Théorie des graphes (4)
Théorie algébrique des graphes

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2015–2016

Université de Liège

Utiliser l'algèbre linéaire

Définition

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe non orienté,

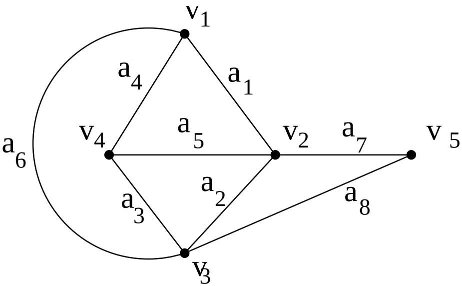
$$V = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

$A(G)$: matrice d'adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$[A(G)]_{i,j} = \#\ \text{arêtes}\ \{v_i, v_j\}\ \text{de}\ E.$$

⚠ cas non orienté $\rightsquigarrow$ matrice d'adjacence symétrique

$\rightsquigarrow$ polynôme caractéristique de G, valeurs propres de G, spectre de G,...



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Proposition

Deux graphes G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont, à une permutation près, la même matrice d'adjacence.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{matrice de permutation}$$

$$P^{-1}A(G)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{P^{-1}AP}(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Un triangle est un triplet d'arêtes distinctes deux à deux de la forme $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ (i.e., circuit de longueur trois formé d'arêtes distinctes).

Proposition

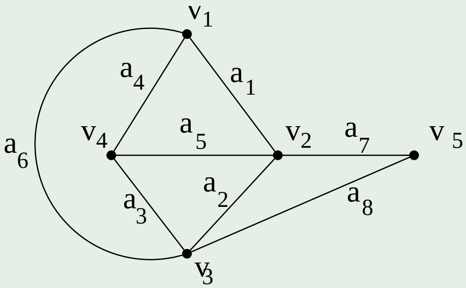
Si le polynôme caractéristique de $G = (V, E)$ est de la forme

$$\chi_G(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

alors

- c_1 est le nombre de boucles de G,
  en particulier, si G est simple, $c_1 = 0$.
- Si G est simple, alors $-c_2$ est le nombre d'arêtes de G.
- Si G est simple, alors c_3 est le double du nombre de triangles de G.

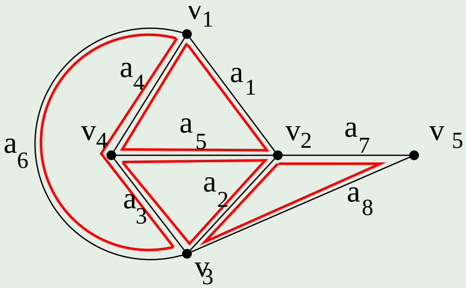
Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 - 8(-\lambda)^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0,\ c_2 = -8,\ c_3 = 10$

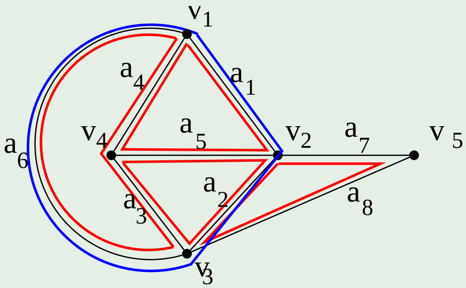
Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0,\ c_2 = 8,\ c_3 = 10$

Exemple



$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda^2 + \lambda - 2.$$

$c_1 = 0,\ c_2 = 8,\ c_3 = 10$

Rappel

Les coefficients c_i du polynôme caractéristique s'obtiennent comme somme des déterminants des sous-matrices *diagonales* de dimension i.

$$A_{(i_1,\ldots,i_k;\, i_1,\ldots,i_k)}$$

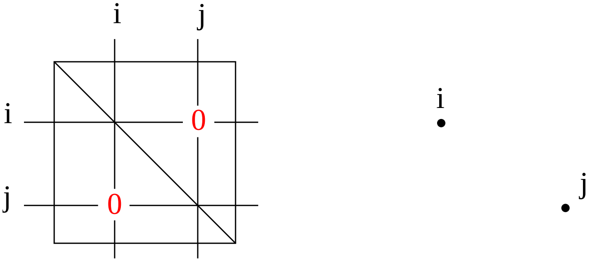
c_1 = somme des éléments diagonaux

c_2 = somme des dét. des sous-matrices diagonales 2×2

c_3 = somme des dét. des sous-matrices diagonales 3×3

Le premier point est immédiat. Le coefficient c_1 est la somme des éléments diagonaux de A_G.

Si G est simple, les sous-matrices diagonales de A_G de dimension 2 $A_{(i,j;i,j)}$ sont de la forme

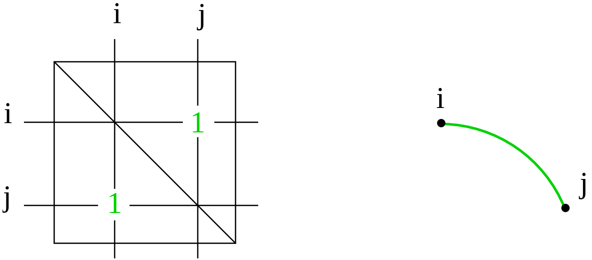


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient c_2 est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement -1 et 0, $c_2 = -\#E$.

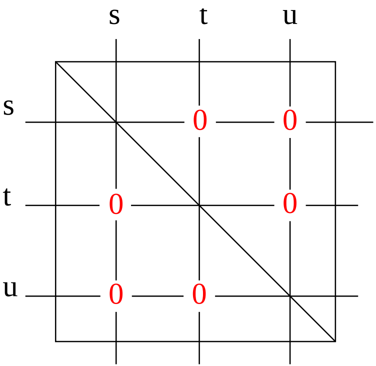
Le premier point est immédiat. Le coefficient c_1 est la somme des éléments diagonaux de A_G.

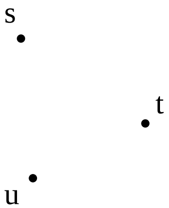
Si G est simple, les sous-matrices diagonales de A_G de dimension 2 $A_{(i,j;i,j)}$ sont de la forme

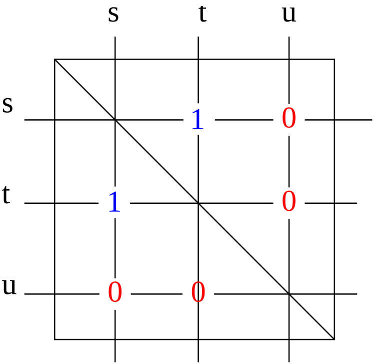


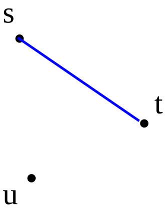
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient c_2 est la somme des déterminants de ces sous-matrices ceux-ci valant respectivement -1 et 0, $c_2 = -\#E$.

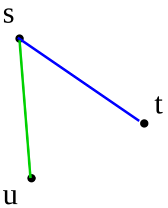

s
t
u
s
t
u
0
0
0
0
0
0

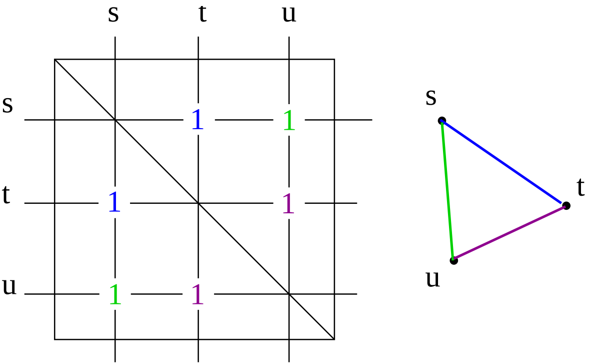

s
t
u


s
t
u
s
t
u
1
0
1
0
0
0


s
t
u

	s	t	u
s		1	1
t	1		0
u	1	0	




s t u
s 1 1
t 1 1
u 1 1
s
t
u

Les sous-matrices diagonales non nulles de A_G de dimension 3 sont d'une des formes suivantes $A_{(s,t,u;s,t,u)}$:

(à une permutation des lignes et des colonnes près, ne change pas le déterminant)

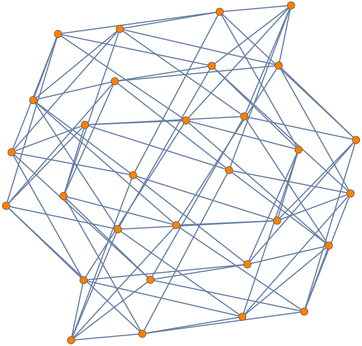
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ont un déterminant nul,
la troisième a un déterminant égal à 2.

$\rightsquigarrow$ $c_3 =$ la somme des dét. de ces sous-matrices $= 2 \times (\#\text{triangles})$.

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti (donc non orienté).
Si λ est valeur propre de G, alors $-\lambda$ l'est aussi.
Le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.



$$-6(1\times), -3(5\times), -1(9\times), 1(9\times), 3(5\times), 6(1\times)$$

V se partitionne en deux sous-ensembles V_1 et V_2
toute arête de G est de la forme $\{u, v\}$ avec $u \in V_1$ et $v \in V_2$.

Si on ordonne les sommets de V de manière à considérer tout d'abord les sommets de V_1, alors $A(G)$ a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de dimension $\# V_1 \times \# V_2$.

Soit x un vecteur propre non nul de $A(G)$ de valeur propre λ.

$$Ax = \lambda x.$$

Appelons x_1 (resp. x_2) le vecteur obtenu en considérant les $\# V_1$ premières (resp. les $\# V_2$ dernières) composantes de x.
Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$\leadsto$ on trouve un vecteur propre non nul de valeur propre $-\lambda$,

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bx_2 \\ \widetilde{B}x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Définition (cas orienté)

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe <u>orienté</u>,

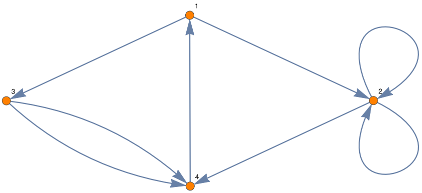
$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}.$$

$A(G)$: matrice d'adjacence de G, $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

$$[A(G)]_{i,j} = \# \text{ arcs } (v_i, v_j) \text{ de } E.$$

⚠ $A(G)$ n'est plus nécessairement symétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Théorème

Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe (orienté ou non) tel que $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ et pour tout $n > 0$,

$$[A(G)^n]_{i,j}$$

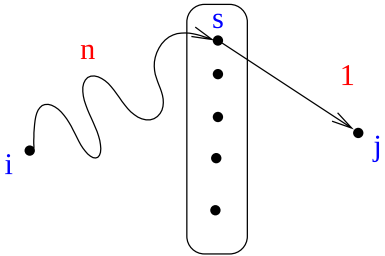
est le nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_j.

Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$, définition de la matrice d'adjacence.

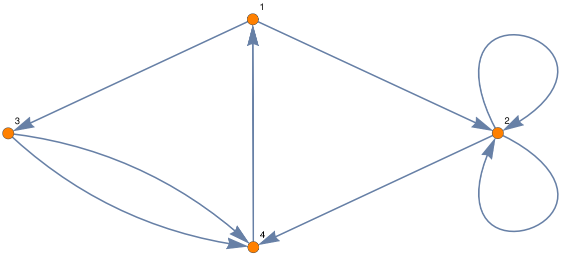
Supposons OK pour $n > 0$ et vérifions-le pour $n + 1$.

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} [A(G)^n]_{i,s} \, [A(G)]_{s,j}.$$

$$[A(G)^{n+1}]_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} [A(G)^n]_{i,s}\, [A(G)]_{s,j}\,.$$



$[A(G)^n]_{i,s} =$ nombre de chemins de longueur n joignant v_i à v_s
$[A(G)]_{s,j} =$ nombre d'arcs/arêtes joignant v_s à v_j.
Par conséquent, $[A(G)^n]_{i,s}\, [A(G)]_{s,j}$ compte le nombre de chemins de longueur $n+1$ joignant v_i à v_j en passant par v_s.



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A^3}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 4 \\ 4 & 20 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A^4}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 2 & 17 \\ 11 & 44 & 4 & 24 \\ 6 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 11 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} 17 & 52 & 4 & 28 \\ 24 & 99 & 11 & 52 \\ 4 & 22 & 6 & 8 \\ 4 & 24 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

Exercice (extension des graphes bipartis au cas orienté) :

Proposition

Soit G un graphe orienté où V se partitionne en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que tout arc de G appartient à $V_1 \times V_2$ ou $V_2 \times V_1$, alors le spectre de G est symétrique par rapport à 0.

Matrices irréductibles et primitives. . .

Attention à l'ordre des quantificateurs...

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) ≥ 0 est irréductible, si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $N(i,j)$ tel que

$$[A^{N(i,j)}]_{i,j} > 0.$$

Définition

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients (réels) ≥ 0 est primitive, s'il existe N tel que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$[A^N]_{i,j} > 0$$

ce que l'on s'autorise à noter $A^N > 0$

primitif $\Rightarrow$ irréductible

Interprétation

Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) G
est fortement connexe (resp. connexe) SSI
sa matrice d'adjacence $A(G)$ est irréductible.

Par abus de langage, on parle de graphe irréductible

Si $A(G)$ est de plus primitif,

- le graphe est non seulement connexe et
- il existe N tel que, quelle que soit la paire de sommets considérée, il existe un chemin de longueur N les joignant.

Par abus de langage, on parle de graphe primitif

Un "gros" théorème d'algèbre linéaire

Théorème de Perron

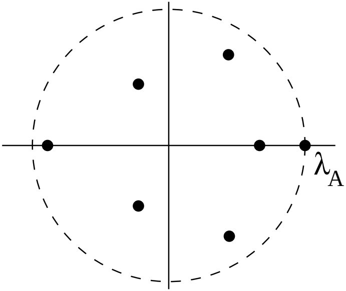
Soit $A \geq 0$ une matrice carrée primitive de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

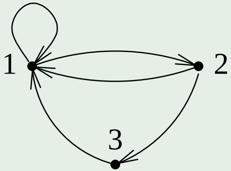
$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}\text{)}.$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| < \lambda_A$.

La valeur propre de Perron λ_A est l'unique valeur propre *dominante*. Toute autre valeur propre de A a un module **strictement** inférieur à λ_A.



Exemple, cas primitif



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(G)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{array}{lll} 1 \to 1 \to 1 \to 1, & 1 \to 1 \to 1 \to 2, & 1 \to 1 \to 2 \to 3 \\ 2 \to 1 \to 1 \to 1, & 2 \to 1 \to 1 \to 2, & 2 \to 1 \to 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \to 1 \to 1, & 3 \to 1 \to 1 \to 2, & 3 \to 1 \to 2 \to 3. \end{array}$$

$$\lambda_A \simeq 1.83929, \; \lambda_{2,3} \simeq -0.41964 \pm 0.60629\, i.$$

A est primitive, s'il existe N tel que $A^N > 0$

Remarque

A est primitive SSI
il existe $N \geq 1$ tel que $A^n > 0$ pour tout $n \geq N$.

Si A est primitive, il existe N tel que $A^N > 0$.

$\rightsquigarrow$ chaque colonne de A contient un élément > 0.

Donc, $A^N.A > 0$ et on conclut par récurrence.

Corollaire du thm. de Perron

Si A est une matrice primitive,

$$\boxed{A^k = \lambda_A^k \, v_A \, \widetilde{w_A} + o(\lambda_A^k)}$$

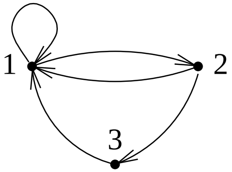
où v_A et $\widetilde{w_A}$ sont des vecteurs propres choisis t.q. $\widetilde{w_A}.v_A = 1$.

Exemple

$f(x)$ est en $o(g)$ si f/g tend vers 0 si $x \to \infty$.

$$x^3 + 5x^2 + 8 = x^3 + o(x^3)$$

Il est Possible d'obtenir des développements plus fins du terme d'erreur en l'exprimant à l'aide de la deuxième valeur propre de A (par module décroissant).



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_A \simeq 1.83929$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A(G)^n}{\lambda_A^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.61842 & 0.336228 & 0.182804 \\ 0.519032 & 0.282192 & 0.153425 \\ 0.336228 & 0.182804 & 0.0993883 \end{pmatrix}}_{\text{matrice constante}}$$

Corollaire

Dans la cas d'un graphe primitif, on connaît le *comportement asymptotique* du nombre de chemins de longueur n entre deux sommets.

Théorème de Perron-Frobenius

Soit $A \geq 0$ une matrice carrée irréductible de dimension n.

- La matrice A possède un vecteur propre $v_A \in \mathbb{R}^n$ (resp. $w_A \in \mathbb{R}^n$) dont les composantes sont toutes strictement positives et correspondant à une valeur propre $\lambda_A > 0$,

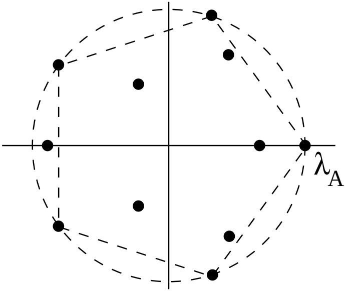
$$A\, v_A = \lambda_A\, v_A \text{ (resp. } \widetilde{w_A}\, A = \lambda_A\, \widetilde{w_A}\text{).}$$

- Cette valeur propre λ_A possède une multiplicité algébrique (et géométrique) simple.
- Tout vecteur propre de A dont les composantes sont strictement positives est un multiple de v_A.
- Toute autre valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de A est telle que $|\mu| \leq \lambda_A$.
- Il existe $d \geq 1$ tel que si μ est une valeur propre de A telle que $|\mu| = \lambda_A$, alors $\mu = \lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\lambda_A\, e^{2ik\pi/d}$ est une valeur propre de A.

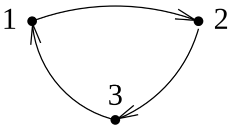
La valeur propre λ_A est la valeur propre de Perron de A.

Une matrice irréductible possède toujours une valeur propre réelle dominante λ_A.

On peut avoir **d'autres valeurs propres** de module égal à λ_A mais dans ce cas, celles-ci sont exactement obtenues par multiplication de λ_A par les racines d-ièmes de l'unité.



irréductible $\not\Rightarrow$ primitif



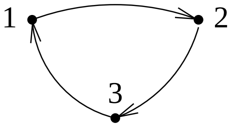
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est f. connexe donc $A(G)$ est irréductible.
Mais $A(G)$ n'est pas primitif.

$$A(G)^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A(G)^{3n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour joindre deux sommets fixés, uniquement certaines longueurs de chemin peuvent être considérées.



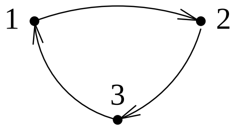
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les racines cubiques de l'unité

$$\lambda_A = 1,\ e^{2i\pi/3},\ e^{4i\pi/3}$$

plusieurs valeurs propres de module maximum $(= 1)$.

Ici, la limite de $A(G)^n/\lambda_A^n$, si $n \to +\infty$, n'existe pas !



$$([A(G)^n]_{1,3})_n = 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$$

est clairement une suite divergente. Ainsi, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[A(G)^n]_{1,3}}{\lambda_A^n} \text{ n'existe pas !}$$

Des combinaisons convenables de puissances des racines de l'unité s'annulent :

$$\frac{(e^{2i\pi/3})^n + (e^{4i\pi/3})^n + 1}{3} = 0, \text{ si } n \equiv 1, 2 \pmod 3.$$

Une première application du thm. de Perron–Frobenius. . .

Rappel

Le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0.

On en prouver une réciproque.

Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Un graphe est biparti SSI on peut partitionner V en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que

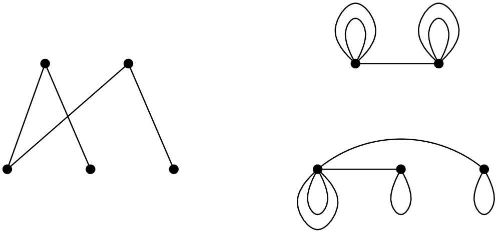
- tout chemin entre deux sommets de V_1 est de longueur paire,
- tout chemin entre deux sommets de V_2 est de longueur paire,
- tout chemin entre un sommet de V_1 et un sommet de V_2 est de longueur impaire.

Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.

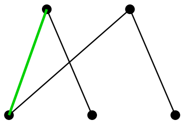


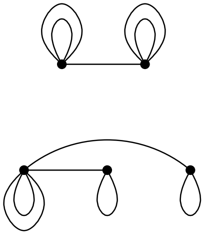
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



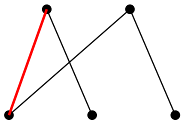


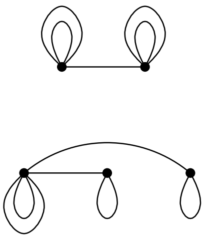
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



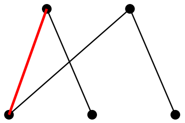


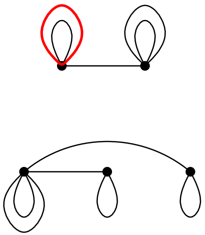
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



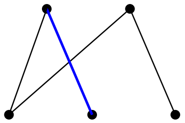


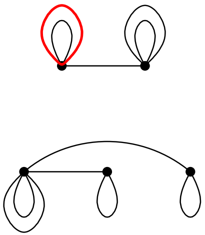
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



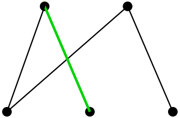


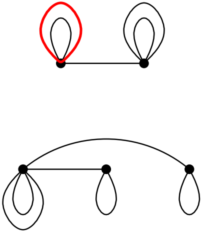
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



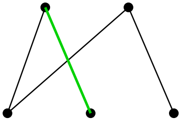


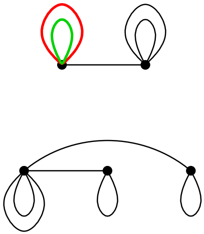
Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



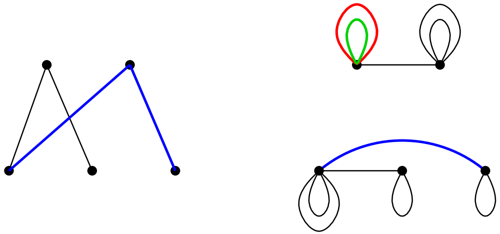


Corollaire

Si $G=(V,E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x\neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y\neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A=A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G'=(V,E')$ où $\{a,b\}\in E'$ SSI $\exists c\in V:\{a,c\},\{b,c\}\in E$.

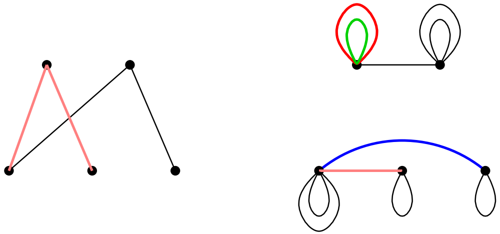


Corollaire

Si $G = (V, E)$ est un graphe (non orienté simple) connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0, alors G est biparti.

Soient λ la valeur propre de Perron de G et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Par hypothèse $-\lambda$ est aussi une valeur propre de G et considérons $y \neq 0$, l'un de ses vecteurs propres.

x et y sont linéairement indépendants.
Soit $A = A(G)$, A^2 est la matrice d'adjacence du multi-graphe $G' = (V, E')$ où $\{a, b\} \in E'$ SSI $\exists c \in V : \{a, c\}, \{b, c\} \in E$.



λ^2 est la valeur propre dominante de A^2 et
x et y en sont des vecteurs propres.

$\rightsquigarrow$ La multiplicité de λ^2 est au moins 2.
Vu le thm. de Perron–Frobenius, A^2 n'est pas irréductible
i.e., G' n'est pas connexe.

On va montrer que G' contient *exactement* 2 composantes connexes.

Soit u un sommet quelconque fixé.

On définit

- V_1 : ensemble des sommets joints à u par un chemin de longueur impaire dans G.
- V_2 : ensemble des sommets joints à u par un chemin de longueur paire dans G.

Puisque G est connexe, *tout sommet est connecté à* u,

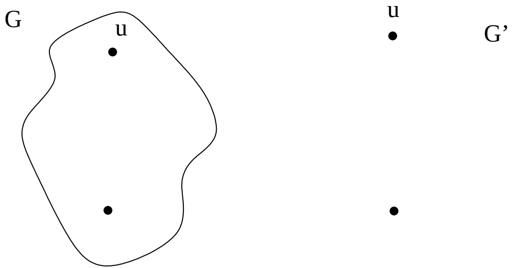
$$V_1 \cup V_2 = V$$

On va montrer que

- La restriction de G' à V_1 est connexe
- La restriction de G' à V_2 est connexe

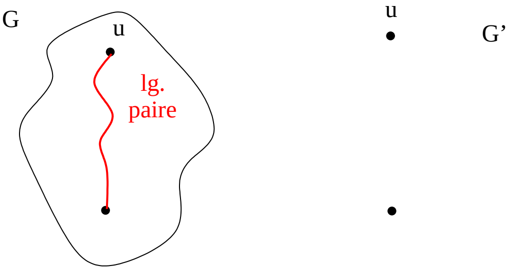
$\rightsquigarrow$ cela entraîne $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ car sinon, G' connexe !

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.



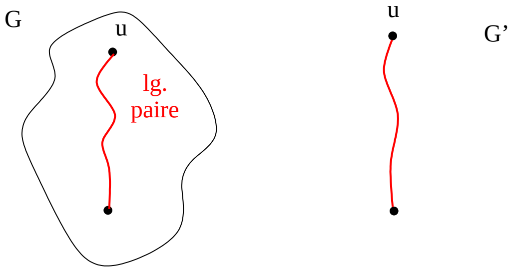
La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.



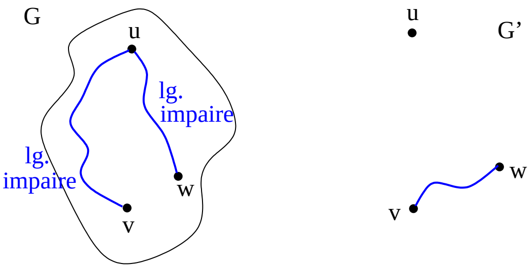
La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_2 joints à u par un chemin de longueur paire dans G sont connectés à u dans G'.



La restriction de G' aux sommets de V_2 est donc connexe.

Tous les sommets de V_1 joints à u par un chemin de longueur impaire dans G, sont connectés entre eux dans G'.
Soient $v, w \in V_1$.



La restriction de G' à V_1 est connexe.

De plus, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, car sinon G' serait connexe.

G est-il biparti ? On a partitionné V en deux sous-ensembles...

P.A. Supposons que dans G, il existe un chemin de longueur impaire entre deux sommets x et y de V_1

$\rightsquigarrow$ on a un chemin de longueur impaire de u à x,
donc un chemin de longueur paire de u à y
donc y appartient à $V_1 \cap V_2$!

Conclusion : *tout chemin entre deux sommets de* V_1 *est de longueur paire*

P.A. Supposons que dans G, il existe un chemin de longueur impaire entre deux sommets x et y de V_2

$\rightsquigarrow$ on a un chemin de longueur paire de u à x,
donc un chemin de longueur impaire de u à y
donc y appartient à $V_1 \cap V_2$!

Conclusion : *tout chemin entre deux sommets de V_2 est de longueur paire*

P.A. Supposons que dans G, il existe un chemin de longueur paire entre un sommet $x \in V_1$ et un sommet $y \in V_2$

$\rightsquigarrow$ on a un chemin de longueur paire de u à y,
donc un chemin de longueur paire de u à x
donc x appartient à $V_1 \cap V_2$!

Conclusion : *tout chemin entre un sommet de V_1 et un sommet de V_2 est de longueur impaire*

$\rightsquigarrow$ G est biparti