1BM : Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ une matrice carrée de dimension n. On définit une matrice carrée B de dimension n telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$, sa j-ième colonne est la somme des colonnes de A d'indices différents de j. Par exemple, pour $n = 3$, on a

$$B = \begin{pmatrix} C_2 + C_3 & C_1 + C_3 & C_1 + C_2 \end{pmatrix}.$$

Comparez $\det A$ et $\det B$ pour les valeurs $n = 3$ et $n = 4$.

1BM uniquement : On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relation $\mathcal{R}$ par

$$(a, b)\, \mathcal{R}\, (a', b') \text{ si et seulement si } a + b' = a' + b.$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Caractérisez l'ensemble quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.

$\longrightarrow$

1BP uniquement : Dans un espace affin de dimension 3 muni d'un repère, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1, 2, 0)$, $(3, -1, 1)$ et $(2, 2, 0)$ ainsi que le vecteur u de composantes $(-1, 1, 2)$.

(a) Donnez des équations cartésiennes de la droite AC.

(b) Donnez des équations cartésiennes de la droite $B+\rangle u\langle$.

(c) Quelles sont les positions relatives des deux droites obtenues aux points précédents ? (sécantes, parallèles, gauches).

(d) Donnez l'équation cartésienne d'un plan passant par A et B et parallèle à u.

(e) Donnez, si possible, des équations cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites AC et $B+\rangle u\langle$ et passant par le point de coordonnées $(4, 4, 0)$. Si la construction n'est pas possible, justifiez.

(f) Donnez, si possible, des équations cartésiennes de la droite s'appuyant sur les droites AC et $B+\rangle u\langle$ et passant par le point de coordonnées $(6, 4, -1)$. Si la construction n'est pas possible, justifiez.

1BP+1BM : On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur le paramètre complexe α, ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Justifier toutes vos réponses.