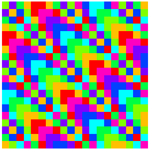
Théorie des graphes (6)

Michel Rigo

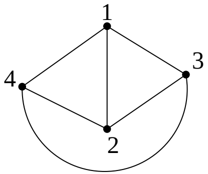
http://www.discmath.ulg.ac.be/

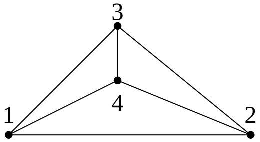
Année 2015–2016

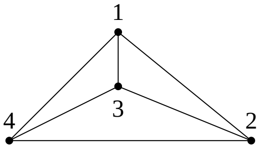


Graphes planaires

On considère l'ensemble quotient des représentations homéomorphes (au sens topologique du terme).
Un graphe peut avoir plusieurs *représentations* :

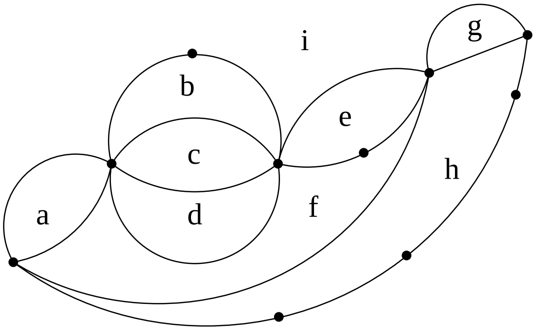






Graphes planaires

Face, frontière, faces adjacentes, face infinie. . .



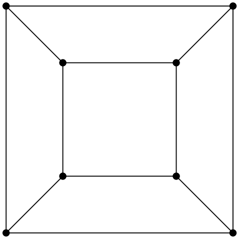
Mathématiquement bien défini : courbe de Jordan $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ détermine deux composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Graphes planaires

Lien avec la 'géométrie' et l'étude des polyèdres

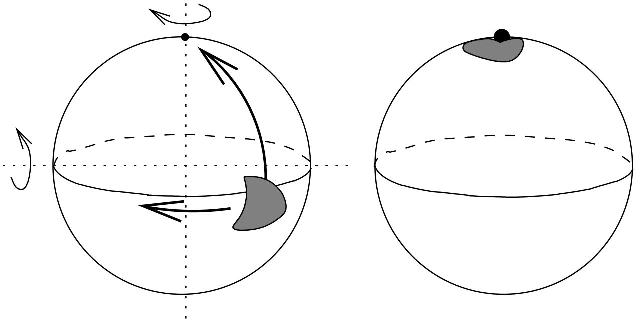
Remarque : théorème de Steinitz

Un graphe est le squelette d'un polyèdre convexe (borné) de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est un graphe planaire au moins 3-connexe (i.e., ne pouvant pas être disconnecté en retirant moins de trois sommets, $\kappa(G) \geq 3$)



Graphes planaires

projection stéréographique



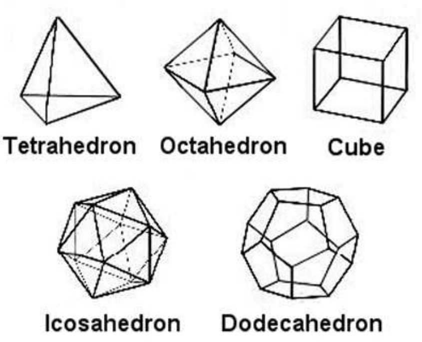
On peut *choisir* quelle face sera la face infinie.

Graphes planaires

Théorème d'Euler

Dans un multi-graphe planaire connexe (fini) possédant s sommets, a arêtes et f faces, on a

$$\boxed{s - a + f = 2.}$$



Récurrence sur f.

Si $f = 1$, le graphe possède uniquement une face infinie.
Le graphe connexe ne possède aucun cycle, c'est un arbre.
Ainsi, $s = a + 1$, formule OK.

OK pour $< f$, OK ? pour $f \geq 2$?.
Soit e une arête d'un cycle.
e appartient à la frontière de deux faces A et B.
Si on supprime e, on obtient un graphe ayant

- $a - 1$ arêtes,
- le même nombre s de sommets,
- $f - 1$ faces.

Par hypothèse de récurrence, on a $s - (a - 1) + f - 1 = 2$,
ce qui suffit.

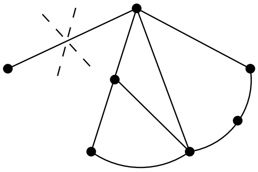
Graphes planaires

Corollaire

Dans un graphe $G = (V, E)$ **simple** et planaire,
il existe un sommet x tel que $\deg(x) \leq 5$.

Quitte à considérer séparément chaque composante connexe de G, on suppose G connexe.

Eliminer les arêtes ne délimitant pas de face (celles-ci ont une extrémité de degré $1 \rightarrow$ résultat trivial).



G est simple, la frontière de toute face contient ≥ 3 arêtes.

En passant en revue les faces (en les compant),

- on compte à chaque fois au moins 3 arêtes
- chaque arête est comptée deux fois
  car elle apparaît dans la frontière de deux faces.

Donc

$$\boxed{3\,f \leq 2\,a.}$$

Par l'absurde. Supposons que pour tout sommet x, $\deg(x) \geq 6$.
Dans ce cas, en passant en revue les sommets, on a

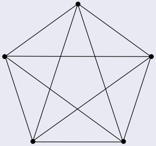
$$6\,s \leq 2\,a.$$

Si on applique la formule d'Euler,

$$2 = s - a + f \leq \frac{a}{3} - a + \frac{2\,a}{3} = 0!$$

Proposition

Le graphe K_5 n'est pas planaire.



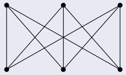
Dans un graphe simple et planaire, de la relation $3f \leq 2a$ démontrée dans la prop. préc. et de la formule d'Euler $(3a - 3f = 3s - 6)$, on tire que

$$a \leq 3s - 6.$$

Or, K_5 est un graphe simple qui possède 5 sommets et 10 arêtes et $10 \not\leq 3.5 - 6$. On en conclut que K_5 ne peut être planaire.

Proposition

Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Ici, graphe simple, planaire et biparti.
Chaque face a une frontière déterminée par au moins 4 arêtes.
On en tire que $4f \leq 2a$, i.e., $2f \leq a$. De la formule d'Euler, $2a - 2f = 2s - 4$, on en tire que

$$a \leq 2s - 4.$$

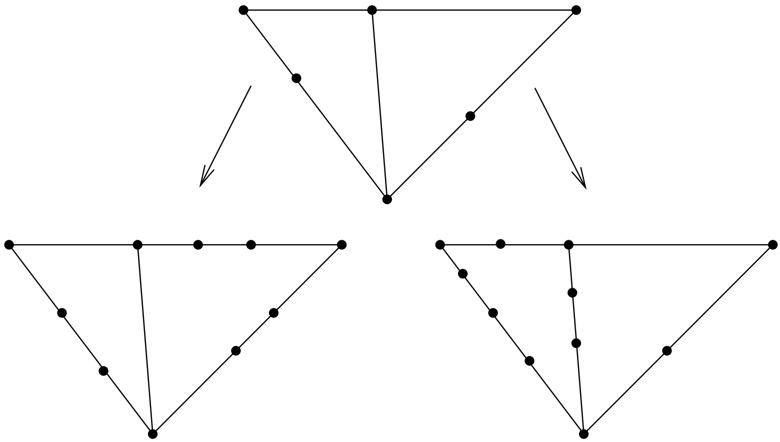
Or, $K_{3,3}$ est un graphe biparti simple qui possède 6 sommets et 9 arêtes. Il ne peut donc pas être planaire car $9 \not\leq 2.6 - 4$.

Théorème d'exclusion caractérisant une famille de graphes :

Théorème de Kuratowski

Un multi-graphe (non orienté) est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou à $K_{3,3}$.

Graphes homéomorphes



Rappel : Un graphe (non orienté) est k-colorable si

- on peut colorer ses sommets avec, au plus, k couleurs ;
- des sommets voisins ont des couleurs distinctes,

Remarque

Un graphe (non orienté) G est k-colorable, s'il existe un homomorphisme de G dans K_k.

Le nombre chromatique $\chi(G)$ de G est le plus petit k tel que G est k-colorable.

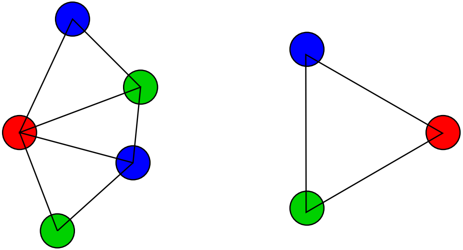
$\chi(G) = k$:

- il existe un homomorphisme de G dans K_k,
- il n'existe aucun homomorphisme de G dans K_{k-1}.

NB : le nombre chromatique est 'difficile' à calculer (NP-complet).

Lemme

Le nombre chromatique d'un graphe simple et non orienté G est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K_n.



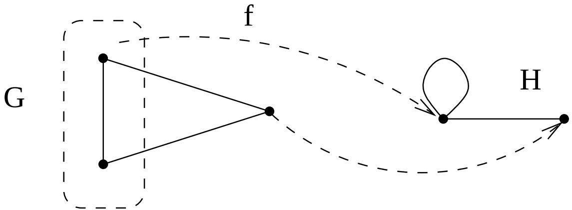
S'il existe un homomorphisme f de $G = (V, E)$ dans un graphe simple à n sommets $H = (V', E')$ (comme K_n), alors G est n-colorable ($\chi(G) \leq n$).

Pour tout $y \in V'$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in V : f(x) = y\}.$$

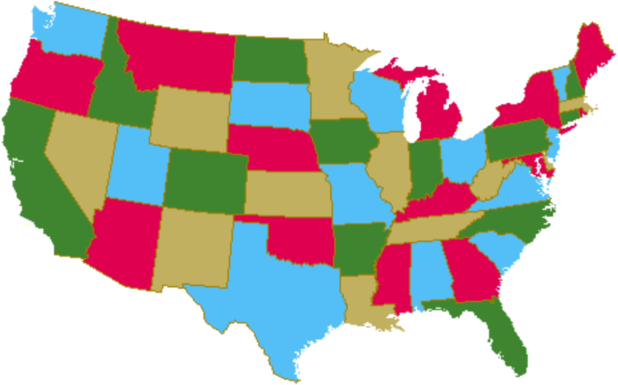
Puisque H est simple, $f^{-1}(V)$ est formé de sommets indépendants.

Si on avait un boucle, on pourrait avoir ceci :



Réciproquement, si G est n-colorable, alors l'application qui envoie les sommets de G d'une même couleur sur un sommet de K_n est un homomorphisme.

Théorème des 4 (ou 5) couleurs



Remarque

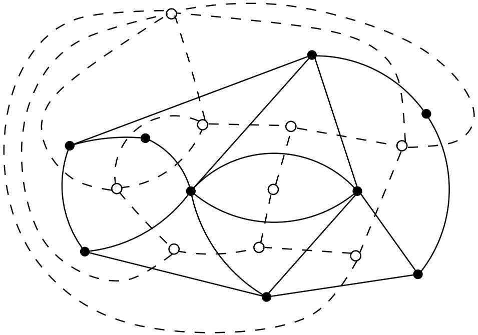
Tout problème de planarité ou de coloriage de graphes
sur la sphère revient à un problème analogue dans le plan.

Problème dual

Le problème de cartographie demande de colorier des faces adjacentes d'un graphe planaire avec des couleurs distinctes.

Nous nous sommes intéressés au coloriage des sommets d'un graphe.

Dual d'un graphe planaire

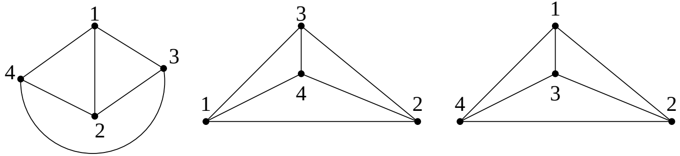


Thm. des 4 couleurs

Trace la plus ancienne du “problème des quatre couleurs” lettre de De Morgan à Hamilton, 23 octobre 1852 :

“*A student of mine (Francis Guthrie) asked me today to give him reason for a fact which I did not know was a fact and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored, so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but no more.*”

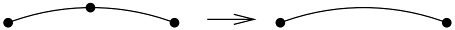
4 couleurs sont nécessaires



Théorème des 5 couleurs (preuve d'Ore)

Cinq couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

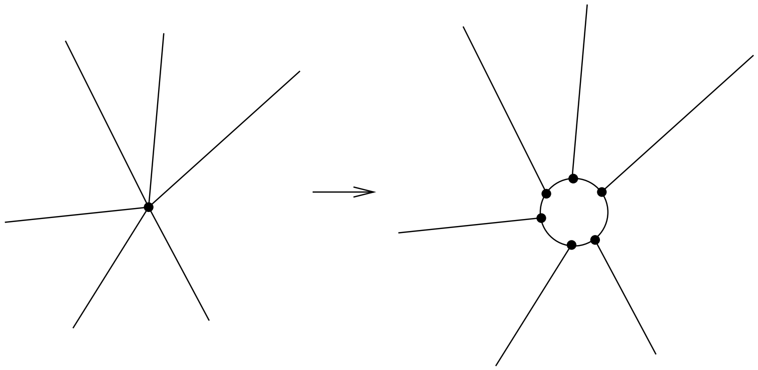
- On peut se restreindre à des multi-graphes **3-réguliers**
  - les sommets de degré 1 peuvent être éliminés,
    ils ne déterminent pas de face
  - les sommets de degré 2 peuvent être éliminés,

    le graphe résultant possède un coloriage valide si et seulement si le graphe de départ en possède un
  - les sommets de degré ≥ 4...

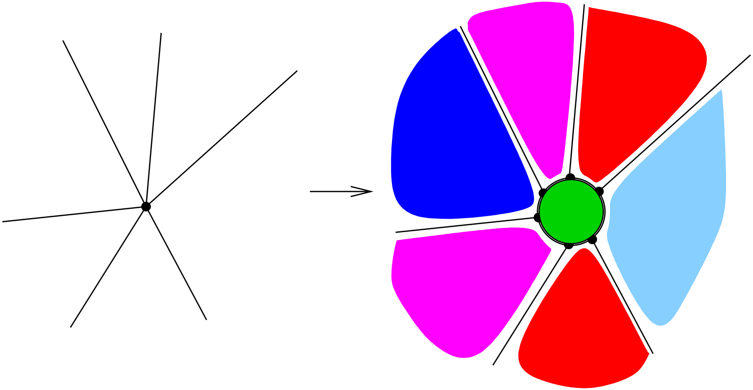
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



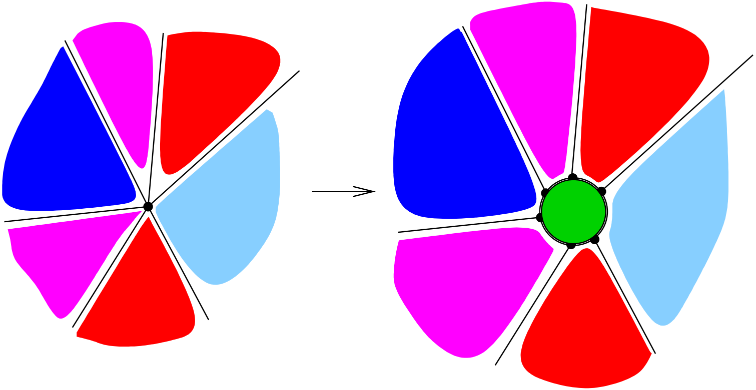
Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



Modifier le graphe pour ne plus avoir de sommets de degré ≥ 4.

Si le graphe résultant possède un coloriage valide,
alors le graphe de départ aussi.



A ce stade

Nous pouvons considérer avoir un graphe planaire 3-régulier G.

Si on peut colorier les graphes planaires 3-réguliers,
on pourra colorier n'importe quel graphe planaire.

φ_i : nombre de faces de G dont la frontière est déterminée par exactement i arêtes (ou par i sommets)

Le graphe 3-régulier, chaque sommet appartient à 3 faces.

Si pour chaque face, nous en comptons les sommets

$$3s = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \cdots .$$

Si pour chaque face, nous en comptons les arêtes

$$2a = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + \cdots .$$

Si on compter les faces

$$f = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots .$$

$12 = 6s - 6a + 6f$

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots .$$

Or $\varphi_i \geq 0$.

A ce stade

Tout multi-graphe planaire 3-régulier contient une face dont la frontière est délimitée par $2, 3, 4$ ou 5 arêtes.

BUT : réduction

Considérer, dans G, une face délimitée par $2, 3, 4$ ou 5 arêtes et en supprimer une arête.

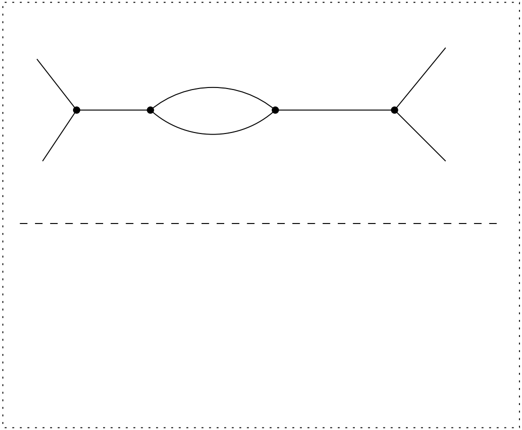
On obtient un graphe G' ayant **au moins une face de moins** que le graphe G de départ.

R.1 La construction préserve le caractère 3-régulier (on pourra donc l'appliquer itérativement).

R.2 Si G' peut être colorié avec au plus 5 couleurs, G aussi.

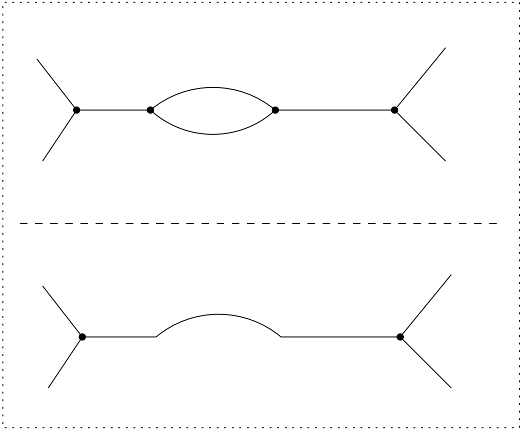
$\rightsquigarrow$ On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



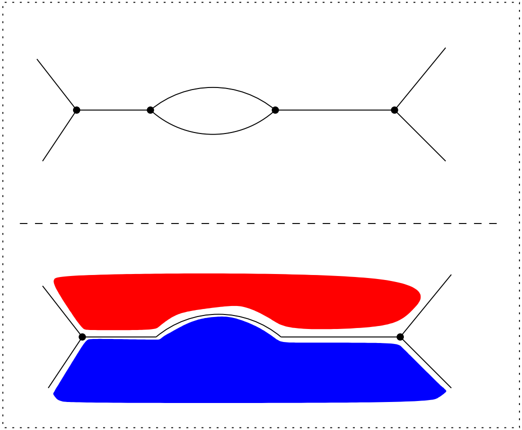
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



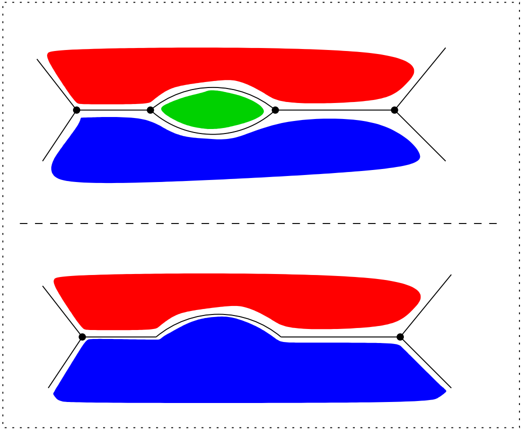
On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**

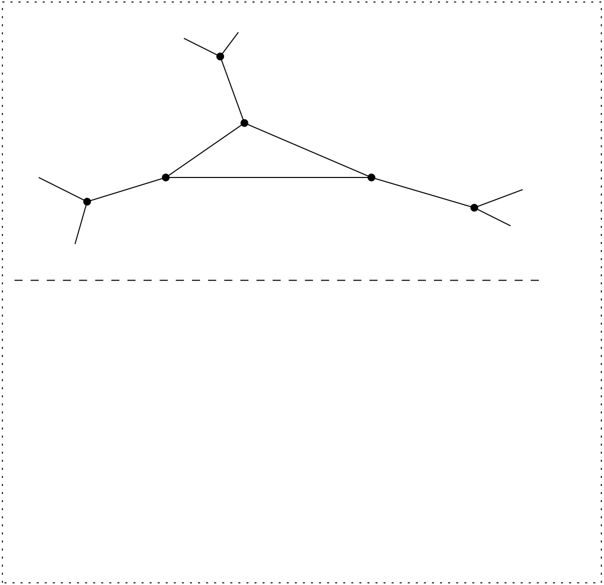


On obtiendra un graphe ayant au plus 5 faces qu'il est toujours possible de colorier ! La propriété **R.2** assure alors que le graphe de départ peut, lui aussi, être correctement colorié.

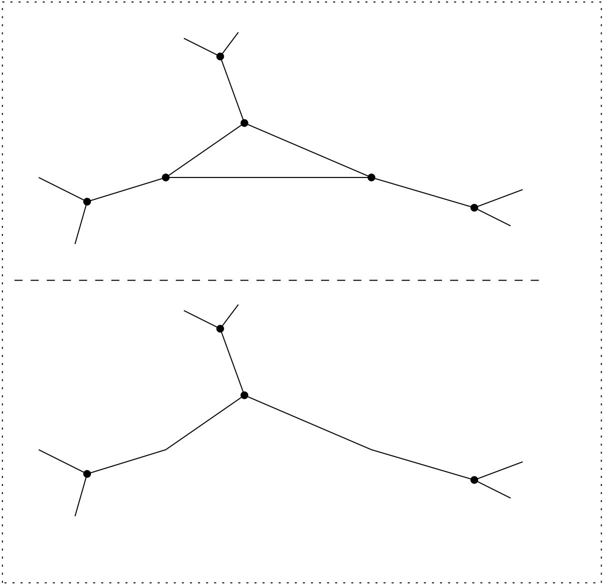
- **Réduction d'une face délimitée par deux arêtes**



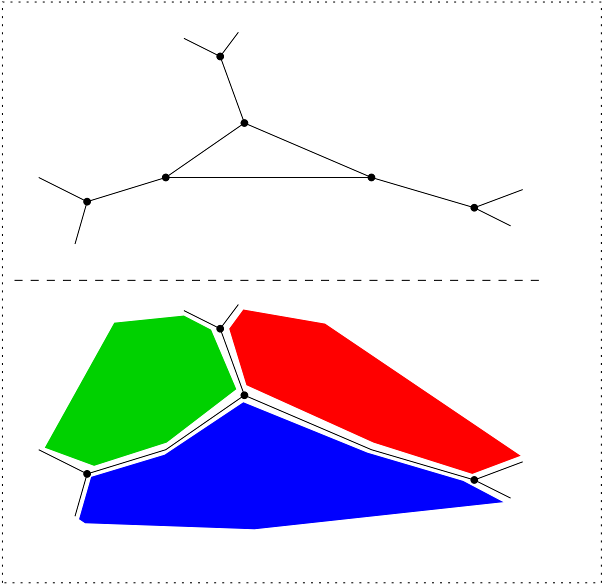
• **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



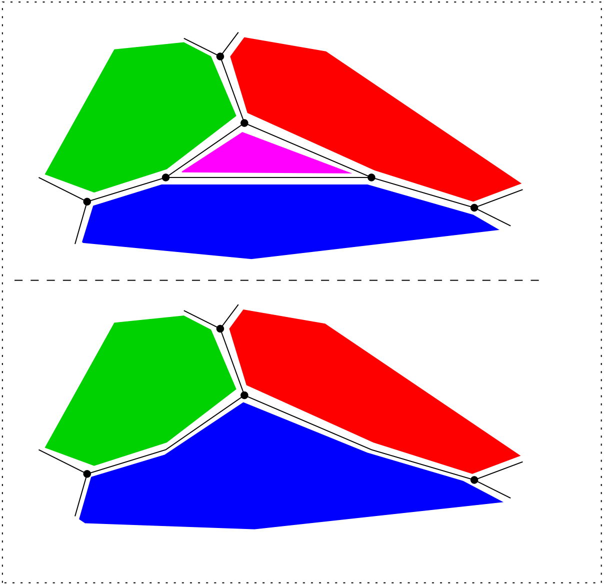
- **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



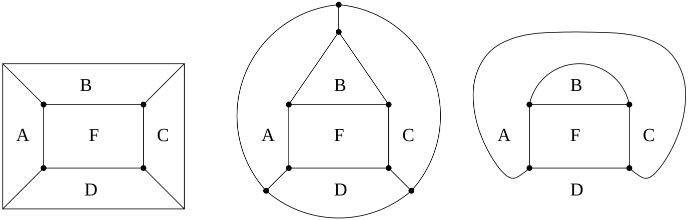
- **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



- **Réduction d'une face délimitée par trois arêtes**



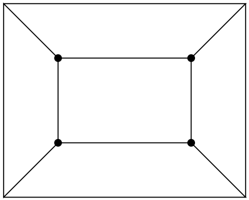
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



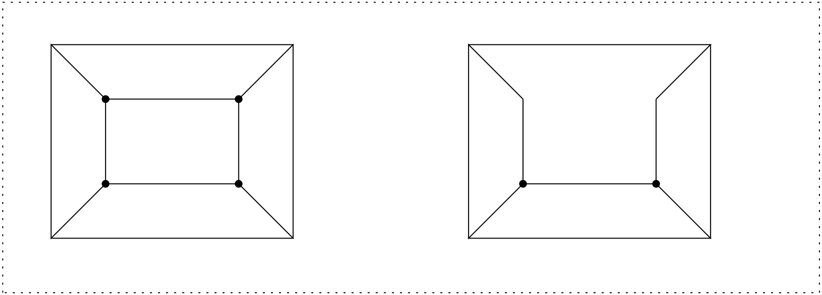
On peut supprimer certains sommets et arêtes pour obtenir les configurations de la figure

Il existe toujours deux faces opposées : B et D, adjacentes à une face carrée F t.q. B et D ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes

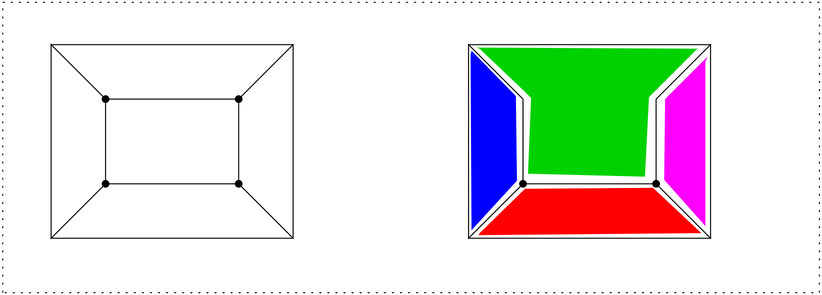
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



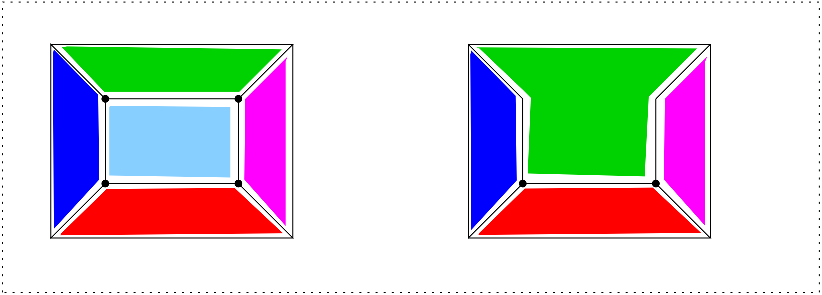
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



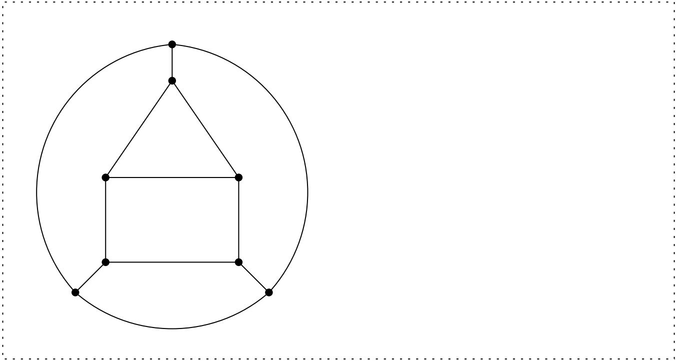
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



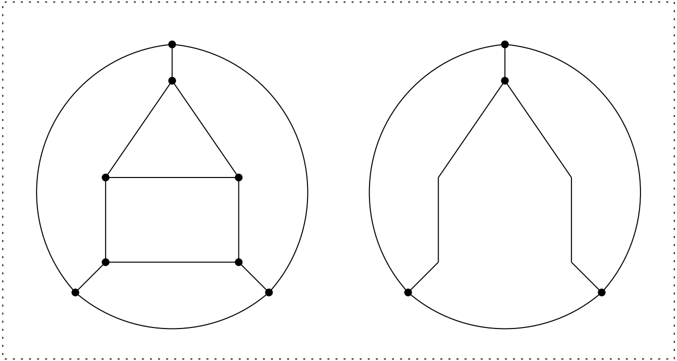
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



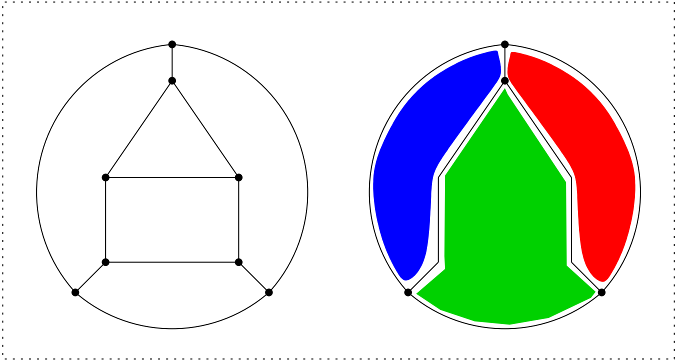
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



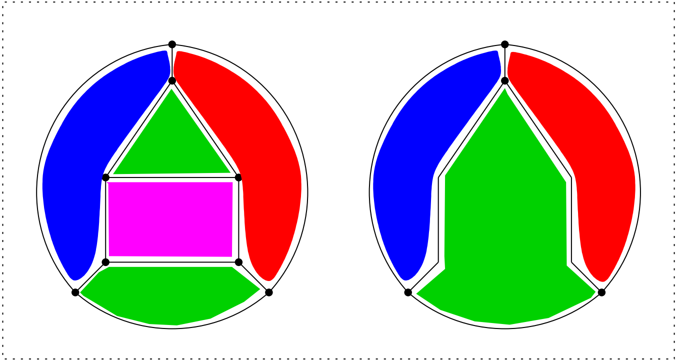
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



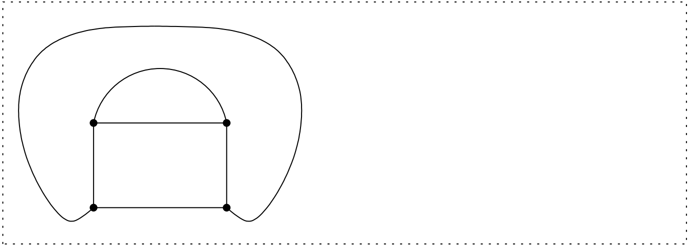
- **Réduction d’une face délimitée par quatre arêtes**



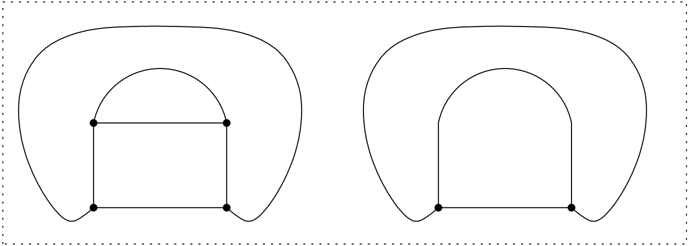
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



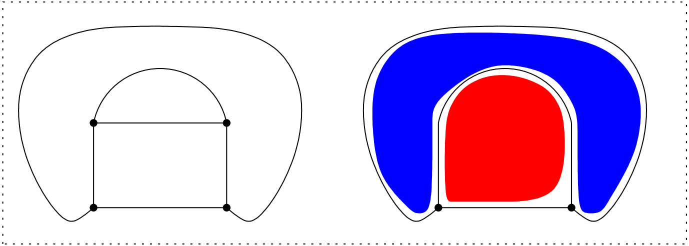
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



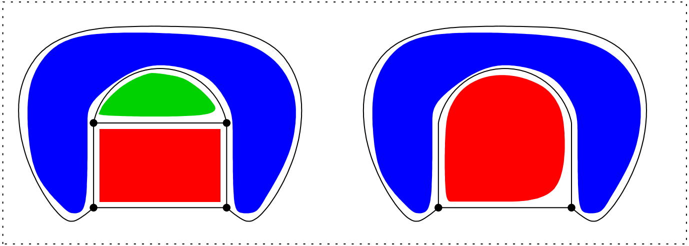
- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**

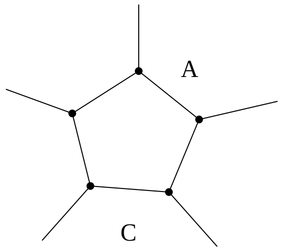


- **Réduction d'une face délimitée par quatre arêtes**



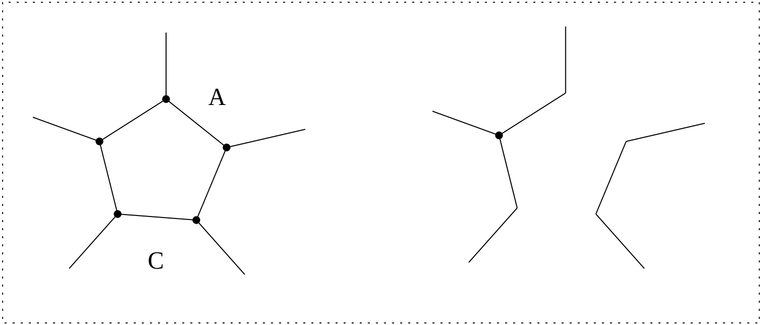
• **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



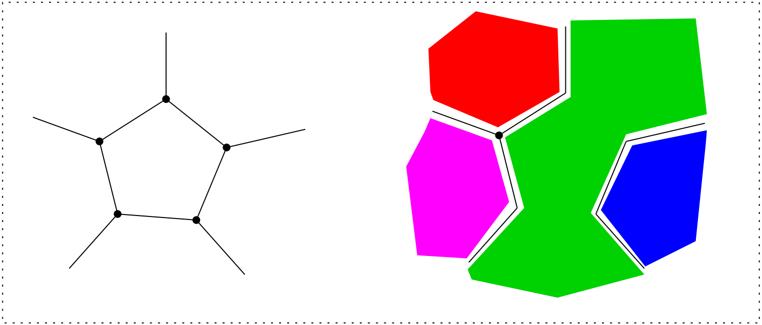
• Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



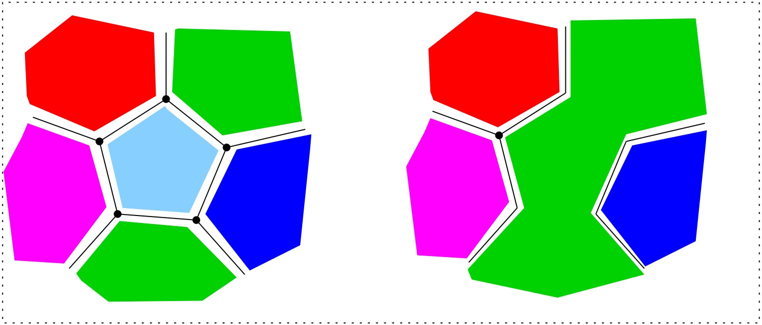
- **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



- **Réduction d'une face délimitée par cinq arêtes**

Le raisonnement est semblable au cas précédent. Il existe toujours deux faces opposées :A et C, adjacentes à une face pentagonale F t.q. A et C ne font pas partie d'une même face et ne sont pas adjacentes



K. Appel, W. Haken (1976)

Quatre couleurs suffisent pour colorier les faces d'un multi-graphe planaire de manière telle que deux faces adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.

La preuve originale de K. Appel et W. Haken utilisait quant à elle près de 2000 configurations inévitables.

Le nombre de configurations à considérer est de l'ordre de 600 pour la preuve fournie par N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour et R. Thomas (1996).

Le *genre* d'une surface est un invariant topologique. Il s'agit du nombre maximum de courbes simples fermées que l'on peut tracer sur la surface sans la disconnecter.

FORMULE D'HEAWOOD (1980)

Si un graphe peut être représenté de manière planaire sur une surface de genre g, alors ses faces peuvent être colorées avec c_g couleurs où

$$c_g = \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48\,g}) \right\rfloor .$$

La partie délicate consiste à montrer qu'il existe effectivement un graphe nécessitant ce nombre de couleurs.

Pour $g = 0, 1$, on retrouve le théorème des 4 et des 7 couleurs.

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_g	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14

TABLE : Les première valeurs de c_g.

Nombres de Ramsey

Frank P. Ramsey (1903–1926)

Théorème de Ramsey

Etant donné un entier s, existe-t-il un entier n (dépendant de s) tel pour *tout coloriage* des arêtes de K_n avec deux couleurs, K_n contient un sous-graphe K_s formé d'arêtes d'une même couleur ?

Il n'est pas évident qu'*a priori* cette question possède une solution.

Applications...

théorie des nombres, analyse harmonique, géométrie...

V. Rosta, *Ramsey Theory Applications*,
`http://www.combinatorics.org/Surveys/ds13.pdf`

Nous allons définir le nombre $R(s,t)$ comme étant le plus petit n tel que K_n contienne une copie de K_s rouge ou une copie de K_t bleue. Il nous faudra bien sûr **montrer que ces nombres existent**

Théorème de Ramsey (1930)

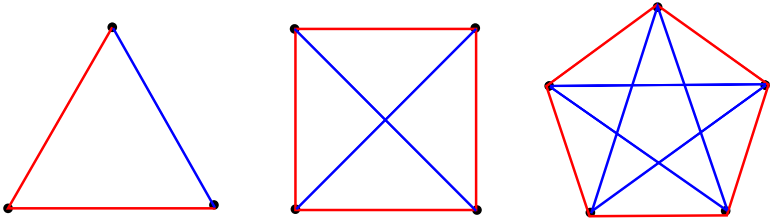
Il existe un plus petit entier $R(s,t)$ tel que pour tout $n \geq R(s,t)$, *tout* coloriage de $K_n = (V, E)$, $c : E \to \{\mathcal{R}, \mathcal{B}\}$, est tel que G contient

- une copie de K_s colorée en $\mathcal{R}$
- ou, une copie de K_t colorée en $\mathcal{B}$.

$R(s,t) = R(t,s)$

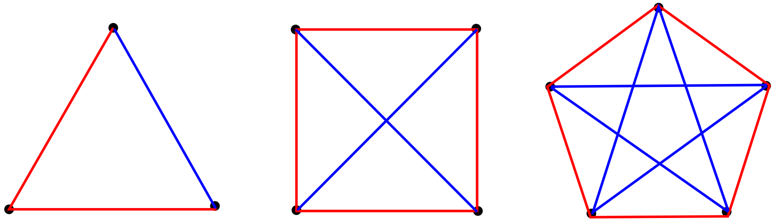
$R(s,2) = R(2,s) = s$: dans tout coloriage des arêtes de K_s, au moins une arête est bleue ou alors elles sont toutes rouges et aucune valeur inférieure à s ne peut convenir.

$R(3,3) > 5$



Pour vérifier que $R(3,3) = 6$, il faut passer en revue tous les coloriages de K_6 et s'assurer qu'ils contiennent tous une copie de K_3 monochromatique !

$R(3,3) > 5$



Pour vérifier que $R(3,3) = 6$, il faut passer en revue tous les coloriages de K_6 et s'assurer qu'ils contiennent tous une copie de K_3 monochromatique !

K_n contient C_n^2 arêtes pouvant chacune être coloriée en rouge ou en bleu. Le tableau suivant reprend le nombre de coloriages possibles des arêtes de K_n pour les première valeurs de n,

n	$2^{C_n^2}$
3	8
4	64
5	1024
6	32768
7	2097152
8	268435456
9	68719476736
10	35184372088832
11	36028797018963968
12	73786976294838206464
13	302231454903657293676544
14	2475880078570760549798248448

Théorème d'Erdös–Szekeres (1935)

Pour tous $s, t \geq 2$, le nombre $R(s, t)$ existe.

De plus, on a

$$R(s, t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$$

et si $s, t \geq 3$, alors

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

Par récurrence sur $s + t$.

$R(2, t)$ et $R(s, 2)$ existent toujours.

Donc, $R(s, t)$ existe si $s + t \leq 5$
($4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 3$ ou $5 = 3 + 2$).

Supposons que $R(s, t)$ existe pour tous s, t tels que $s + t < N$ et montrons que $R(s, t)$ existe pour $s + t = N$, avec $N \geq 6$.

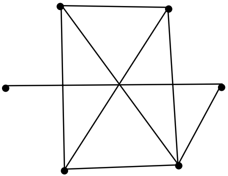
Si $s = 2$ ou $t = 2$, le résultat est démontré. Nous pouvons donc supposer $s, t \geq 3$.

Il nous suffit de trouver un entier n tel que tout coloriage de K_n contient toujours une copie de K_s rouge ou de K_t bleue. De cette manière, on aura majoré $R(s,t)$.

Thèse : tout graphe à $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ sommets contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s ou
- un ensemble de t sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc., $R(s-1,t)$ et $R(s,t-1)$ existent.

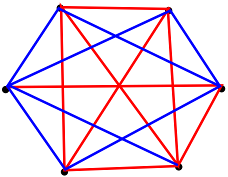


Il nous suffit de trouver un entier n tel que tout coloriage de K_n contient toujours une copie de K_s rouge ou de K_t bleue. De cette manière, on aura majoré $R(s,t)$.

Thèse : tout graphe à $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ sommets contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s ou
- un ensemble de t sommets indépendants.

Remarque : hyp. de réc., $R(s-1,t)$ et $R(s,t-1)$ existent.



Soit v un sommet de G,

$$A_v = V \setminus (\nu(v) \cup \{v\})$$

ensemble des sommets $\neq v$ et non-voisins de v.

$$\# V \setminus \{v\} = n - 1 = R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1$$

$$\#\nu(v) \geq R(s-1, t) \quad \text{ou} \quad \#A_v \geq R(s, t-1).$$

En effet, $\nu(v)$ et A_v partitionnent $V \setminus \{v\}$
donc $\#\nu(v) + \#A_v = \# V \setminus \{v\}$.

Sinon, $\#\nu(v) \leq R(s-1, t) - 1$ et $A_v \leq R(s, t-1) - 1$
donc $\#\nu(v) + \#A_v \leq n - 2$, impossible !

• Si $\#\nu(v) \geq R(s-1,t)$.

Par définition de $R(s-1,t)$, le sous-graphe de G induit par $\nu(v)$ contient

- un sous-graphe B isomorphe à K_{s-1} ou
- un ensemble de sommets indépendants de taille t.

Dans le premier cas, le sous-graphe induit par $B \cup \{v\}$ est isomorphe à K_s (car v est adjacent à tous les sommets de B).

Dans le second cas, on dispose directement d'un sous-ensemble de sommets indépendants de taille t.

- Si $\#A_v \geq R(s, t-1)$.

Par définition de $R(s, t-1)$, le sous-graphe de G induit par A_v contient

- un sous-graphe isomorphe à K_s (ce qui suffit) ou
- un ensemble C de sommets indépendants de taille $t-1$.

Dans ce cas, $C \cup \{v\}$ est un ensemble de sommets indépendants de taille t (v n'est adjacent à aucun sommet de C).

Thèse : $R(s,t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$

Par récurrence sur $s+t$. Pour $s=2$ (ou $t=2$),

$$\underbrace{R(2,t)}_{=t} \leq \underbrace{\mathrm{C}_t^1}_{=t}.$$

Supposons que $R(s,t) \leq \mathrm{C}_{s+t-2}^{s-1}$ pour tous s,t tels que $s+t<N$ et vérifions-le pour $s+t=N$.

Une fois encore, nous pouvons supposer $s,t \geq 3$.

Par la première partie de la preuve et en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \mathrm{C}_{s+t-3}^{s-2} + \mathrm{C}_{s+t-3}^{s-1}.$$

On conclut par la formule du triangle de Pascal.

Remarque

La détermination précise de $R(s,t)$ est extrêmement complexe (il est difficile d'un point de vue combinatoire d'énumérer tous les coloriages de K_n).

Par exemple, la détermination de $R(3,3)$ date de 1955, alors que l'estimation de $R(3,12)$ reprise ci-contre date de 2001.

j	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R(3,j)$	6	9	14	18	23	28	36	$[40,43]$	$[46,51]$	$[52,59]$

"Small Ramsey Number, S. P. Radziszowski",
`http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1.pdf`
donne un état de l'art en la matière.