Théorie des graphes (3)

Michel Rigo

http://www.discmath.ulg.ac.be/

Année 2015–2016

Homomorphismes, Isomorphismes, Automorphismes de graphes

Définition

Soient $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, deux digraphes.

$f : V_1 \to V_2$ est un homomorphisme de G_1 dans G_2, si

$$(x, y) \in E_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

Définition

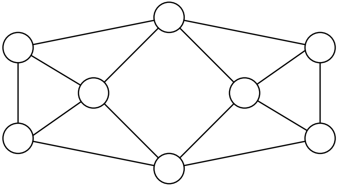
Soient $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, deux graphes non orientés.

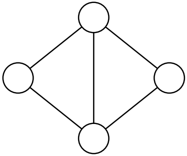
$f : V_1 \to V_2$ est un homomorphisme de G_1 dans G_2, si

$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

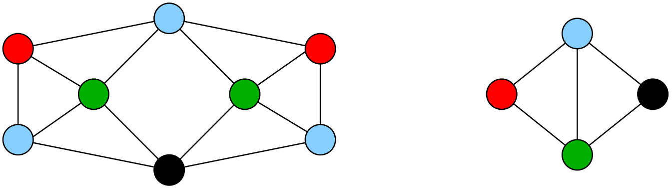
On dit qu'on a un homomorphisme *de* G_1 *dans* G_2.

$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

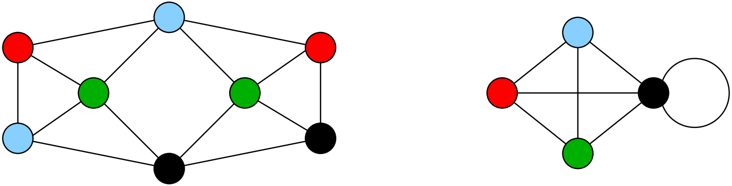




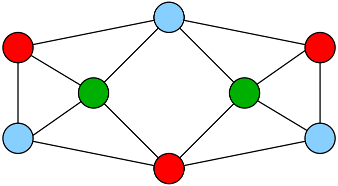
$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

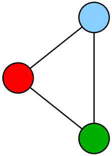


$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

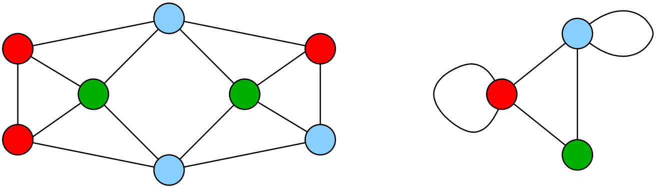


$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

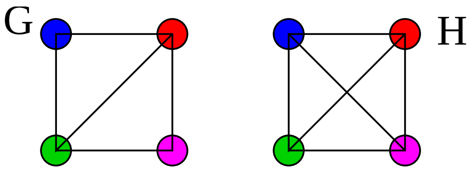




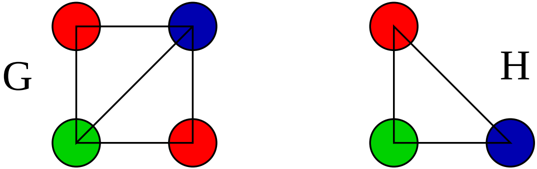
$$\{x, y\} \in E_1 \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$



un homomorphisme de G dans H n'implique PAS
un homomorphisme de H ds G.



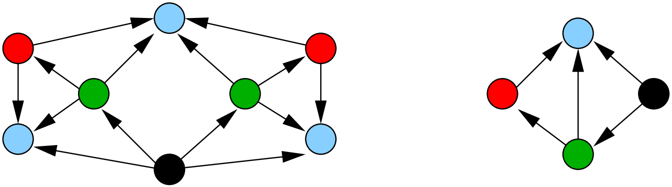
un homomorphisme de G dans H
n'est PAS nécessairement injectif.



Pour rappel, une application $f : V_1 \to V_2$ est *injective* si, pour tous $x, y \in V_1$, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.

Exemple d'homomorphisme dans le cas orienté :

$$(x, y) \in E_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$



Un graphe (non orienté) est k-colorable si

- on peut colorer ses sommets avec, au plus, k couleurs ;
- des sommets voisins ont des couleurs distinctes,

Remarque

Un graphe (non orienté) G est k-colorable, s'il existe un homomorphisme de G dans K_k.

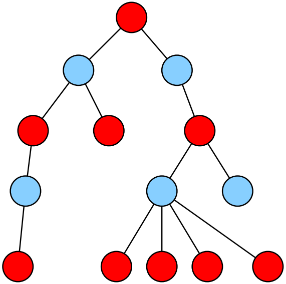
Le nombre chromatique $\chi(G)$ de G est le plus petit k tel que G est k-colorable.

$\chi(G) = k$:

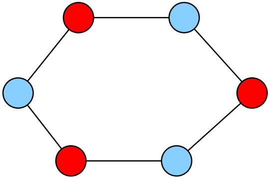
- il existe un homomorphisme de G dans K_k,
- il n'existe aucun homomorphisme de G dans K_{k-1}.

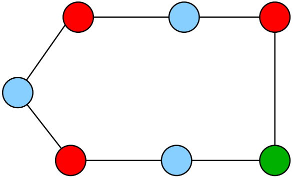
NB : le nombre chromatique est 'difficile' à calculer (NP-complet).

Nombre chromatique d'un arbre, d'une forêt



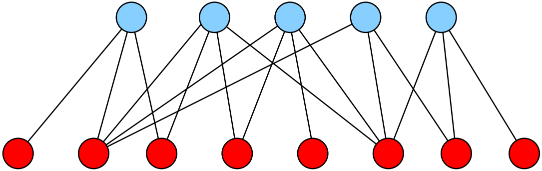
Nombre chromatique d'un cycle de longueur paire / impaire



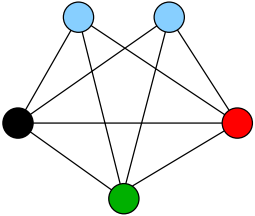


Remarque

Un graphe G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$.



Nombre chromatique de K_n : $\chi(K_n) = n$
Nombre chromatique de K_n privé d'une arête : $n - 1$



- 2 digraphes $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, sont isomorphes si $\exists$ bijection $f : V_1 \to V_2$ t.q.

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

- 2 graphes non orientés sont isomorphes si $\exists$ bijection $f : V_1 \to V_2$ t.q.

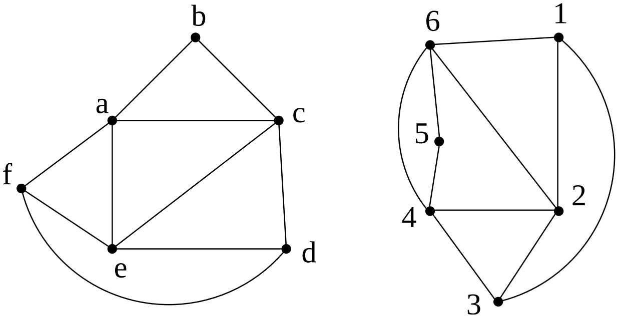
$$\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$$

- 2 multi-graphes sont isomorphes si $\exists$ bijection $f : V_1 \to V_2$ t.q. (x, y) arc de multiplicité k de G_1 SSI $(f(x), f(y))$ arc de multiplicité k de G_2.

Remarque

Si f est un isomorphisme, f^{-1} aussi.

Deux graphes *isomorphes* 'même forme'



$$\varphi : a \mapsto 4,\ \ b \mapsto 5, c \mapsto 6, d \mapsto 1,\ \ e \mapsto 2,\ \ f \mapsto 3.$$

Remarque

Décider si deux graphes sont isomorphes est un problème 'difficile' (NP-complet).

Proposition

Soient G, H deux graphes isomorphes et φ un isomorphisme de G dans H. Pour tous sommets u, v de G, on a

- $\deg(u) = \deg(\varphi(u))$,
- $\mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(\varphi(u), \varphi(v))$.

Etude des symétries d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non).
Un automorphisme de G est un isomorphisme de G dans G.

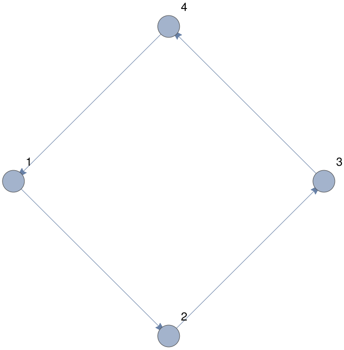
$Aut(G)$: groupe des automorphismes de G
muni de la loi de composition d'applications

$Aut(G)$ est un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ des permutations de $n = \# V$ éléments.

Un graphe pour lequel $Aut(G)$ est réduit à l'identité id_V est asymétrique.

```
In[]:= Graph[{1->2, 2->3, 3->4, 4->1}]
```

Exemple d'un graphe orienté



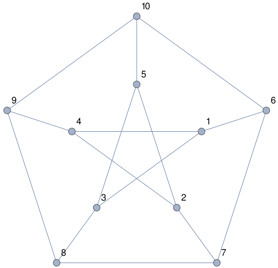

```
In[]:= GraphAutomorphismGroup[g]
```

fournit un ensemble de générateurs

```
Out[]:= PermutationGroup[{Cycles[{{1, 2, 3, 4}}]}]

In[]:=GroupElements[%]
Out[]:={Cycles[{}], Cycles[{{1, 2, 3, 4}}],
Cycles[{{1, 3}, {2, 4}}], Cycles[{{1, 4, 3, 2}}]}
```

```
In[]:= PetersenGraph[]
```



exemple d'un graphe non orienté

```
In[]:= GraphAutomorphismGroup[PetersenGraph[]]
```

fournit un ensemble de générateurs (ici 3 générateurs)

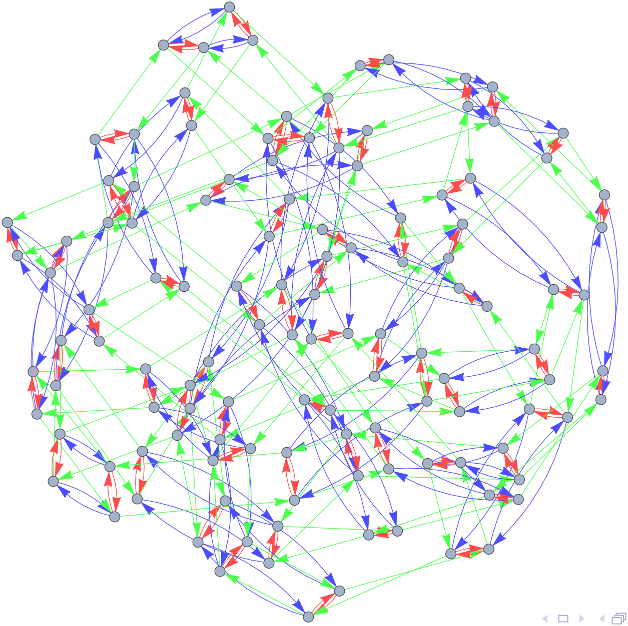
```
Out[]:= PermutationGroup[
{Cycles[{{3, 6}, {5, 7}, {8, 10}}],
Cycles[{{2, 5, 10, 9, 8, 7}, {3, 6, 4}}],
Cycles[{{1, 2}, {3, 7}, {5, 6}}]}]
In[]:= Short[GroupElements[%]]
```

le groupe des automorphismes contient 120 permutations $(10! = 3628800)$

```
Out[]:= {Cycles[{}], <118>, Cycles[{{1, 10, 2, 8},
{3, 6, 5, 7}, {4, 9}}]}
```

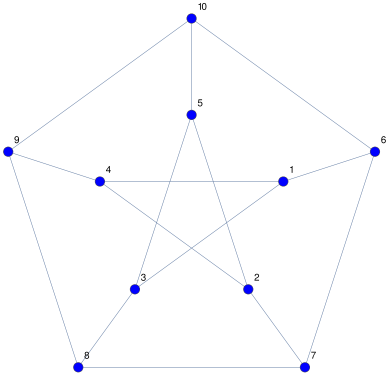
Le graphe de Cayley correspondant

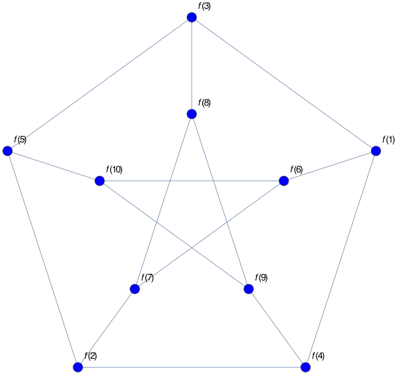
`In[]:=CayleyGraph[GraphAutomorphismGroup[PetersenGraph[]]]`



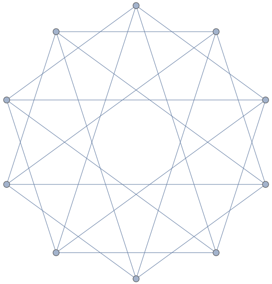
une des permutations de l'ensemble des automorphismes

$$(1\ 6)\,(2\ 9\ 5\ 8)\,(3\ 7\ 4\ 10)$$





```
In[]:= g=CirculantGraph[10, {2, 4}]
```

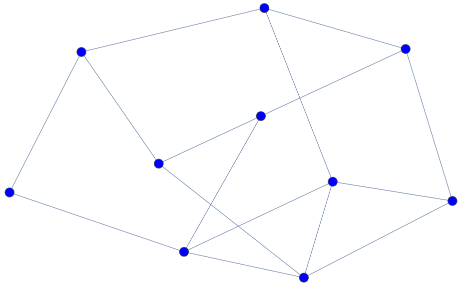


```
In[]:= GraphAutomorphismGroup[g]
```

le groupe des automorphismes est engendré par 8 permutations

```
Out[]:= PermutationGroup[ {Cycles[{{7, 9}}],
Cycles[{{5, 7}}], Cycles[{{3, 5}}],
Cycles[{{8, 10}}], Cycles[{{6, 8}}],
Cycles[{{4, 6}}], Cycles[{{2, 4}}],
Cycles[{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}, {9, 10}}]}]
In[]:= GroupElements[%]//Length    Out[]:= 28800
```

Graphe de Petersen avec deux arêtes ajoutées et une enlevée...



```
In[]:= GraphAutomorphismGroup[%]
Out[]:= PermutationGroup[{}]
```

Ici, un seul automorphisme, l'identité !

Il s'agit donc d'un graphe asymétrique.

Arbres infinis et isomorphisme

Une rare incursion dans le monde des graphes infinis

- Alphabet $\{a, b\}$
- Mots : aa, bba, b, $abbbaabaa$ (suites finies de symboles).
- Arbre lexicographique : arbre binaire infini,
  ses sommets sont en bijection avec les mots sur $\{a, b\}$.

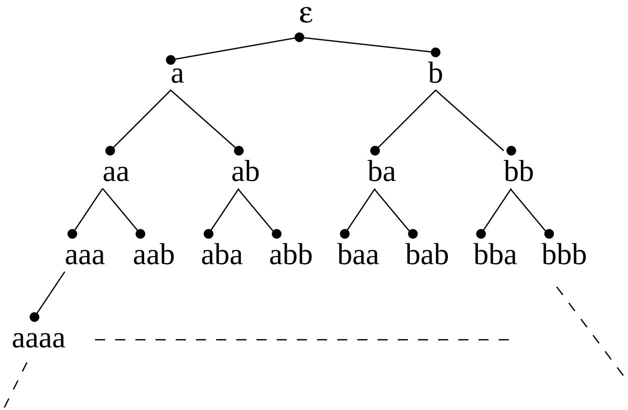
Si un sommet est en bijection avec le mot m :

- son fils de gauche est en bijection avec ma
- son fils de droite est en bijection avec mb

La racine de l'arbre correspond au mot vide : ε.

Cet arbre possède exactement 2^i sommets de niveau i,
les mots de longueur i : $\underbrace{a \cdots aa}_{i\times}, a \cdots ab, \ldots, b \cdots ba, \underbrace{b \cdots bb}_{i\times}$.

Arbres infinis et isomorphisme



Arbres infinis et isomorphisme

Soit un ensemble L de mots écrits sur $\{a, b\}$ (un *langage*).
p_L : à un mot m associe 1 (resp. 0) si $m \in L$ (resp. $m \notin L$).

La pondération est un codage définissant
le dictionnaire des mots de L (fonction caractéristique).

Remarque importante

La notion d'isomorphisme s'étend aux graphes pondérés :

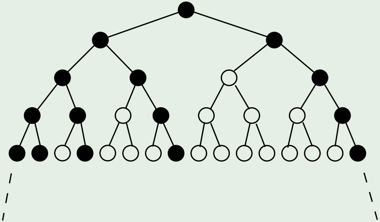
Si deux graphes $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ ont leurs sommets pondérés par $p_i : V_i \to \Sigma$, la définition d'un isomorphisme $f : V_1 \to V_2$ doit aussi respecter

$$p_1(v) = p_2(f(v)), \ \forall v \in V_1.$$

Arbres infinis et isomorphisme

Un langage et l'arbre pondéré

L formé des mots commençant par un nombre arbitraire de a (éventuellement aucun) et suivi par un nombre arbitraire de b (éventuellement aucun), l'arbre pondéré A_L

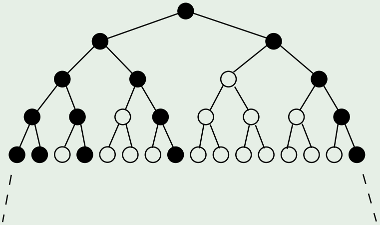


$$\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, \ldots$$

Arbres infinis et isomorphisme

A_m : sous-arbre obtenu en considérant comme nouvelle racine le sommet m et en ne conservant dans A_m que les descendants de m

Arbre régulier

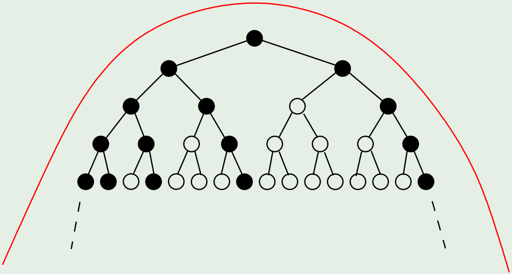


l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

Arbres infinis et isomorphisme

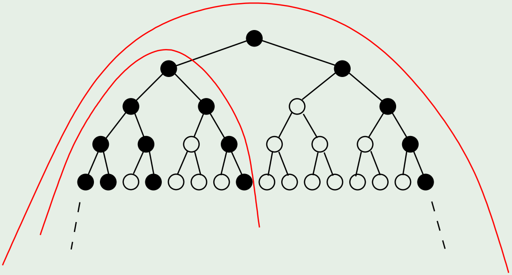
Arbre régulier



l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

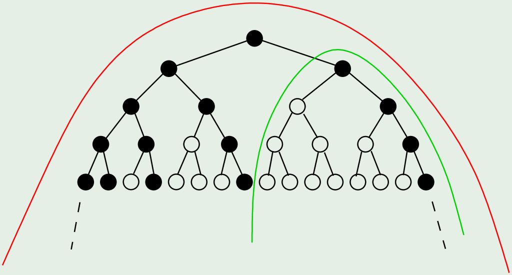
Arbre régulier



l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

Arbre régulier

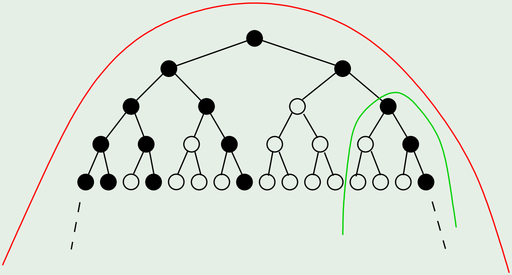


l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

Arbres infinis et isomorphisme

Arbre régulier

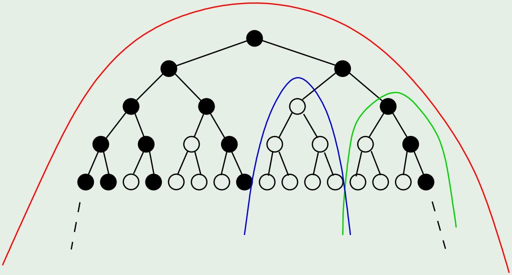


l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

Arbres infinis et isomorphisme

Arbre régulier



l'arbre A_L ne possède, à isomorphisme près, que 3 sous-arbres non isomorphes (par exemple, A_L lui-même, A_b et A_{ba})

nombre fini de sous-arbres non isomorphes : arbre régulier.

Graphes hamiltoniens

Sir William Hamilton (1805–1865)

Analogie avec les graphes eulériens passant par chaque arête :

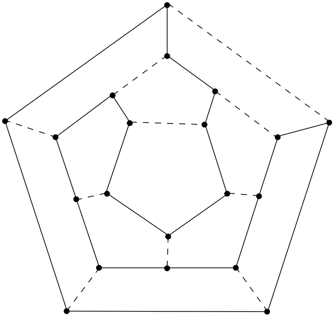
Définition

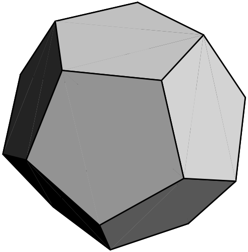
Un chemin (resp. circuit) hamiltonien de G : passe une et une seule fois par chaque sommet de G.

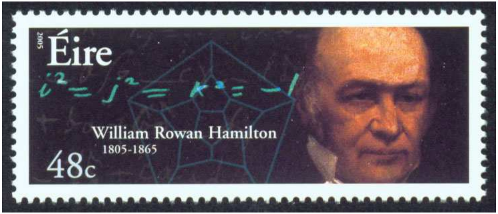
Un graphe hamiltonien : graphe possédant un circuit hamiltonien.

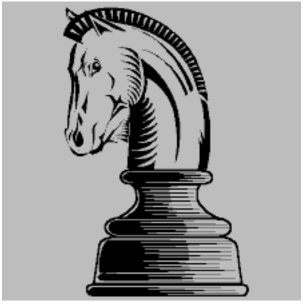
- En général, on se pose la question pour les graphes ayant au moins 3 sommets.
- Inutile de considérer des multigraphes $\rightsquigarrow$ graphes simples.
- Un arbre ayant au moins 3 sommets n'est jamais hamiltonien.

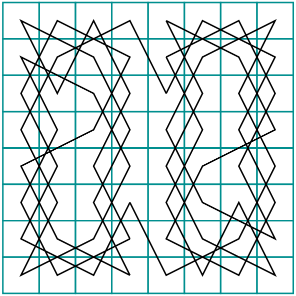
⚠ On considère ici des graphes simples et non orientés.






2005
Éire
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
William Rowan Hamilton
1805-1865
48c





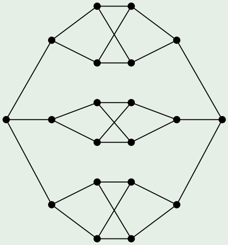
Condition nécessaire pour qu'un graphe soit hamiltonien.

Proposition

Soit $G = (V, E)$ est un graphe hamiltonien.
Pour tout ensemble non vide $S \subseteq V$,
le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $\leq \#S$.

Exemple

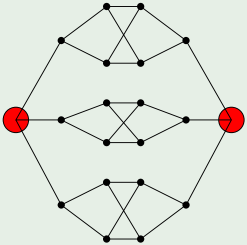
Ce graphe est-il hamiltonien ?



Le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $> \#S$,
donc le graphe n'est pas hamiltonien (contraposée).

Exemple

Ce graphe est-il hamiltonien ?

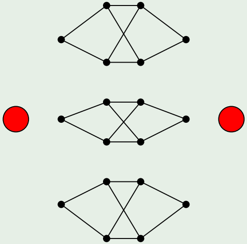


$\#S = 2$

Le nombre de composantes connexes de $G - S$ est $> \#S$,
donc le graphe n'est pas hamiltonien (contraposée).

Exemple

Ce graphe est-il hamiltonien ?



$\#S = 2$

Preuve :

- Par hypothèse, on dispose d'un circuit hamiltonien.
- Si on enlève un sommet à un circuit, il reste connexe.
- Si on enlève deux sommets, on a au plus deux composantes connexes (on pourrait en garder une seule).
- …
- Par récurrence, si on enlève k sommets, on a au plus k composantes connexes (sans même tenir compte des autres arêtes du graphe).

Remarque

Décider si un graphe donné est hamiltonien est un problème difficile (NP-complet). Méthode naïve : passer en revue les $n!$ permutations des sommets.

$\rightsquigarrow$ On dispose uniquement de conditions suffisantes assurant le caractère hamiltonien d'un graphe.

- Théorème de Dirac
- Théorème d'Ore $\rightsquigarrow$ fermeture d'un graphe
- Théorème de (Bondy–)Chvátal

Théorème de Dirac (1952)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si le degré de chaque sommet est $\geq n/2$, G est hamiltonien.

Théorème d'Ore (1960)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si il existe 2 sommets x et y t.q. $\deg(x) + \deg(y) \geq n$.
Le graphe G est hamiltonien SSI $G + \{x, y\}$ l'est.

Définition de la fermeture $\mathcal{F}(G)$ d'un graphe G.

La fermeture d'un graphe simple et non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$.
On définit une suite finie de graphes (simples)

$$G_0, G_1, \ldots, G_i = (V_i, E_i), \ldots, G_k$$

Pour tout i, on ajoute à G_i une arête comme suit :

$$G_{i+1} = G_i + \{u, v\}$$

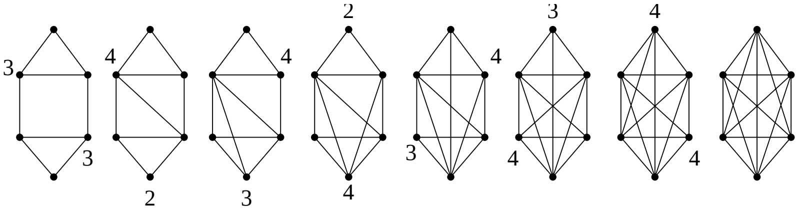
où u et v sont t.q. $\{u, v\} \notin E_i$ et

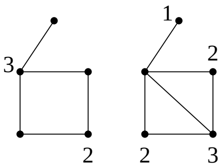
$$\deg_{G_i}(u) + \deg_{G_i}(v) \geq \# V$$

où $\deg_{G_i}$ désigne le degré d'un sommet dans le graphe G_i.

La procédure s'arrête à G_k si, pour tous sommets u, v,
soit $\{u, v\} \in E_k$, soit $\deg_{G_k}(u) + \deg_{G_k}(v) < \# V$.

La définition ne dépend PAS de l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées.
On parle donc de LA fermeture $\mathcal{F}(G)$.





Corollaires directs du théorème d'Ore

Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Le graphe G est hamiltonien SSI sa fermeture l'est.

Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si la fermeture de G est K_n, alors G est hamiltonien.
La réciproque est fausse.

Corollaire

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y),
on a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

En particulier, si $\min_{v \in V} \deg(v) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Le thm. d'Ore implique donc le thm. de Dirac.

Les deux derniers corollaires ne fournissent pas de condition nécessaire.

Contre-exemple :
un unique cycle C ayant ≥ 5 sommets : $\mathcal{F}(C) = C$.

Théorème de Dirac (1952)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si le degré de chaque sommet est $\geq n/2$, G est hamiltonien.

Preuve du thm. de Dirac.

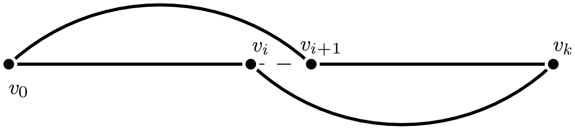
1) le graphe est connexe :
Sinon, on aurait au moins deux composantes connexes.
Donc, une des composantes a $\leq \lfloor n/2 \rfloor$ sommets.
Or, chaque sommet a $\geq \lceil n/2 \rceil$ voisins !

2) Soit $(v_0, \ldots, v_k)$ un chemin simple de longueur maximum k.

- $k < n$
- les voisins de v_0 sont tous dans $\{v_1, \ldots, v_k\}$
- les voisins de v_k sont tous dans $\{v_0, \ldots, v_{k-1}\}$

On va montrer qu'il existe $i < k$ tel que

$$\{v_0, v_{i+1}\} \in E \text{ et } \{v_i, v_k\} \in E$$



Par l'absurde :

- Soit $I \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_0, v_{i+1}\} \in E(G)$. Si $i \in I$, alors $\{v_i, v_k\} \notin E(G)$.
- Soit $J \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_i, v_k\} \in E(G)$. Si $i \in J$, alors $\{v_0, v_{i+1}\} \notin E(G)$.
- Par hypothèse, $\#I \geq n/2$ et $\#J \geq n/2$.
- $I \cap J = \emptyset$ donc $\#(I \cup J) \geq n$.
- Mais $I, J \subseteq \{0, \dots, k-1\}$, donc $\#(I \cup J) \leq k < n$.

On a donc un circuit.

Le graphe est connexe. Si un sommet n'appartient pas au circuit, il existe un chemin de ce sommet vers le circuit (connexité).

$\leadsto$ on crée alors un chemin simple plus long que $(v_0, \ldots, v_k)$.

Théorème d'Ore (1960)

Soit un graphe G (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets.

Si il existe 2 sommets x et y t.q. $\deg(x) + \deg(y) \geq n$.
Le graphe G est hamiltonien SSI $G + \{x, y\}$ l'est.

Preuve du thm. d'Ore.

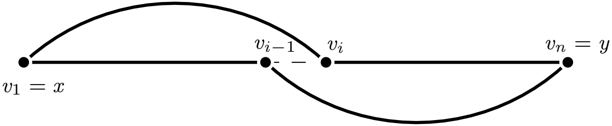
Seul cas non trivial : $\{x, y\}$ n'est pas une arête de G
et on dispose d'un circuit hamiltonien utilisant $\{x, y\}$

$$(x = v_1, v_2, \ldots, v_n = y).$$

Thèse : trouver un autre circuit hamiltonien (sans $\{x, y\}$)

On suppose $n \geq 4$
But : montrer qu'il existe $i \in \{3, \dots, n-1\}$ tel que

$$\{v_1, v_i\} \in E(G) \text{ et } \{v_{i-1}, v_n\} \in E(G)$$



$x = v_1$ a au moins 2 voisins dans G :

v_2 et un sommet dans $\{v_3, \dots, v_{n-1}\}$

sinon, $\deg(v_1) = 1$ et donc, par hypothèse, $\deg(v_n) \geq n-1$
alors, $v_n = y$ voisin de tous les sommets, or $\{x, y\} \notin E(G)$!

Idem, v_n a au moins 2 voisins dans G :

v_{n-1} et un sommet dans $\{v_2, \dots, v_{n-2}\}$.

Par l'absurde :

- Soit $I \subseteq \{3, \dots, n-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_1, v_i\} \in E(G)$. Si $i \in I$, alors $\{v_{i-1}, v_n\} \notin E(G)$.
- Soit $J \subseteq \{3, \dots, n-1\}$ l'ensemble des indices i tels que $\{v_{i-1}, v_n\} \in E(G)$. Si $i \in J$, alors $\{v_1, v_i\} \notin E(G)$.
- Par hypothèse, $\#I + \#J \geq n-2$ (on décompte les arêtes $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_{n-1}, v_n\}$).
- $I \cap J = \emptyset$ donc $\#(I \cup J) = \#I + \#J \geq n-2$.
- Mais $I, J \subseteq \{3, \dots, n-1\}$, donc $\#(I \cup J) \leq n-3$.

Théorème de Chvátal (1972)

Soit G un graphe (simple et non orienté) ayant $n \geq 3$ sommets ordonnés par degré croissant, i.e.,

$$\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n).$$

Si, pour tout $k < n/2$, le graphe satisfait

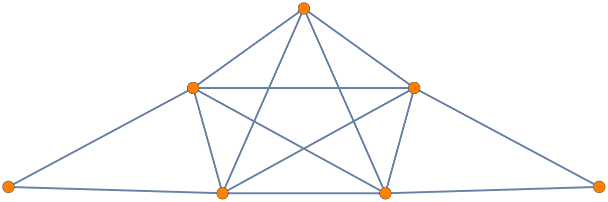
$$\deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k, \tag{1}$$

alors G possède un circuit hamiltonien.

Remarque

Si pour tout couple de sommets non adjacents (x, y), on a $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Alors ce graphe vérifie (1).
La réciproque est fausse.

Un exemple de graphe vérifiant la condition (1)



```
Sort[VertexDegree[%]]
```

$$(2,2,4,5,5,5,5)$$

```
test[l_List] :=
 Apply[And,
  Table[ l[[k]] > k || l[[Length[l]-k]] >= Length[l]-k,
   {k,1,Floor[Length[l]/2]}] ]
```

D'un point de vue 'logique mathématique'

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1)

$$\forall k < n/2, \quad \deg(v_k) \leq k \Rightarrow \deg(v_{n-k}) \geq n - k$$

$n = 7$

$$(2, 2, 4, 5, 5, 5, 5)$$

$k = 1, 2, 3$ $\deg(v_1) = 2 > 1$
$\deg(v_2) = 2 \leq 2$ & $\deg(v_5) \geq 5$
$\deg(v_3) = 4 > 3$

Thèse : montrer que (1) entraîne $\mathcal{F}(G) = K_n$.

1) Si G vérifie (1), $\mathcal{F}(G)$ vérifie aussi (1).

Quand on passe à $\mathcal{F}(G)$, certains degrés augmentent...
Quid de la condition (1) quand un élément "fait $+1$" ?

$$t_1 \leq \cdots \leq t_i \leq \cdots \leq t_n$$

t_i devient $t_i + 1$ et on réordonne en : $s_1 \leq \cdots \leq s_n$.
Vérifions que $s_k \geq t_k$ pour tout k ($\rightsquigarrow$ $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifie (1)).

- Si $t_i + 1 \leq t_{i+1}$, e.g. $(3, 3, \underline{3}, 4, 4, 4, 5)$ et $i = 3$, on remplace le dernier 3 par 4 : $(3, 3, \underline{4}, 4, 4, 4, 5)$. Aucun réarrangement : $s_k = t_k$ si $k \neq i$ et $s_i = t_i + 1 \geq t_i$.
- Si $t_i + 1 > t_{i+1} = \cdots = t_{i+\ell}$, e.g. $(3, 3, 3, \underline{4}, 4, 4, 5)$ et $i = 4$, $\ell = 2$, on doit réarranger :
  - $s_{i+j} = t_{i+j+1} \geq t_{i+j}$ si $j \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$,
  - $s_{i+\ell} = t_i + 1 > t_{i+\ell}$ et
  - $s_k = t_k$ si $k \notin \{i, \ldots, i + \ell\}$.

2) On peut supposer que G est égal à sa fermeture.
Par l'absurde, supposons que $G \neq K_n$.

Donc, il existe $u, v \in V$ t.q. $\{u, v\} \notin E$. et $\deg(u) + \deg(v) < n$.
<u>Choisir</u> u, v tels que $\deg(u) + \deg(v)$ max. et $\deg(u) \leq \deg(v)$.

Soit $i = \text{deg}(u)$. On a $i < n/2$ car, sinon $\text{deg}(u) + \text{deg}(v) \geq n$

$$A = \{w \in V \mid \{w, v\} \notin E(G) \text{ and } w \neq v\} \ni u.$$

Vu le choix de u, v, tout sommet $w \in A$ est t.q. $\text{deg}(w) \leq \text{deg}(u)$.
A contient tous les sommets $\neq v$ non-voisins de v

$$\#A = (n - 1) - \text{deg}(v) \geq \text{deg}(u).$$

$\rightsquigarrow \geq i$ sommets de degré $\leq i$.
Autrement dit, $\deg(v_i) \leq i$ et $i < n/2$.

Donc, vu l'hypothèse (1) on devrait avoir $\deg(v_{n-i}) \geq n - i$.

$$B = \{w \in V \mid \{u, w\} \notin E(G) \text{ and } w \neq u\} \ni v.$$

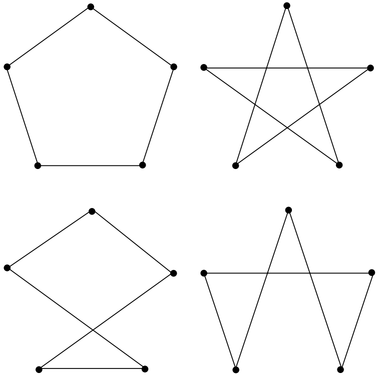
Vu le choix de u, v, tout sommet $w \in A$ est t.q.
$\deg(w) \leq \deg(v) < n - i$.

$$\#B = (n-1) - \deg(u) = n - i - 1.$$

$\rightsquigarrow$ $n - i - 1$ sommets de degré $< n - i$.
De plus, le sommet u de degré i et $i < n - i$.
En effet, $i < n - \deg(v)$ et $\deg(v) \geq i$.

$\rightsquigarrow$ $\geq n - i$ sommets de degré $< n - i$.
Donc $\deg(v_{n-i}) < n - i$ une contradiction !

Partition de K_n en circuits hamiltoniens



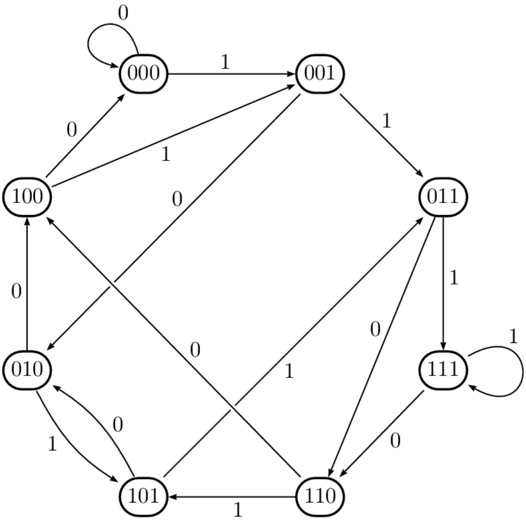
Proposition

Pour $n \geq 3$, K_n peut être partitionné en circuits hamiltoniens disjoints SSI n impair. Le nombre de tels circuits partitionnant K_n vaut $(n-1)/2$.

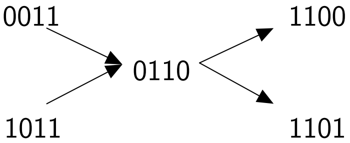
Lemme

Si n pair, K_n peut être partitionné en $n/2$ chemins hamiltoniens disjoints.

Graphe de De Bruijn (d'ordre 3 sur deux symboles) est hamiltonien

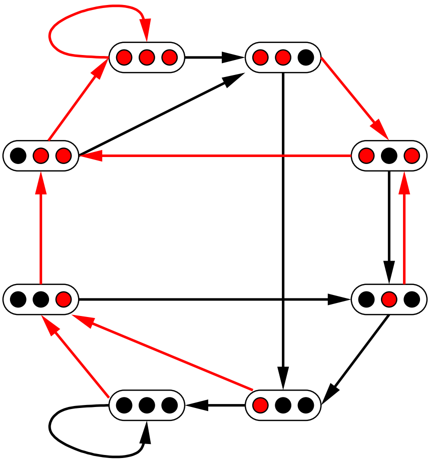


Rappel : on sait que le graphe de De Bruijn d'ordre n est Eulérien

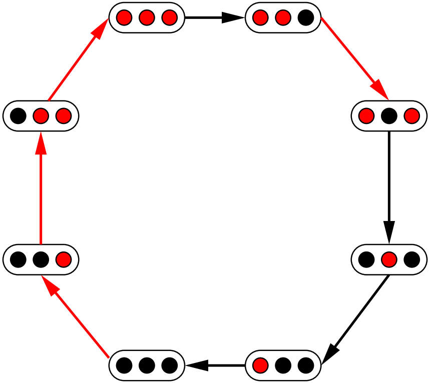


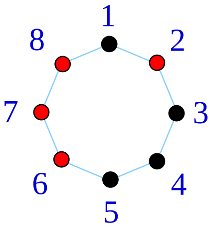
circuit eulérien du graphe d'ordre $n \rightsquigarrow$ circuit hamiltonien du graphe d'ordre $n+1$

les arête de G_n correspondent exactement aux sommets de G_{n+1}

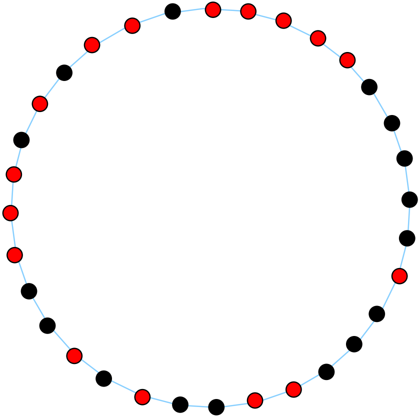


Chaque suite de 3 couleurs rouge/noir apparaît une et une seule fois dans le cyce de longueur 8 :





Chaque suite de 5 couleurs rouge/noir apparaît une et une seule fois dans le cyce de longueur 32 :



http://images.math.cnrs.fr/La-magie-des-colliers-de-perles-de-Nicolaas-Govert-de-Bruijn