Exercices supplémentaires
Nombres complexes

Exercice 1. Soient $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = -1+2i$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1.z_2$. Calculer l'inverse de z_1.

Exercice 2. Même question pour $z_1 = i$ et $z_2 = 1+i$.

Exercice 3. Même question pour $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 1-i$.

Exercice 4. Soient $z_1 = 3+2i$ et $z_2 = 4-3i$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1}$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 5. Pour chacun des nombres complexes donnés ci-après, calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et le conjugué.

1. $z_0 = i$,
2. $z_1 = -2$,
3. $z_2 = 1+\sqrt{3}i$,
4. $z_3 = 1+i$,
5. $z_4 = 3+2i$.

Exercice 6. Mettre sous forme algébrique les quotients

1. $\frac{3+i}{4-i}$,
2. $\frac{i+5}{i-5}$,
3. $\frac{1}{i}$,
4. $\frac{5+3i}{4i+3}$.

Exercice 7. Soit $z = \frac{5-15i}{2-i}$. Mettre z sous forme algébrique et exponentielle (trigonométrique) et le représenter dans le plan complexe.

Exercice 8. Soit $z = 1+i\sqrt{3}$. Calculer le module de z et mettre z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et $\frac{z^6}{32}$ et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = i$, $z_2 = -1+i$ $z_3 = -1$, $z_4 = \sqrt{3}+i$. Calculer le produit $z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique ou exponentielle.

Exercice 10. Mettre sous forme algébrique les nombres $4e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 11. Soit le nombre complexe $z = i - 1$. Ecrire z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et z^4 sous forme exponentielle et algébrique. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels z^n est réel.

Exercice 12. Soit le nombre complexe $z = 1 + i$. Ecrire z sous forme exponentielle. Déterminer z^2 et z^4 sous forme exponentielle et algébrique. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels z^n est réel.

Exercice 13. On donne les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2 - i$ et $a = \frac{z_1^4}{z_2^3}$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4 et z_2^3. Déduire les formes algébriques de z_1^4, z_2^3 et a. Mettre a sous forme exponentielle. Déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14. Calculer les deux racines carrées complexes de -1, $i - 1$, $3 + i$.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes dans le plan complexe :

1. $z^2 + z + 1 = 0$;
2. $(1 + i)z^2 + iz - 1 = 0$;
3. $z^2 = 5 + 12i$;
4. $z^3 = -1$;
5. $z^4 + z^2 - 12 = 0$;
6. $iz^2 + (2 + i)z - i + 1 = 0$;

Exercice 16. Résoudre l'équation $z^2-4z+8 = 0$ dans les nombres complexes et représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 17. Donner, pour chacun des nombres complexes suivants, sa partie réelle, sa partie imaginaire et son module.

$$z_1 = \frac{3 + 6i}{3 - 4i} \qquad z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad z_3 = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$$

Exercice 18. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $z = -\dfrac{4}{3}i$.

Exercice 19. Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = i$, $z_4 = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_5 = 2 - 3i$.

(a) Donner les parties réelles et imaginaires de z_1z_2, $\frac{z_1}{z_4}$ et z_3^2 ;

(b) Donner la forme trigonométrique de z_4, en déduire celle de z_4^6 ;

(c) Donner la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$, en déduire $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$;

(d) Calculer $|z_1|$, $|z_1z_2|$, $|\frac{z_1}{z_4}|$ et $|z_3^3|$.

Exercice 20. Représenter graphiquement le lieu des point $z \in \mathbb{C}$ tels que

(a) $z + \bar{z} = 1$

(b) $z - \bar{z} = i$

(c) $|z + i - 2| \geq 2$

(d) $|z - 1| = |z + 1|$

(e) $z + \bar{z} = |z|^2$

(f) $z + \bar{z} = |z|$

Exercice 21. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les valeurs des sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$;

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx)$;

(d) $\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x) \cos(kx)$;

(e) $\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x) \sin(kx)$;

(f) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.

(a) $z^3 = -2$;

(b) $z^2 = 5 + 12i$;

(c) $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$;

(d) $z^4 + z^2 - 12 = 0$;

(e) $z^3 = \bar{z}$;

(f) $(1 + i)z^2 + (1 - 5i)z - (4 - 2i) = 0$;

(g) $z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0$;

(h) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$;

(i) $(z^2 + 3z - 2)^2 + (2z^2 - 3z + 2)^2 = 0$;

(j) $(1 + i)z^2 - 2i\sqrt{2}z + (1 - i) = 0$.

Exercice 24. Dans quelles conditions la partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle égale au carré de la partie imaginaire du complexe ?

Exercice 25. Représenter graphiquement le lieu des points $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$|1 + iz| = |1 - iz|.$$

Exercice 26. Déterminer les solutions de

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

En déduire les solutions de

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Exercice 27. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $\alpha^5 = 1$.

1. Donner tous les α qui vérifient cette condition.
2. Montrer que $\sum_{i=0}^{4} \alpha^i = 0$.