UNIVERSITÉ de Liège
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Exercices d'Algèbre
(en construction: version 15/09/2008)

Premiers bacheliers en sciences mathématiques
Année académique 2008–2009

Michel Rigo

Table des matières

Introduction

Ce fascicule est en cours de création. Des exercices et des solutions (partielles) seront ajoutés en cours d'année. Nous vous deconseillons donc d'imprimer dans son entièreté ce texte en constante évolution.

La structure des chapitres est semblable à celle du cours théorique.

Les différents exercices de ce fascicule proviennent de sources diverses. Celles-ci sont, dans la mesure du possible, rappelées. En particulier, on précisera s'il s'agit de questions posées lors d'interrogations ou d'examens pour des premiers bacheliers en sciences mathématiques ou en sciences physiques. Enfin, une liste d'exercices compilée par V. Colin a également été ajoutée aux exercices proposés.

Abréviations employées :

- (**Admi. ULg**) Questions posées lors des examens d'admission ingénieur civil, ULg.
- (**BL**) M. Baiwir, P. Laubin, *Exercices d'algèbre linéaire*, Ed. Derouaux.
- (**Bodin**) A. Bodin, *Bibliothèque d'exercices*, `http://math.univ-lille1.fr/~bodin/`.
- (**GKP**) R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, second edition, Addison-Wesley, 1994.
- (**Hefferon**) J. Hefferon, *Linear Algebra*, Saint Michael's College, Colchester, Vermont, `http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`
- (**LM**) F. Liret, D. Martinais, *Algèbre Licence 1ère année MIAS-MASS-SM*, Dunod, 2002.
- (**Matthews**) K. Matthews, *Elementary linear algebra*, Lecture Notes, 1991, `http://www.numbertheory.org/book/`
- (**Quercia**) M. Quercia, *Exercices de Mathématiques*, `http://michel.quercia.free.fr/`
- (**Roudier**) H. Roudier, *Algèbre linéaire, CAPES & Agrégation*, deuxième édition, Vuibert, 2003.
- (**Swokowski-Cole**) E. W. Swokowski, J. A. Cole, *Algèbre et trigonométrie*, De Boeck, 1998.

CHAPITRE I

Nombres complexes et manipulations de base

I.1. **Exercice**. Développer explicitement et calculer les expressions suivantes:

$$\sum_{i=1}^{3} i^2, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} i.j, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} i.j,$$

$$\sum_{0\le i<j\le 4} (j-i), \quad \sum_{k\in\{2,3,5,7\}} (k+1), \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} \delta_{i,j}.$$

I.2. **Exercice** (LM). Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x-3y, -4x+6y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application f n'est pas injective et que

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}.$$

I.3. **Exercice** (LM). Soient les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies, pour tout x réel, par

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x+1).$$

a) L'application f est-elle injective ?
b) Montrer que f n'est pas surjective.
c) Vérifier que $f(\mathbb{N}) = g(\mathbb{N})$.

I.4. **Exercice** (LM). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, i.e., si $x < y$ alors, $f(x) < f(y)$. Démontrer que f est injective.

I.5. **Exercice** (Bodin). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

I.6. **Exercice** (Bodin). L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1. Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

I.7. **Exercice** (Bodin). Soient des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

- si $g \circ f$ est injectif, alors f l'est aussi,
- si $g \circ f$ est surjectif, alors g l'est aussi,
- $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g, h le sont.

I.8. **Exercice** (Admi. ULg 2000). Démontrer les formules suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En déduire, pour $0 \le m < n$, la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} (m-i)(n-i).$$

I.9. **Exercice**. Exprimer en fonction de n la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

I.10. **Exercice**. Exprimer en fonction de n la somme suivante,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{n-k+1}.$$

I.11. **Exercice** (Admi. ULg 2004). Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

I.12. **Exercice** (Identité de Lagrange). Démontrer que

$$\sum_{1\le j<k\le n}(a_jb_k-a_kb_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2.$$

I.13. **Exercice** (Bodin). Calculer

- $\sum_{1\le i\le j\le n} ij$,
- $\sum_{1\le i<j\le n} i(j-1)$,
- $\sum_{1\le i<j\le n}(i-1)j$,
- $\sum_{1\le i\le j\le n}(n-i)(n-j)$.

I.14. **Exercice** (Prépa. 2006). Calculer

(1) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{jk}$,
(2) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{n-k+1}$,
(3) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(j-k)\delta_{j,k+1}$,
(4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$,
(5) $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

I.15. **Exercice** (Admi. ULg 2004). Démontrer que pour tout naturel m, on a

$$\mathrm{C}_{2m+1}^{m} = \mathrm{C}_{2m}^{m}+\mathrm{C}_{2m-1}^{m-1}+\cdots+\mathrm{C}_{m}^{0}.$$

I.16. **Exercice** (GKP). Démontrer que

$$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\mathrm{C}_{n}^{k+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k} = \mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}\mathrm{C}_{n}^{k-1}.$$

I.17. **Exercice** (Bodin). Montrer que pour $0\le p\le n$, on a

$$\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{n}^{k}\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = 2^p\,\mathrm{C}_{n}^{p}$$

et

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\,\mathrm{C}_{n}^{k}\,\mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = 0.$$

I.18. **Exercice**. On donne les nombres complexes

$$z_1=\sqrt{3}-i,\quad z_2=-1+2i,\quad z_3=i,\quad z_4=1+\sqrt{3}i.$$

- Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z_1z_2, $\frac{z_1}{z_4}$ et $(z_3)^2$.
- Donner la forme trigonométrique de z_4. En déduire le calcul de z_4 à la sixième puissance.
- Calculer $|z_1|$, $|z_1/z_4|$, $|z_1z_2|$ et $|(z_3)^3|$.

I.19. **Exercice**. Représentez graphiquement dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé l'ensemble des nombres complexes z satisfaisant

- $z+\overline{z}=1$,
- $z-\overline{z}=i$,
- $|z+i-2|>4$,
- $|z-1|=|z+1|$,
- $z+\overline{z}=|z|$.

I.20. **Exercice** (Quizz Sept. 2003). Soit $z = 3 - 4i$. Calculez $|z|$, $\mathfrak{Re}\, z$, $\mathfrak{Im}\, z$ et $\overline{z}$. Même question avec $2+i$, $-3+4i$, $2i$ et π.

I.21. **Exercice** (Quizz Sept. 2003). Simplifiez au maximum la fraction

$$\frac{(1+i)^3 + 2i\,(i-1)}{2\,i}.$$

I.22. **Exercice** (Quizz Sept. 2003). Si $2e^{i\pi/7}$ est une racine quatrième de z, quelles sont les autres racines quatrièmes de z ? Représentez ces racines dans le plan complexe.

I.23. **Exercice** (Quizz Sept. 2003). Pour chaque énoncé, précisez s'il est vrai, faux ou vide de sens.

	VRAI	FAUX	VIDE DE SENS
La somme de deux racines n-ièmes de l'unité a pour module 1	□	□	□
$i \leq 2$	□	□	□
Le produit de deux racines n-ièmes de l'unité a pour module 1	□	□	□
$\lvert\lvert x\rvert + \lvert y\rvert\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	□	□	□
$\mathfrak{Re}\, z \leq \lvert z\rvert$	□	□	□
La somme des racines 5-ièmes de $3+i$ est nulle	□	□	□

I.24. **Exercice** (Interro 1BP 10/2004). Démontrer que si z est un nombre complexe différent de 1, alors

$$\mathfrak{Re}\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{2\,\mathfrak{Im}\,z}{|1-z|^2}.$$

I.25. **Exercice** (LM). Soit z un nombre complexe non nul tel que $z^3 = i/\overline{z}$. Montrer que z est de module 1 et calculer z.

I.26. **Exercice** (Admi. ULg 2000). Résoudre l'équation

$$z^2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}|z| + 4i.$$

Suggestion : égaler les modules des deux membres pour déterminer $|z|$.

I.27. **Exercice** (Admi. ULg 2003). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0.$$

Suggestion : développer $(z^2+1)^4$.

I.28. **Exercice** (LM). Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On pose $a = z + \frac{1}{z}$.

a) Démontrer que $z^2(a^2 + a - 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
b) Montrer que $a^2 + a - 1 = 0$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.
c) En déduire que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$.
d) Calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/10)$.

I.29. **Exercice** (LM). Soit z un nombre complexe de module 1 tel que $z \notin \mathbb{R}$ et soit a un nombre complexe. Montrer que $|a - z| = |1 - az|$ si et seulement si a est réel.

I.30. **Exercice** (Formule de polarisation). Soient u et v deux nombres complexes. Démontrer que

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4\,\mathfrak{Re}\,(u\overline{v}).$$

I.31. **Exercice** (LM). Posons $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On définit l'application

$$f : E \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que pour tout $z \in E$, on a $1 - f(z) \neq 0$.
c) Démontrer que $f(E) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
d) Soit $z \in E$. Montrer que

$$1 - |f(z)|^2 = 4 \frac{\mathfrak{Im}\, z}{|z+i|^2}.$$

e) Vérifier que $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{1\}$.

I.32. **Exercice** (Matthews). Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = i$.

I.33. **Exercice** (Matthews). Soient

$$C = 1 + \cos\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta \quad \text{et} \quad S = \sin\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta.$$

Démontrer que si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$C = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \cos((n-1)\theta/2) \quad \text{et} \quad S = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \sin((n-1)\theta/2).$$

I.34. **Exercice** (Matthews). Exprimer

$$\sum_{j=0}^{99} (1+i)^j$$

sous la forme $x + i\,y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

I.35. **Exercice** (Matthews). Soit a, b deux nombres complexes distincts et $0 < \alpha < \pi$. On note $\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$, l'argument du nombre complexe z. Montrer que l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant

$$\mathrm{Arg}(\frac{z-a}{z-b}) = \alpha$$

est un arc de cercle. De même, les points du plan complexe satisfaisant $\mathrm{Arg}(\frac{z-a}{z-b}) = 0$ déterminent le segment joignant a et b et $\mathrm{Arg}(\frac{z-a}{z-b}) = \pi$ déterminent la droite passant par a et b privée de ce segment.
En déduire que 4 points distincts z_1, z_2, z_3, z_4 du plan complexe sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} / \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

est un nombre réel.

I.36. **Exercice** (BL). Démontrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha - \beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$
$$|1 - \alpha\overline{\beta}|^2 - |\alpha - \beta|^2 = (1 - |\alpha\beta|)^2 - (|\alpha| - |\beta|)^2.$$

I.37. **Exercice** (BL). Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{z}{|z|^2} - \frac{w}{|w|^2} \right| = \frac{|z-w|}{|z|\,|w|}.$$

I.38. **Exercice** (BL). Démontrer que si a et b sont des nombres complexes distincts de module 1, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{b-a}$$

est imaginaire pur.

I.39. **Exercice** (BL). Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes,

- $z^2 = 5 + 12i$,
- $z^3 = 2$,
- $z = z^2$,
- $(1+i)z^2 + (1-5i)z - (4-2i) = 0$.

I.40. **Exercice** (BL). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle possède une racine imaginaire pure,

$$z^3 + 3z^2 + (9 - 4i)z + 15 = 0.$$

I.41. **Exercice** (BL). Pour les valeurs entières de $k, n > 0$, discuter la valeur de la somme suivante

$$\sum_{\ell=1}^{n} (e^{\frac{2i\ell\pi}{n}})^k.$$

I.42. **Exercice** (BL). Soit ω une racine cubique de l'unité distincte de 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,

$$|a+b|^2 + |a+\omega b|^2 |a+\omega^2 b|^2 = 3(|a|^2 + |b|^2).$$

I.43. **Exercice** (Quercia). Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
- j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
- $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
- $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

I.44. **Exercice** (Quercia). Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

- z, z^2, z^4 sont alignés
- $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.
- $z, \dfrac{1}{z}, -i$ sont alignés

CHAPITRE II

Matrices, opérations élémentaires

II.1. **Exercice** (Prépa. 2006). Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi \\ \sqrt{2} & i \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i+1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i+1 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i+1 & 0 \\ 0 & 4 & i \end{smallmatrix}\right)$. Calculer, si possible, les produits AB, BA, BC, CB, BD, AD, A^2, iC, $3iAC + (i+1)C$, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, D^*, C^*B, C^*A.

II.2. **Exercice** (Prépa. 2006). Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension, développer et simplifier $(2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

II.3. **Exercice** (Prépa. 2006). Déterminer, en justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(1) L'addition entre matrices de même type est commutative.
(2) L'addition entre matrices de même type est associative.
(3) La multiplication entre matrices est, lorsqu'elle est définie, commutative.
(4) La multiplication entre matrices est, lorsqu'elle est définie, associative.
(5) Toute matrice admet un inverse pour l'addition.
(6) Toute matrice admet un inverse pour la multiplication.
(7) Toute matrice carrée non nule admet un inverse pour la multiplication.
(8) Une matrice carrée à coefficients complexes satisfait à $A^* = A$ si et seulement si les éléments de sa diagonale principale sont nuls.
(9) Une matrice carrée à coefficients complexes satisfait à $A^* = A$ si et seulement si les éléments de sa diagonale principale sont réels.

II.4. **Exercice** (Prépa. 2006). Quels sont les matrices A à coefficients réels qui commutent avec $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (c'est-à-dire telles que $A.\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).A$)?

II.5. **Exercice** (Prépa. 2006). Déterminer les matrices réelles A qui satisfont à $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

II.6. **Exercice** (Prépa. 2006). Donner la forme générale d'une matrice réelle A qui commute avec toutes les matrices réelles de type 2×2.

II.7. **Exercice** (Prépa. 2006). Calculer les différentes puissances de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

II.8. **Exercice** (Prépa. 2006). Montrer que si A désigne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout naturel n.

II.9. **Exercice** (Prépa. 2006). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver les matrices réelles B telles que $AB = BA$.

II.10. **Exercice** (Prépa. 2006). Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels les matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{smallmatrix}\right)$ commutent.

II.11. **Exercice** (Prépa. 2006). Pour tout nombre réel θ, on pose

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel θ, on a $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

II.12. **Exercice** (Prépa. 2006). On considère la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Caractériser l'ensemble des matrices à coefficients complexes qui commutent avec M.
(2) Caractériser l'ensemble des matrices à coefficients réels qui commutent avec M.

II.13. **Exercice** (Prépa. 2006). Une *combinaison linéaire réelle des matrices* de même type $A_1, \ldots, A_n$ est une matrice C pour laquelle il existe des nombres réels $r_1, \ldots, r_n$ tels que $C = \sum_{i=1}^n r_i A_i$.

(1) Montrer que la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas combinaison linéaire réelle des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(2) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver trois réels a, b, c tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$ (I désigne la matrice identité de dimension 3).
(3) Soit A une matrice carrée de dimension q et $X_1, \ldots, X_q$ des matrices de type $q \times 1$ telles que $A.X_i = 0$ pour tout i dans $\{1, \ldots, q\}$. Montrer que si X est une combinaison linéaire réelle de $X_1, \ldots, X_q$ alors $A.X = 0$.

II.14. **Exercice** (Prépa. 2006). Calculer le carré de la matrice A de type $n \times n$ définie par $A_{ij} = \frac{1}{n}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

II.15. **Exercice** (Prépa. 2006). Déterminer les puissances successives de la matrice carrée A définie par $A_{ij} = \delta_{n-i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

II.16. **Exercice** (Prépa. 2006). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2. Trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$
(2) Montrer qu'il existe pour tout naturel n deux réels a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n I$
(3) Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

II.17. **Exercice** (Prépa. 2006). Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et $B = A - 2I$.

(1) Calculer B^2 et B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.
(2) En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n.

II.18. **Exercice** (1BM Janvier 2005). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.19. **Exercice** (Interro 1BM 10/2005). Soit λ un nombre complexe. On définit la matrice

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[M(\lambda)]^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\ \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\ \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\ \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que si $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}[M(\lambda)]^n = 0$ et que si $|\lambda| \geq 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[M(\lambda)]^n}{n^3\ \lambda^{n-3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.20. **Exercice** (1BP Janvier 2005). Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors } B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3n & 3n(n-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.21. **Exercice**. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 6-9i \\ 2-2i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$? Même question sur $\mathbb{R}$?

II.22. **Exercice**. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ? Même question pour les vecteurs

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

II.23. **Exercice**. Soient a, a_2, a_3 trois vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} v_1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ v_2 = a_1 - a_2 + a_3 \\ v_3 = a_1 + a_2 - a_3. \end{cases}$$

Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

II.24. **Exercice**. Soient a, a_2, a_3 trois vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. A quelles conditions sur les réels α et β, les vecteurs

$$\begin{cases} v_1 = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ v_2 = \alpha a_2 + \beta a_3 \\ v_3 = \alpha a_3 + \beta a_1 \end{cases}$$

sont-ils linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$?

II.25. **Exercice**. Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $1, \sin x, \cos x$ sont-elles linéairement indépendantes. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$\begin{cases} f(x) = m + \cos x + \sin x \\ g(x) = 1 + m\cos x + \sin x \\ h(x) = 1 + \cos x + m\sin x \end{cases}$$

sont-ils linéairement indépendantes ?

II.26. **Exercice**. Vérifier que si

$$R = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix},$$

alors $R(R^2 + (x^2 + y^2 + z^2)I) = 0$.

II.27. **Exercice**. Soit la matrice carrée $A = (1/n)_{1 \le i,j \le n}$. Calculer A^2.

II.28. **Exercice**. Soit la matrice carrée $A = (\delta_{i+1,j})_{1 \le i,j \le n}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

commutent.

II.29. **Exercice**. Soient A et B deux matrices carrées de dimension n telles que pour tous $1 \le j, k \le n$,

$$A_{jk} = \delta_{j+1,k} + \delta_{j,n+k-1} \text{ et } B_{jk} = \delta_{n-j,k}.$$

Déterminer les coefficients $(AB)_{jk}$ et $(BA)_{jk}$. Ecrire explicitement A, B, AB et BA.

II.30. **Exercice** (1BP Sept. 2004). On considère dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, les vecteurs u, v, w, x sont-ils linéairement indépendants ?

II.31. **Exercice** (Interro 1BM 10/2004). Répondre aux questions suivantes.
a) Caractériser l'ensemble $\mathcal{A}_M$ des matrices de $\mathbb{C}^2_2$ qui commutent avec la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Caractériser les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}_M \cap \mathbb{R}^2_2$, i.e., les matrices réelles commutant avec M.
c) Pour tout nombre réel θ, on pose

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a

$$(R(\theta))^n = R(n\theta).$$

II.32. **Exercice** (Interro 1BP 10/2005). Répondre aux questions suivantes.

a) Caractériser l'ensemble des matrices de $\mathbb{R}^2_2$ qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

où α est un nombre réel non nul fixé.

b) A-t-on, pour tous $A, B \in \mathbb{R}^2_2$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?
Justifier votre réponse à l'aide d'une preuve ou d'un contre exemple.

II.33. **Exercice** (Interro 1BP 10/2005). Voici un exemple de produit scalaire.

a) Démontrer que l'application $B : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 : (x,y) \mapsto B(x,y)$ définie par

$$B(x,y) = y^* Mx \text{ où } M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une forme bilinéaire gauche, hermitienne et définie positive.

b) Soient $a, b \in \mathbb{C}^3$. On pose $a \perp_B b$ si et seulement si $B(a,b) = 0$. Caractériser les vecteurs $x \in \mathbb{C}^3$ tels que $x \perp_B y$ où

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $x = i\,e_1 + e_2 + \beta\, e_3$, que vaut β pour que $x \perp_B y$.

II.34. **Exercice** (Interro 1BP 10/2005). A quelle(s) condition(s) sur le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.35. **Exercice** (Interro 1BP 11/2003). On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m, ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

II.36. **Exercice** (Roudier). Une matrice $A \in \mathbb{K}^n_n$ est *nilpotente* s'il existe $k \geq 0$ tel que $A^k = 0$. Soient $A, b \in \mathbb{K}n_n$.

a) Si AB est nilpotent, montrer que BA l'est aussi.

b) Si A et B sont nilpotents et commutent, montrer que $A+B$ est aussi nilpotent.
c) Donnez un contre-exemple de la propriété b) lorsque A et B ne commutent pas.

II.37. **Exercice** (Mathhews). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $A^3 = 3A^2 - 3A + I$.
b) Exprimez A^4 comme un polynôme en A^2, A et I.

II.38. **Exercice** (Examen août 2006). Soit $f : \mathbb{R}^n_n \to \mathbb{R}$ une fonction multiplicative (i.e., pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^n_n$, $f(A.B) = f(A).f(B)$). On suppose en outre que f diffère de la fonction nulle et de la fonction constante 1.
a) Que vaut $f(I)$? (Jusitifier)
b) Que vaut $f(0)$? (Jusitifier)
c) Démontrer que si A est inversible, alors $f(A) \neq 0$.

II.39. **Exercice** (Examen août 2006). Pour tous $A, B \in \mathbb{R}^n_n$, on considère l'application

$$\mathbb{R}^n_n \times \mathbb{R}^n_n \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(\widetilde{A}B).$$

Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n_n$. (Pour rappel, un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.) Pour ce produit scalaire particulier, que vaut la norme de la matrice identité ?

II.40. **Exercice** (Quercia). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = I + J$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

II.41. **Exercice**. Un *vecteur de probabilité* est un vecteur (ligne ou colonne) dont les composantes sont des nombres réels positifs ou nuls et dont la somme vaut 1. Une matrice dont les lignes sont toutes des vecteurs de probabilité est dite *stochastique*. Montrer que si A est stochastique, alors A^2 l'est aussi.

II.42. **Exercice** (Interrogation Octobre 2007). En supposant que cela ait un sens (i.e., le domaine de définition de la fonction f_M définie ci-dessous peut ne pas être $\mathbb{C}$ tout entier), à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2_2$, on associe l'application

$$f_M : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Vérifiez que pour tout nombre complexe z, $f_I(z) = z$.
b) En supposant une fois encore que les expressions présentes ci-dessous aient du sens, démontrez que pour tous $M, N \in \mathbb{R}^2_2$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$f_M(f_N(z)) = f_{M.N}(z)$$

c) Déterminez les matrices A de $\mathbb{R}^2_2$ pour lesquelles f_A est défini en i et telles que

$$f_A(i) = i.$$

CHAPITRE III

Permutations

III.1. **Exercice**. Soient les permutations

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $\mu\nu$, $\nu\mu$, $\mu\mu$ et $\nu\nu$.
b) Quels sont les élements appartenant à $\{\mu^n \mid n \geq 0\}$ et $\{\nu^n \mid n \geq 0\}$ respectivement ?
c) Quel est l'inverse de μ ?
d) Décomposer μ et ν en un produit de cycles disjoints.
e) Décomposer μ en un produit de transpositions.
f) Quelle est la signature de μ, de ν et de $\mu\nu$?

III.2. **Exercice**. Calculer la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 10 & 6 & 5 & 1 & 7 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

III.3. **Exercice**. Soit les cycles $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\sigma\sigma$ et $\tau\tau$.
b) Quels sont les élements appartenant à $\{\sigma^n \mid n \geq 0\}$ et $\{\tau^n \mid n \geq 0\}$ respectivement ?
c) Quel est l'inverse de σ ?
d) Décomposer σ en un produit de transpositions.
e) Lequel de σ ou τ est une permuation paire ?

III.4. **Exercice** (Interro 1BM 11/2003). On considère l'ensemble G_n des matrices carrées de dimension n sur le champ $\mathbb{K}$ défini par

$$G_n = \{A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mid \exists \nu \in \mathcal{S}_n : a_{i,j} = \delta_{j,\nu(i)}\}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

a) Vérifier qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ appartient à G_n si et seulement si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1.$$

b) Montrez que G_n muni de l'opération de multiplication de matrices est un groupe.

III.5. **Exercice** (J. Hefferon). Pour toute permutation ϕ, on définit l'entier $g(\phi)$ comme

$$g(\phi) = \prod_{i<j} |\phi(i) - \phi(j)|.$$

a) Calculer la valeur de g pour toutes les permutations de $\mathcal{S}_2$,
b) Calculer la valeur de g pour toutes les permutations de $\mathcal{S}_3$,
c) Démontrer que

$$\operatorname{sign} \phi = \frac{g(\phi)}{|g(\phi)|}.$$

CHAPITRE IV

Déterminants, rang, inversion de matrices

IV.1. **Exercice**. Calculer
$$\det\begin{pmatrix} a & 3b & 0 & 0\\ b & a & 2b & 0\\ 0 & 2b & a & b\\ 0 & 0 & 3b & a\end{pmatrix}.$$

IV.2. **Exercice** (Swokowski-Cole). Démontrer que
$$\det\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix}$$
est l'équation d'un cercle passant par trois points non alignés de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

IV.3. **Exercice**. Calculer
$$\det\begin{pmatrix} x & y & \cdots & y\\ y & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & y\\ y & \cdots & y & x\end{pmatrix}$$

IV.4. **Exercice**. Calculer
$$\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b}\\ \frac{1}{b+c} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{a+b}\\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & -\frac{1}{c}\end{pmatrix}$$

IV.5. **Exercice**. Calculer
$$\det\begin{pmatrix} m & -a & 0 & 0 & 0\\ m & m & -b & 0 & 0\\ m & m & m & -c & 0\\ m & m & m & m & -d\\ m & m & m & m & m\end{pmatrix}.$$

IV.6. **Exercice** (LM). Pour tout $n \geq 2$, on pose
$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) Calculer Δ_2 et Δ_3.
b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

IV.7. **Exercice** (LM). Soient $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ des éléments d'un champ $\mathbb{K}$. Vérifier que

$$\det \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

IV.8. **Exercice** (Examen 1BP août 2006). Etudier le rang de la matrice M en fonction du paramètre réel α,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.9. **Exercice** (Examen 1BP août 2006). Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a & c & c & -a \\ c & a & -a & c \\ c & -a & a & c \\ -a & c & c & a \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions ce déterminant est-il nul ?

IV.10. **Exercice** (LM). Soient $n \geq 2$ un entier et $A \in \mathbb{K}^n_n$.

a) Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.
b) Si n est impair et si $\widetilde{A} = -A$, alors vérifier que $\det(A) = 0$.

IV.11. **Exercice**. Calculer, s'il existe, l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.12. **Exercice** (BL). Soient $A, B, C \in \mathbb{C}^n_n$. A quelles conditions la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.

IV.13. **Exercice** (Matthews). Démontrer que

$$\det \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

et

$$\det \begin{pmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{pmatrix} = -8.$$

IV.14. **Exercice** (Matthews). Démontrer que

$$\det \begin{pmatrix} 1+x & x & x & x \\ y & 1+y & y & y \\ z & z & 1+z & z \\ t & t & t & 1+t \end{pmatrix} = 1+x+y+z+t.$$

IV.15. **Exercice** (Interro 1BP 10/2004). Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

IV.16. **Exercice** (Vandermonde). Démontrer que

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i - x_j).$$

IV.17. **Exercice** (Swokowski-Cole). Démontrer que

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{pmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

IV.18. **Exercice** (Interro 1BP 11/2004). En fonction du paramètre réel λ, calculez le rang de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & -2 & 2\\ 3 & \lambda & 2 & 2\\ \lambda & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

IV.19. **Exercice** (Interro 1BP 11/2003). Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice réelle carrée de dimension n telle que

$$a_{i,j} = i^j.$$

a) Si $n = 3$, représenter A et calculer $\det A$.
b) Dans le cas général, démontrer que

$$\det A = 1!\,2!\,\cdots\,n!.$$

Suggestion : on peut procéder en appliquant successivement la règle des mineurs. A la i-ième application, remplacez la colonne C_j par $C_j - i\,C_{j-1}$ pour $j = i+1,\ldots,n$.

IV.20. **Exercice** (1BM Janvier 2005). On considère l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}_5)^3$ constitué des triplets d'éléments de $\mathbb{Z}_5$ (i.e., d'entiers modulo 5), sur le champ $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ? Justifier.

IV.21. **Exercice** (1BP Janvier 2005). Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix}2\alpha+\beta & 3\alpha & 2\beta\\ 1-\alpha & 1-\beta & 2\\ 2+2\alpha & 2\beta & 4\end{pmatrix}$$

a) Calculer $\det A$ en fonction de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
b) A quelles condition sur les nombres réels α et β, ce déterminant est-il nul ?

IV.22. **Exercice** (1BM Janvier 2005). Discuter en fonction du paramètre complexe t, le rang de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix}2 & t & i & (3+2i)t\\ i & 0 & 1 & 0\\ t & 2t & t & 0\end{pmatrix}.$$

IV.23. **Exercice** (LM). Montrer que la matrice suivante de $\mathbb{C}_3^3$ est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix}$$

IV.24. **Exercice** (Matthews). Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, démontrer que A n'est pas inversible.
Si A est une matrice carrée distincte de I telle que $A^2 = A$, démontrer que A n'est pas inversible.

IV.25. **Exercice** (Matthews). On se place sur le champ $\mathbb{Z}_2$ des entiers modulo 2. Vérifier que la matrice suivante est inversible et en calculer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que par contre, la matrice suivante n'est pas inversible sur $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.26. **Exercice** (LM). Pour tout nombre réel t, on pose

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (t^2-4t)e^t & 2+2(t-1)e^t \\ 0 & e^t & te^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, $R(s)R(t) = R(s+t)$.
b) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ est inversible et calculer son inverse.

IV.27. **Exercice** (LM). Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour toute matrice inversible $P \in \mathbb{R}_3^3$, on a

$$(P^{-1}DP)^2 = -P^{-1}DP \quad \text{et} \quad P^{-1}DP \neq -I.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_3^3$ une matrice telle que $A^2 = -A$ et $A \neq -I$. Calculer $A(A+I)$ et en déduire que A n'est pas inversible.

IV.28. **Exercice** (Janvier 2006). Soit A une matrice carrée complexe de dimension $2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que si A est anti-symétrique, i.e., $\widetilde{A} = -A$, alors $\det(A) = 0$.

IV.29. **Exercice** (BL). Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} bM + xI & bM + aI \\ bM + aI & bM + xI \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det D$ en utilisant les formules de Frobenius-Schür.

IV.30. **Exercice** (BL). Soient $I, A, B, D \in \mathbb{C}_n^n$. En utilisant les formules de Frobenius-Schür, exprimer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I & D \\ I & A & 0 \\ C & 0 & B \end{pmatrix}$$

en fonction de $\det(B + CAD)$.

IV.31. **Exercice** (BL). Pour tous $A, B \in \mathbb{C}_n^n$, montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B) \text{ et } \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB).$$

IV.32. **Exercice** (BL). Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

IV.33. **Exercice** (Janvier 2007). Soient $n \geq 2$ un entier et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Simplifier au maximum l'expression suivante (en réduisant au maximum les calculs à effectuer)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ \omega^{n-1} & 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-2} \\ \omega^{n-2} & \omega^{n-1} & 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-1} & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & \cdots & \cdots & \omega^{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.34. **Exercice** (Examen Août 2007). Soient $\omega = e^{2i\pi/n}$ et la matrice $n \times n$ définie par

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leq k, \ell \leq n}.$$

Expliciter la matrice A^2 et calculer $\det A^2$.
(*Suggestion* : discuter la valeur de $[A^2]_{k,\ell}$ en fonction de $k + \ell$.)

IV.35. **Exercice** (Examen Août 2007). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \geq 0$. (Suggestion : décomposer A en $I + J$ où I est la matrice identité.)

IV.36. **Exercice** (Examen "à blanc" Janvier 2008). Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ une matrice carrée de dimension n. On définit une matrice carrée B de dimension n telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$, sa j-ième colonne est la somme des colonnes de A d'indices différents de j. Par exemple, pour $n = 3$, on a

$$B = \begin{pmatrix} C_2 + C_3 & C_1 + C_3 & C_1 + C_2 \end{pmatrix}.$$

Comparez $\det A$ et $\det B$ pour les valeurs $n = 3$ et $n = 4$.

CHAPITRE V

Systèmes d'équations linéaires

V.1. **Exercice** (Admi. ULg 2000). Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} ax + a^2y = a^3 \\ b^3x + b^2y = b \\ x + y = a \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

V.2. **Exercice** (Admi. ULg 2003). Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel.

$$\begin{cases} ax + a^2y + a^3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ a^3x + a^2y + az = 0. \end{cases}$$

V.3. **Exercice** (Matthews). Soit B une matrice réelle $n \times n$ telle que $B^3 = 0$. Si $A = I - B$, démontrer que A est inversible et que $A^{-1} = I + B + B^2$. Montrer que le système d'équations linéaires $Ax = b$ possède la solution

$$x = b + Bb + B^2b.$$

Si

$$B = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vérifier que $B^3 = 0$ et utiliser le premier point pour calculer explicitement $(I - B)^{-1}$.

V.4. **Exercice** (1BM Janvier 2003). Discuter et résoudre le système suivant où λ et μ sont deux paramètres réels.

$$\begin{cases} x & + & \lambda\, y & + & \mu\, z & + & \lambda\, t & = & 1 \\ \lambda\, x & + & 2\, y & & & + & t & = & \lambda \\ \mu\, x & + & (\lambda+2)\, y & + & \mu\, z & + & (\lambda+1)\, t & = & \mu \\ \lambda\, x & & & & & + & t & = & \mu. \end{cases}$$

Pour ne pas alourdir les calculs, si pour certaine(s) valeur(s) des paramètres, vous montrez que le système possède une unique solution, alors **dans ce cas seulement**, il est inutile d'en fournir la solution explicite.

V.5. **Exercice** (Examen 1BM/1BP Août 2005). Résoudre et discuter le système suivant en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \beta\, x + (\beta+1)\, y + (\beta-1)\, z &= 2\beta + 3 \\ x + (\beta+1)\, y + (1-\beta)\, z &= 4\beta + 1 \\ (\beta+1)\, x + 2(\beta+1)\, y &= 6\beta + 4 \end{cases}$$

V.6. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). Discuter la compatibilité du système en fonction des paramètres complexes a, b :

$$\begin{cases} x + iz = 1 \\ ax + by = b \\ bx - az = b \\ ay + z = a. \end{cases}$$

Lorsque le système est compatible, préciser la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé (solution unique, infinité simple, double ou triple de solutions).

V.7. **Exercice** (Examen 1BP Juin 2004). Discuter et résoudre le système suivant (β étant un paramètre réel)

$$\begin{cases} \beta\, x + 3y + 3z = \beta \\ x + \beta\, z = \beta \\ 2x + \beta\, y = 0. \end{cases}$$

V.8. **Exercice** (Interro 1BP 02/2004). A quelle(s) condition(s) sur le paramètre réel λ, le système suivant est-il compatible (on demande uniquement d'étudier la compatibilité du système. Sa résolution complète n'est pas demandée) ?

$$\left\{ \begin{array}{rlll} x & +\lambda y & +(\lambda-1)z & = & \lambda \\ (3+\lambda)x & +2y & & = & 0 \\ \lambda x & +(2+\lambda)y & +\lambda z & = & 2\lambda \\ 4x & & -z & = & -\lambda \end{array} \right.$$

Dans chacun des cas où le système est compatible, précisez s'il existe une unique solution (resp. infinité simple, double ou triple de solutions).

V.9. **Exercice** (1BM Janvier 2005). Pour quelle(s) valeur(s) des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} \alpha\, x - 2\, y + \beta z = \alpha \\ x + \alpha\, y + \beta\, z = \beta. \end{cases}$$

Lorsque le système ci-dessus est compatible, quelle est la dimension du système homogène associé ?

V.10. **Exercice** (Janvier 2006). Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}_n^n$ pour lesquelles il existe un entier $k \geq 2$ tel que

$$B^k = 0, \quad B^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad A = I - B.$$

a) Démontrer que B n'est pas inversible.
b) Démontrer que A est inversible et que $A^{-1} = I + B + \cdots + B^{k-1}$
c) Le système $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{C}^n$ est-il de Cramer ? Si oui, en donner explicitement la solution.

V.11. **Exercice** (BL). Discuter et résoudre pour $a, b \in \mathbb{C}$ fixés, le système suivant

$$\begin{cases} ay + z = 2 \\ 2x + 5y = 1 \\ -2x + y + bz = 3. \end{cases}$$

V.12. **Exercice**. Discuter et résoudre pour $a, b \in \mathbb{C}$ fixés, le système suivant

$$\begin{cases} ax + by + bz + at = 1 \\ bx + ay + az + bt = 1 \\ x + y + z + t = c \end{cases}$$

V.13. **Exercice**. Discuter et résoudre pour $a, b \in \mathbb{C}$ fixés, le système suivant

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ ay - bz = -a \\ -bx + az = a \\ ay + z = b \end{cases}$$

V.14. **Exercice** (Examen Janvier 2008). Etudier la compatibilité et résoudre le système suivant (où m est un paramètre réel).

$$\left\{\begin{array}{rl} m\,x + (m-1)\,y = & m+2 \\ (m+1)\,x - m\,y = & 5m+3 \end{array}\right.$$

V.15. **Exercice** (Examen Juin 2008). Discuter et résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel a,

$$\left\{\begin{array}{r} x + ay + 2z = 0 \\ ax + ay + 2z = 2. \end{array}\right.$$

CHAPITRE VI

Polynômes et fractions rationnelles

VI.1. **Exercice**. Déterminer la multiplicité de $z = 2$ comme zéro du polynôme
$$P(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8.$$

VI.2. **Exercice**. Démontrer que $z = 1$ est un zéro triple pour chacun des polynômes suivants :
$$\begin{array}{ll} (a) & P(z) = z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1, \text{ avec n>1}, \\ (b) & P(z) = z^{2n+1} - (2n+1)z^{n+1} + (2n+1)z^{n-1} - 1. \end{array}$$

VI.3. **Exercice**. Factoriser dans $\mathbb{C}[z]$ les polynômes suivants : (a) $P(z) = z^{2n} - 2z^n + 2$
(b) $P(z) = z^{2n} + z^n + 1$

VI.4. **Exercice**. Déterminer des polynômes U et V de $\mathbb{C}[X]$ tels que
$$(X^7 - X - 1)U + (X^5 + 1)V = 1.$$

VI.5. **Exercice**. Factoriser $X^4 + X^2 + 1$ et $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $X^4 - X^2 + 1$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

VI.6. **Exercice**. Décomposer en fractions simples de $\mathbb{C}(X)$
$$\frac{1}{X^n - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{X(X^2+1)\dots(X^2+n^2)}.$$

VI.7. **Exercice**. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

VI.8. **Exercice** (Examen 1BP Août 2005). Calculer le p.g.c.d. des polynômes
$$X^4 + 8X^3 + 23X^2 + 28X + 12 \quad \text{et} \quad X^3 + 7X^2 + 14X + 8.$$

VI.9. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Soit le polynôme $P(z) = z^3 + a\,z^2 + b\,z + c$ de $\mathbb{C}[z]$ ayant α, β, γ comme racines. Montrer que
$$\left\{ \begin{array}{rcc} \alpha + \beta + \gamma & = & -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma & = & b \\ \alpha\beta\gamma & = & -c. \end{array} \right.$$

VI.10. **Exercice** (Examen 1BP Sept. 2004). Réduire en fractions simples sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante
$$\frac{x^2 + 4x - 3}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

VI.11. **Exercice** (Interro 1BM 02/2005). Soit a un réel. Décomposer la fraction rationnelle
$$R(x) = \frac{x^5}{(x^2 + a)^2}$$
en fractions rationnelles simples sur $\mathbb{R}$.

VI.12. **Exercice** (Interro 1BP 02/2004). Pour chacune des assertions suivantes, précisez si elle est **vraie ou fausse** et à chaque fois, **justifiez** votre réponse.

a) Le rang de la matrice augmentée $(A|b)$ d'un système linéaire $Ax = b$ peut être strictement inférieur au rang de A.

b) Si une relation linéaire a lieu entre deux lignes d'un système d'équations linéaires et également entre les éléments correspondants du second membre, alors ce système est compatible.
c) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel.
d) L'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible est un espace vectoriel.
e) Le p.g.c.d. de deux polynômes de $\mathbb{C}[z]$ est unique.
f) Un polynôme à coefficients complexes n'a que des zéros simples.
g) Un polynôme à coefficients réels peut avoir des zéros non réels.
h) Un polynôme à coefficients réels de degré impair a toujours un zéro réel.
i) Un polynôme à coefficients réels de degré pair et non constant a toujours un zéro réel.
j) Si R est une fraction rationnelle réelle, alors les décompositions en fractions simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de R coïncident.

VI.13. **Exercice** (Interro 1BP 02/2004). Décomposez en fractions simples sur $\mathbb{R}$ la fraction

$$\frac{x^5 - 3x^4 + x^3 - 34x^2 - 21x - 72}{x^4 - 4x^3 - x^2 - 16x - 20}.$$

On sait en outre que le dénominateur possède $2i$ comme zéro.

VI.14. **Exercice** (Admi. ULg 2001). Soient z_1, z_2, z_3 les trois racines du polynôme

$$24z^3 - 26z^2 + 9z - 1.$$

Calculer

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}.$$

Suggestion : identifier le polynôme et sa décomposition en facteurs pour obtenir la somme, le produit et la somme des produits 2 à 2 des racines.

VI.15. **Exercice** (Admi. ULg 2001). Pour quelles valeurs réelles de m, le polynôme $mx^2 + 2mx + 1$ possède-t-il deux racines distinctes dans l'intervalle $]-2, 0[$?

VI.16. **Exercice** (Examen août 2006). Déterminer un pgcd des polynômes

$$P(x) = 18 - 39\,x + 20\,x^2 + 6\,x^3 - 6\,x^4 + x^5$$

et

$$Q(x) = 12 - 28\,x + 23\,x^2 - 8\,x^3 + x^4.$$

Suggestion : pour vérifier vos calculs, lors de la dernière étape de l'algorithme d'Euclide, vous pouvez utiliser le fait que

$$-6 + 5x + 2x^2 - x^3 = -\frac{1}{16}(2 + x)(48 - 64x + 16x^2).$$

CHAPITRE VII

Diagonalisation

VII.1. **Exercice** (Hefferon). Soit x un vecteur propre de valeur propre λ de la matrice A. Vérifier que $\alpha A + \beta I$ a x comme vecteur propre de valeur propre $\alpha\lambda + \beta$. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\alpha A + \beta I$ l'est.

VII.2. **Exercice** (Examen 1BP Sept. 2004). On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, préciser si elle est diagonalisable et le cas échéant, la diagonaliser (i.e., construire une matrice S telle que $S^{-1}AS$ ou $S^{-1}BS$ soit diagonale et en préciser la forme correspondante).

VII.3. **Exercice** (Examen 1BP Août 2005). Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $M \in \mathbb{C}_n^n$ telle que $A = M^{-1}BM$. Montrer que les matrices A et B données ci-dessous sont semblables,

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -8 & -15 & 8 \\ -10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

(*Suggestion* : tenter d'abord de diagonaliser A et B)

VII.4. **Exercice** (Hefferon). Soient P un polynôme et A, B deux matrices semblables. Démontrer que $P(A)$ et $P(B)$ sont aussi des matrices semblables.

VII.5. **Exercice** (Hefferon). Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. Vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

est toujours diagonalisable.

VII.6. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). On considère la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ -1-\alpha & 2+\alpha & -1-\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1+\alpha & -1-\alpha & 1+\alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

a) En fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de B ainsi que leur multiplicité algébrique et géométrique.
b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice B est-elle diagonalisable ?
c) Pour toute valeur de α telle que B soit diagonalisable, construire une matrice S qui diagonalise B et donner la forme de $S^{-1}BS$ correspondante.

VII.7. **Exercice** (Examen 1BP Août 2005). Sans calculer explicitement les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

déterminer les valeurs de

a) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,
b) $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$,
c) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

VII.8. **Exercice** (Quercia). Diagonaliser les matrices suivantes

- $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

VII.9. **Exercice** (Quercia). Montrer que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables

- $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

VII.10. **Exercice** (Quercia). Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A et B sont semblables.

VII.11. **Exercice** (Quercia). Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

VII.12. **Exercice** (Quercia). Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables.

VII.13. **Exercice** (Quercia). Soient

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A et B ont même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$).

VII.14. **Exercice** (Hefferon). Démontrer que si a, b, c, d sont des entiers tels que $a+b=c+d$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

possède deux valeurs propres entières.

VII.15. **Exercice**. Soit A une matrice carrée tel que pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = c$. Démontrer que c est valeur propre de A.

VII.16. **Exercice** (Examen 1BP Juin 2005). Soit λ un nombre réel. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice M est-elle diagonalisable ? (Justifier)
b) Si λ est tel que M soit diagonalisable, déterminer une matrice S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale. Déterminer en particulier les éléments diagonaux de cette dernière.

VII.17. **Exercice** (Examen 1BP Juin 2004). Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice A ci-dessous est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

$$A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 3-\alpha & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 3-\alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour toute valeur de α telle que A soit diagonalisable, construire une matrice S qui diagonalise A et donner la forme de $S^{-1}AS$ correspondante.

VII.18. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Pour quelles valeurs du paramètre $a \in [0, +\infty[$, la matrice M est-elle diagonalisable ?
(2) Si M est diagonalisable, donner une matrice S qui la diagonalise et la matrice diagonale correspondante.

VII.19. **Exercice**. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} [Examen Juin 2007]3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = B.$$

Cette matrice B est-elle nilpotente ? Justifier.
(*Suggestion*: diagonaliser tout d'abord M. *Pour rappel*: une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de matrices converge vers une matrice B, si pour tous i, j, la suite numérique $([A_n]_{i,j})_{n\geq 0}$ converge vers $B_{i,j}$.)

VII.20. **Exercice** (Examen Juin 2008). Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle diagonalisable ? Lorsqu'elle est diagonalisable, fournir une matrice S qui la diagonalise et donner la forme diagonale correspondante.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour quelles valeurs de α, M est-elle unitaire ?

VII.21. **Exercice** (Examen Juin 2008). En rappelant les résultats théoriques utilisés, montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{C}_2^2$, on a

$$A^2 - (\mathrm{tr} A)\, A + (\det A)\, I = 0.$$

Montrer ensuite que, pour toute matrice $A \in \mathbb{C}_3^3$, on a

$$A^3 - (\mathrm{tr} A)\, A^2 + \frac{1}{2}((\mathrm{tr} A)^2 - \mathrm{tr} A^2)\, A - (\det A)\, I = 0.$$

VII.22. **Exercice** (Examen Août 2007). Soit $A = (C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{C}_n^n$ une matrice inversible.

a) Trouver une matrice S telle que $B = (C_2, \ldots, C_n, 0)$ puisse s'écrire $B = AS$.
b) Montrer que les matrices $M = BA^{-1}$ et $N = A^{-1}B$ sont de rang $n-1$ et qu'elles possèdent 0 comme seule valeur propre.

(*Suggestion* : M et N sont-elles semblabes ?)

VII.23. **Exercice** (Examen Août 2007). Soit $A \in \mathbb{R}_n^n$ ayant $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comme valeur propre. Montrer que si x est un vecteur propre non nul de A de valeur propre λ, alors $\mathfrak{Re}\, x$ et $\mathfrak{Im}\, x$ sont tous deux non nuls.

VII.24. **Exercice** (Examen Août 2008). Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & t & t \\ t & -t & t \\ t & t & t \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Fournir une matrice S qui la diagonalise et donner la matrice $S^{-1}A_tS$ correspondante. (*Suggestion:* pour faciliter les développements, on s'aperçoit facilement que $-t$ est un zéro de $\chi_{A_t}(\lambda)$.)

VII.25. **Exercice** (Examen Août 2008). On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construire une matrice **symétrique** non diagonale A telle que

$$AB = -B, \quad AC = \frac{1}{2}C \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A) = -\frac{3}{2}.$$

(*Suggestion*: Une matrice réelle symétrique est diagonalisable par une matrice réelle orthogonale M dont les colonnes sont orthonormées, i.e., $\widetilde{M}M = I$. On peut aussi résoudre cette question sans utiliser la diagonalisation.)

CHAPITRE VIII

Matrices particulières

VIII.1. **Exercice** (Examen 1BP juin 2005). Soit μ un nombre complexe. On considère la matrice hermitienne

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 5 & 1 \\ \overline{\mu} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de μ pour lequelles H est définie positive.

VIII.2. **Exercice** (Examen 1BM Août 2005). Soit la matrice $H \in \mathbb{C}_3^3$ donnée par

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda + 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

a) A quelles conditions sur le paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$ la matrice H est-elle hermitienne définie négative ?
b) Si $\lambda = -3$, diagonaliser H par une matrice unitaire.

VIII.3. **Exercice** (Examen 1BP Juin 2004). La matrice B suivante étant symétrique, construire une matrice orthogonale P qui la diagonalise,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser en particulier la valeur de P^{-1} et de $P^{-1}BP$.

VIII.4. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). On considère la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) La matrice H est-elle hermitienne définie positive ?
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer H^n en utilisant les propriétés de H.

VIII.5. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soit P un polynôme à coefficients réels. Démontrer que si $H \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice hermitienne, alors il en est de même pour $P(H)$.

VIII.6. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soient $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ deux matrices normales. Démontrer que les 3 assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $A + iB$ est une matrice normale,
(2) $AB^* + A^*B$ est une matrice hermitienne,
(3) $AB^* - B^*A$ est une matrice hermitienne.

VIII.7. **Exercice** (Examen août 2006). Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et la matrice hermitienne H suivante

$$H = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) A quelle(s) conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$, cette matrice est-elle hermitienne définie négative ?
b) Pourquoi peut-on diagonaliser H par une matrice unitaire ?
c) En fixant $\alpha = -5$. Donner les valeurs propres de H et expliquer la marche à suivre pour obtenir une matrice U unitaire qui diagonalise H. (Ici, pour éviter de longs calculs, il vous suffit d'expliquer les différentes étapes du développement à mener sans obtenir U explicitement).

VIII.8. **Exercice** (Examen Juin 2007). Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle normale ? Représenter graphiquement ces valeurs dans le plan complexe.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = 1$, diagonaliser M par une matrice unitaire U. Dans ce cas, donner explicitement U et la matrice diagonale correspondante.

CHAPITRE IX

Structures algébriques

IX.1. **Exercice**. Dans chacun des cas suivants vérifier qu'on a bien une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence et l'ensemble quotient qu'elle définit :

a) "*être parallèle à*" dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites du plan,
b) dans $\mathbb{R}$, la relation $x \equiv_{2\pi} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k2\pi$
c) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\backslash\{0\} = \{(p,q), p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, la relation $(p,q) \sim (r,s) \Leftrightarrow ps = qr$

IX.2. **Exercice**. Soit q un entier naturel. Dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, on considère la relation $\mathcal{R}_q$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad x \,\mathcal{R}_q y \iff \left(\frac{x}{y}\right)^q \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que $\mathcal{R}_q$ est une relation d'équivalence. Expliciter la définition de $\mathcal{R}_q$ en termes de modules et arguments. Comment sont représentées dans le plan les classes d'équivalence $\mathcal{R}_2$?
b) Soient p et q deux entiers naturels. On définit la relation A par :

$$\forall x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad xAy \iff (x \,\mathcal{R}_p\, y \text{ et } x \,\mathcal{R}_q\, y)$$

Montrer que A est une relation d'équivalence. Démontrer que A n'est autre que la relation d'équivalence $\mathcal{R}_d$ où d est le plus grand diviseur commun de p et q.

IX.3. **Exercice**. On munit $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}^+ \times (\mathbb{R}/\equiv_{2\pi})$ de la loi :

$$\forall r, r' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}^+, \forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}/\equiv_{2\pi}, \quad (r,\theta) * (r,\theta') \stackrel{\text{déf}}{=} (rr', \theta + \theta').$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe. (En fait, on montre que $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes)

IX.4. **Exercice**. L'intersection, la réunion et la différence symétrique sont-elles des lois de groupe sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E?
(La différence symétrique de deux parties A et B de E est l'ensemble $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ où A^c est le complémentaire de A dans E.)

IX.5. **Exercice**. Sur $\mathbb{R}$, on pose $x * y = x + y - xy$. Etudier les structures de $(\mathbb{R}, *)$.

IX.6. **Exercice**. Soit k un entier naturel positif et $L =]-k, k[$. On définit l'opération $*$ par

$$a * b = \frac{a+b}{1 + \frac{ab}{k^2}}.$$

Prouver que $(L, *)$ est un groupe commutatif. *Ce groupe porte le nom du physicien néerlandais Lorentz.*

IX.7. **Exercice**. Montrer qu'un sous-ensemble non vide H d'un groupe G muni de la loi $*$ induite de G est un groupe si et seulement si

$$\forall g, h \in H, \quad g * h^{-1} \in H.$$

On dit alors que H est un sous-groupe de G.

IX.8. **Exercice**. L'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$? Les entiers impairs forment-ils un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$?

IX.9. **Exercice**. Les ensembles $\{2^n; n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\frac{2p+1}{2q+1}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$?

IX.10. **Exercice**. Soit $b \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\Gamma_b = \{\frac{a}{b^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$?

IX.11. **Exercice**. L'ensemble de nombres décimaux $D = \{\frac{a}{10^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$? Et $D \setminus \{0\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$?

IX.12. **Exercice**. On appelle permutation de $\{1, \ldots, n\}$ toute bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la loi de composition est un groupe. Donner les tables de compositions de $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$. Quels sont les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$? Comment peut-on voir $\mathcal{S}_n$ comme sous-groupe de $\mathcal{S}_{n+1}$? Les groupes $\mathcal{S}_n$ sont-ils commutatifs?

IX.13. **Exercice**. Montrer que toute table d'un groupe fini est un carré magique, c'est-à-dire que dans chaque ligne ou colonne, chaque élément du groupe apparait une et une seule fois. Comment se traduit dans la table le fait qu'un groupe est commutatif ? Quelles sont toutes les tables possibles d'un groupe à 3 éléments ? Tout carré magique est-il table d'un groupe fini ?

IX.14. **Exercice**. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'union $H_1 \cup H_2$ de deux sous-groupes d'un groupe G soit aussi un sous-groupe de G ?

IX.15. **Exercice**. En considérant $[10]_k$ la classe de 10 modulo k, retrouver les critères de divisibilité par k dans $\mathbb{N}$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 8, 9$.

IX.16. **Exercice**. Trouver, sans faire l'opération, le reste de la division de 314 352 par 11. Indiquer et justifier la méthode employée.

IX.17. **Exercice**. Comment faut-il choisir n pour que $10^n + 1$ soit divisible par 11?

IX.18. **Exercice**. Déterminer les restes de la division par 7 des sept premières puissances de 5. En déduire les entiers n pour lesquels la division de 19^n par 7 a pour reste 2. Calculer le reste de la division de 19^{64} par 7.

IX.19. **Exercice**. Déterminer le reste de la division de :
a) 19^{52} par 8, b) $13^{23} \times 27^{41}$ par 8, c) 137^{25} par 7, d) 34572^{457} par 9.

IX.20. **Exercice**. Montrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $8x + 1 = y^2$.

IX.21. **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations :
a) $x^2 - 3x + 2 \equiv 1 \mod 2$, b) $x^2 - 5x + 7 \equiv 0 \mod 3$, c) $(x+1)(x+2) \equiv 0 \mod 6$.

IX.22. **Exercice**. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^3 - n \equiv 0 \mod 3$ et $n^5 - n \equiv 0 \mod 5$. Que peut-on dire pour $n^4 - n \equiv 0 \mod 4$?

IX.23. **Exercice**. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
a) $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 \mod 7$, b) $n(n^2+2) \equiv 0 \mod 3$, c) $n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \mod 6$.

IX.24. **Exercice**. a) Déterminer tous les entiers $n > 2$ tels que $n - 2$ divise $n^2 - 2$.
b) Déterminer tous les les entiers $n > 3$ tels que $n - 3$ divise $n^3 - 2$.

IX.25. **Exercice** (QCM octobre 2001). Dans $\mathbb{Z}_8$, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 1$ est

☐$\{[1]_8\}$ ☐$\{[1]_8, [-1]_8\}$ ☐$\{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$ ☐ autre

$\forall a, b \in \mathbb{Z}_2 \quad a^2 = b^2 \iff a = b$ ☐ vrai ☐ faux

$$\forall a \in \mathbb{Z} \qquad [4]_6[a]_6 = [2]_6 \quad \begin{array}{ll} \square & \Longleftrightarrow \\ \square & \Longrightarrow \\ \square & \Longleftarrow \\ \square & \text{autre} \end{array} \quad [2]_6[a]_6 = [1]_6$$

IX.26. **Exercice**. Soit a et b deux entiers. “Faire la division de $[b]_m$ par $[a]_m$” revient à chercher une (ou les) solution(s) de l'équation:

$$ax \equiv_m b \qquad (E)$$

a) En regardant la table de multiplication de $\mathbb{Z}_6$, trouver l'ensemble des solutions des équations suivantes :
i) $4x \equiv 0 \mod 6$, *ii)* $4x \equiv 1 \mod 6$, *iii)* $4x \equiv 2 \mod 6$, *iv)* $5x \equiv 2 \mod 6$
b) Plus généralement, montrer que l'équation (E) a au moins une solution si et seulement si $\text{pgcd}(a, m)$ divise b.
c) Déterminer alors le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}_m$.
d) Résoudre dans $\mathbb{Z}_{18}$ les équations :
i) $[12]_{18} \cdot x = [1]_{18}$, *ii)* $[12]_{18} \cdot x = [6]_{18}$, *iii)* $[17]_{18} \cdot x = [1]_{18}$.

IX.27. **Exercice**. Dans $\mathbb{Z}_{60}$, montrer que $[11]_{60}$ et $[7]_{60}$ sont inversibles et déterminer leur inverse.

IX.28. **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $210x - 145y = 85$.

IX.29. **Exercice**. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_5$ par la méthode de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 2x + 2y - z & = & 0 \\ 3x + 2y - 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Combien de solutions ce système possède-t-il?

IX.30. **Exercice**. Déterminer les éléments inversibles (et leur inverse) de $\mathbb{Z}_{20}$.
Résoudre dans $(\mathbb{Z}_{20})^2$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 7y = 10 \\ 5x + 14y = 18 \end{array} \right.$$

IX.31. **Exercice**. .

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l' équation

$$[19]_{36} \cdot [x]_{36} = [1]_{36}$$

b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{36}$ par la méthode de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 19y = 3 \\ 6x + 2y = 8 \end{array} \right.$$

IX.32. **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 20x + 21y \equiv 5 & \mod 12 \\ 15x + 19y \equiv 2 & \mod 12 \end{array} \right.$$

IX.33. **Exercice**. Soit a et $b \in \mathbb{Z}_{12}$. Discuter et résoudre dans $\mathbb{Z}_{12}$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x + 9y = a \\ 7x + 3y = b \end{array} \right.$$

IX.34. **Exercice**. On dit qu'un élément x est *nilpotent* s'il existe un entier positif n tel que $x^n = 0$. On notera $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_n)$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{Z}_n$. Déterminer $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_6)$ et $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_9)$. Généraliser de résultat en décrivant $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

IX.35. **Exercice** (janvier 2003). Soient m, n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux et soient a, b deux entiers quelconques.

a) En utilisant le théorème de Bezout, montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & a \mod m \\ x & \equiv & b \mod n \end{array}\right. \qquad (*)$$

possède au moins une solution $x \in \mathbb{Z}$.

b) Soit x une solution du système $(*)$. Montrer que $y \in \mathbb{Z}$ est solution de $(*)$ si et seulement si

$$y \equiv x \mod mn.$$

c) Donner l'ensemble des solutions de (*) si $m = 2$, $n = 5$, $a = 1$, $b = 4$.

IX.36. **Exercice**. On note $U(\mathbb{Z}_n)$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}_n$ et on pose $\varphi(n) = \#U(\mathbb{Z}_n)$. On appelle φ la *fonction indicatrice d'Euler.*

a) Si p est un nombre premier montrer que $\varphi(p^k) = p(1 - \frac{1}{p})$.

b) Si k et l sont premiers entre eux, montrer que $\forall j \in \mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto kx + j$ définit une bijection de $\mathbb{Z}_l$ sur lui-même.

c) Si k et l sont premiers entre eux, montrer que $[a]_{kl}$ est inversible si et seulement si $[a]_k$ et $[a]_l$ sont inversibles.

d) Si k et l sont premiers entre eux, montrer que $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$. (*Indication*: Ecrire les kl premiers entiers dans un tableau de k colonnes et $l$lignes, puis utiliser c) et b))

e) En déduire l'expression générale de $\varphi(n)$.

IX.37. **Exercice**. (Interro 1BM 10/2004)

a) Les éléments suivants sont-ils inversibles dans $\mathbb{Z}_{256}$,

$$\alpha = 75 \quad \text{et} \quad \beta = 88.$$

Si oui, quel est leur inverse ?

b) Que pouvez-vous en déduire sur le caractère bijectif des applications

$$\Phi_\alpha : \mathbb{Z}_{256} \to \mathbb{Z}_{256} : x \mapsto 75\, x$$

et

$$\Phi_\beta : \mathbb{Z}_{256} \to \mathbb{Z}_{256} : x \mapsto 88\, x.$$

IX.38. **Exercice** (Interro 1BM 10/2004). Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on considère la relation $\sim$ définie comme suit. Pour tous couples $(x,y),(z,t) \neq (0,0)$, $x,y,z,t \in \mathbb{R}$,

$$(x,y) \sim (z,t) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = \lambda\,(z,t).$$

a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Donner une interprétation géométrique de la classe d'équivalence d'un élément $(x,y) \neq (0,0)$ pour cette relation.

IX.39. **Exercice** (Interro 1BM 10/2007). Soit la relation τ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\,\tau\,y \Leftrightarrow x\,e^y = y\,e^x.$$

Vérifiez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et déterminez le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence $[0]_\tau$ de zéro.

IX.40. **Exercice** (LM). Existe-t-il des entiers x et y tels que

$$456057\,x + 382109\,y = 7.$$

IX.41. **Exercice** (Examen 1BM Août 2005). Les éléments 27 et 29 sont-ils inversibles dans $\mathbb{Z}_{81}$ (justifier) ? Dans le cas d'une réponse affirmative, en calculer l'inverse. Peut-on alors en déduire que $\mathbb{Z}_{81}$ est un champ ?

IX.42. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). Aritmétique dans $\mathbb{Z}_n$.

a) Déterminer si 119 et 219 sont inversibles dans $\mathbb{Z}_{365}$.
Si c'est le cas, en calculer l'inverse.

b) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}_{365}$:

$$\begin{cases} x - 20y = 1 \\ 5x + 219y = 2. \end{cases}$$

IX.43. **Exercice** (Interro 1BM 10/2005). Soit A un ensemble et $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de A dans A. On définit sur $\mathcal{F}$, les deux relations $\sim$ et ∇ suivantes. Pour tous $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^n = g^n,$$
$$f \nabla g \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^m = g^n.$$

Bien évidemment, f^n désigne la composition de n copies de f: $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\times}$.

a) Montrer que $\sim$ et ∇ sont des relations d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

b) Montrer que toute classe d'équivalence pour ∇ est une union de classes d'équivalence pour $\sim$.

c) Soit $k > 0$. Démontrer que $f \in \mathcal{F}$ est injectif si et seulement si f^k l'est.

d) Soit $[f]_\nabla$ la classe d'équivalence de f pour la relation ∇. Que pouvez-vous dire de $[f]_\nabla$ si cet ensemble contient une application g qui est injective ?

IX.44. **Exercice** (Interro 1BM 10/2005). Dans l'anneau $\mathbb{Z}_m$ des entiers modulo $m \geq 2$ (on notera la classe $[i]_m$ simplement par i), on appelle *élément nilpotent*, un élément $x \in \mathbb{Z}_m$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

a) Démontrer que si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_m$.

b) Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}_{36}$.

IX.45. **Exercice** (Interro 1BM 11/2003). Aritmétique dans $\mathbb{Z}_n$.

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2003} par 5 ?

b) L'élément 317 est-il inversible dans $\mathbb{Z}_{791}$? Justifiez. Dans l'affirmative, donnez son inverse modulo 791.

c) Dans $\mathbb{Z}_{18}$, les applications suivantes sont-elles des bijections ?

$$\Theta : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{18} : x \mapsto 9.x \quad \text{et} \quad \rho : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{18} : x \mapsto 5.x.$$

IX.46. **Exercice**. Répondre aux questions à choix multiples suivantes.

(1) Dans un ensemble à deux éléments, muni d'une structure de groupe, l'un des deux éléments est nécessairement égal à son symétrique. □ Vrai □ Faux

(2) On désigne par $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels positifs privé du nombre zéro et par $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des rationnels négatifs privé du nombre zéro.
$(\mathbb{Q}_+^*, .)$ est un groupe multiplicatif □ Vrai □ Faux
$(\mathbb{Q}_-^*, .)$ est un groupe multiplicatif □ Vrai □ Faux

(3) L'ensemble des entiers impairs auquel on adjoint 0 est un groupe commutatif. □ Vrai □ Faux

(4) $(\{1, -1\}, .)$ est un groupe. □ Vrai □ Faux

(5) $(\{1, i, -1, -i\}, .)$ est un groupe. □ Vrai □ Faux

(6) $\left(\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}, .\right)$ est un groupe. □ Vrai □ Faux

(7) Les rationnels non nuls $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ forment un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. □ Vrai □ Faux

(8) Les irrationnelsforment un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. □ Vrai □ Faux

(9) On considère l'ensemble $E = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ où $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des rationnels non nuls. Muni de la multiplication E est un groupe. ☐ Vrai ☐ Faux

Dans l'affirmative, l'inverse de $a + b\sqrt{2}$ est
☐ $\frac{a+b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ ☐ $\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ ☐ $\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2+2b^2}$ ☐ autre réponse.

(10) L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. ☐ Vrai ☐ Faux

(11) L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour la multiplication. ☐ Vrai ☐ Faux

(12) Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} : x_0, x_1 \in R \right\}$ et $E_0 = E \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Alors

$(E, +)$ est un groupe ☐ Vrai ☐ Faux

$(E_0, .)$ est un groupe. ☐ Vrai ☐ Faux

(13) On désigne par $E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$ alors

$(E, .)$ est un groupe ☐ Vrai ☐ Faux

$(E, .)$ est un groupe commutatif ☐ Vrai ☐ Faux

(14) L'ensemble $\{0, 1\}$ muni de la loi de composition décrite par le tableau suivant

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

est un groupe commutatif : ☐ Vrai ☐ Faux

(15) L'ensemble $\{1, 2, 4, 8\}$ muni de la loi de composition décrite par le tableau suivant

$*$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
2	2	4	8	1
4	4	8	1	2
8	8	1	2	4

est un groupe commutatif : ☐ Vrai ☐ Faux

(16) On considère les permutations de trois éléments $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$\sigma_3 \circ \sigma_4 =$ ☐σ_1 ☐σ_2 ☐σ_3 ☐σ_4 ☐σ_5 ☐σ_6

$\sigma_3 \circ \sigma_4 = \sigma_4 \circ \sigma_3$ ☐ Vrai ☐ Faux

$(\sigma_3)^{-1} =$ ☐σ_1 ☐σ_2 ☐σ_3 ☐σ_4 ☐σ_5 ☐σ_6

IX.47. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soient $M \in \mathbb{Z}_2^2$ une matrice 2×2 à coefficients entiers et la relation $\sim_M$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(1) Démontrer que $\sim_M$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

(2) Pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

lesquels des trois vecteurs suivants sont équivalents pour $\sim_M$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(3) Pour la matrice M du point précédent, donner explicitement l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ équivalents à $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (des équations paramétriques suffisent).

(4) Pour la matrice M du point (2), démontrer que le nombre de classes d'équivalence pour $\sim_M$ est exactement 3 et donner un représentant de chaque classe.

(5) Pour une matrice $M \in \mathbb{Z}_2^2$ quelconque, est-il vrai que :
si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_{M^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$?
La réciproque est-elle satisfaite ? (Justifier)

IX.48. **Exercice** (Examen Juin 2007). Calculer 2^{2007} mod 5.

IX.49. **Exercice** (Examen Juin 2007). Un anneau $(A, +, ., 0, 1)$ est qualifié d'*intègre* si pour tous $p, q \in A$, $p.q = 0$ entraîne $p = 0$ ou $q = 0$. Un champ est-il toujours intègre ? Justifier.

IX.50. **Exercice** (Examen "à blanc" Janvier 2008). On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relation $\mathcal{R}$ par

$$(a, b)\, \mathcal{R}\, (a', b') \text{ si et seulement si } a + b' = a' + b.$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Caractérisez l'ensemble quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.

CHAPITRE X

Espaces vectoriels

X.1. **Exercice**. Prouver que $\mathbb{R}_+ =]0;+\infty[$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \oplus : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ (\lambda,x) & \mapsto & x^\lambda. \end{array}$$

X.2. **Exercice**. Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur un champ $\mathbb{K}$ et $a \in E$. On définit les opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \oplus : E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y-a \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \circ : \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x+(1-\lambda).a. \end{array}$$

Peut-on dire si $(E,\oplus,\circ)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$?

X.3. **Exercice**. Déterminer si les matrices A, B et C sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{C}_2^2$, dans les cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

X.4. **Exercice**. Déterminer si les polynômes P, Q et R sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$, dans les cas suivants :
a) $P = X^3-3X^2+3X+1$, $Q = X^3-X^2+8X+2$ et $R = 2X^3-4X^2+9X+5$,
b) $P = X^3+4X^2-2X+3$, $Q = X^3+6X^2-X+4$ et $R = 3X^3+8X^2-8X+7$.

X.5. **Exercice**. Les nombres réels 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$?

X.6. **Exercice**. On considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a) A quelles conditions sur $z \in \mathbb{C}$, 1 et z sont-ils linéairement indépendants?
b) A quelles conditions sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 1 et $\frac{1}{z}$ sont-ils linéairement dépendants?
c) Montrer que 1, z et z^2 sont toujours linéairement dépendants, $\forall z \in \mathbb{C}$. Trouver une relation linéaire entre eux.

X.7. **Exercice**. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^4$, les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6-9i \\ 2-2i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairements indépendants? Montrer que E peut-être considéré comme un espace vectoriel $E_\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Dans $E_\mathbb{R}$, les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont-ils linéairements indépendants? Quelle est la dimension de $E_\mathbb{R}$?

X.8. **Exercice** (Examen “à blanc” Janvier 2008). On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur le paramètre complexe α, ces trois vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

X.9. **Exercice**. Soit n un entier et $E = \mathbb{R}[X]_n$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Quelle est la dimension de E? Montrer que

a) $\big(1, (X-1), (X-1)^2, \dots (X-1)^n\big)$ est un base de E.
b) $(X^n, (X+1)^n, \dots (X+n)^n)$ est un base de E.
c) si $\deg P_k = k$ alors $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est un base de E.

X.10. **Exercice** (janvier 2006). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques réelles. On munit E de deux opérations pour en faire un $\mathbb{R}$-vectoriel,

$$\forall \mathbf{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, \forall \mathbf{Y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et

$$\forall \mathbf{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\mathbf{X} = (\lambda\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) E est-il un espace vectoriel de dimension finie ? Justifier.
b) Soient $k \geq 1$ et la suite

$$\mathbf{X}_k = \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k\times}, 0, 0, 0, \dots.$$

Les suites $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, $n \geq 2$, sont-elles linéairement dépendantes ?
c) Soient α, β deux réels fixés et le sous-ensemble $F \subset E$ défini par

$$F = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2,\ x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta\, x_{n-2}\}.$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
d) Quelle est la dimension de F ? (Suggestion: quel est le nombre minimum d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F nécessaires pour déterminer entièrement cette suite ?)
e) Soient α, β deux réels fixés et le sous-ensemble $G \subset E$ défini par

$$G = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2,\ x_n = \alpha\, x_{n-1} + \beta\, x_{n-2} + 1\}.$$

Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier.
f) Déterminer une suite $\mathbf{Y}$ de E qui satisfait à

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 1, x_n = 2\, x_{n-1}\} = \rangle \mathbf{Y} \langle.$$

g) Montrer que l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de E. (On suppose connue la théorie des suites convergentes vue en analyse.)

X.11. **Exercice** (Examen Juin 2006). Pour l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3_3$ des matrices carrées 3×3 muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est-il vrai que l'ensemble A des matrices de carré nul, i.e.,

$$A = \{M \in \mathbb{R}^3_3 : M^2 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E ? Justifier votre réponse.

X.12. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soit F l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel.

(1) L'ensemble des fonctions strictement croissantes et continues est-il un sous-espace vectoriel de F ?
(2) L'ensemble des fonctions constantes est-il un sous-espace vectoriel de F ?

Justifier vos réponses.

X.13. **Exercice** (Examen Janvier 2007). Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n_n$ des matrices $n \times n$. On définit $\mathcal{C}_k$ comme étant l'ensemble des *carrés magiques de caractère* k. Autrement dit, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartient à $\mathcal{C}_k$ si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k.$$

a) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}_k$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n_n$?

b) Sachant que $\mathcal{C}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n_n$, dans le cas particulier $n = 3$, donner une base de $\mathcal{C}_0$.

c) Pour $n \geq 3$ arbitraire, quelle est la dimension de $\mathcal{C}_0$?

X.14. **Exercice** (Examen Janvier 2007). Soient E un espace vectoriel sur un champ $\mathbb{K}$ et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on

$$F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H) \quad ?$$

X.15. **Exercice** (Examen Janvier 2007). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

a) $\rangle x_1, x_2, x_3 \langle = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \langle.$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \rangle x_1, x_2 \langle \cap \rangle x_2, x_3, x_4 \langle.$

c) $\dim (\rangle x_1, x_2 \langle \cap \rangle x_2, x_3, x_4 \langle) = 1.$

d) $\rangle x_1, x_2 \langle + \rangle x_2, x_3, x_4 \langle = \mathbb{R}^4.$

e) $\rangle x_1, x_2 \langle \oplus \rangle x_2, x_3, x_4 \langle = \mathbb{R}^4.$

f) $\rangle x_4, x_5 \langle$ est un supplémentaire de $\rangle x_1, x_2, x_3 \langle$ dans $\mathbb{R}^4$.

X.16. **Exercice** (Examen Janvier 2007). Soient $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision fixée de l'intervalle $[0, 1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine (i.e., de la forme $x \mapsto \alpha\, x + \beta$).

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

b) Soient $f, g \in F$. Démontrer que $f = g$ si et seulement si pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $f(x_i) = g(x_i)$.

c) Dans le cas $n = 2$, montrer que les fonctions

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ x_1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}, \quad g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ x - x_1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

et

$$h : x \mapsto 1$$

forment une base de F.

d) Pour n arbitraire, déduire des points précédents la dimension de F.

X.17. **Exercice** (Formule de Taylor). Soit $\mathbb{C}[x]_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de dégré au plus n. Pour tout complexe z_0, montrer que les polynômes

$$(z-z_0)^n, (z-z_0)^{n-1}, \ldots, 1$$

forment une base de $\mathbb{C}[z]_n$.

X.18. **Exercice** (Roudier). Soient $\mathbb{K}$ un champ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des scalaires distincts. On définit les polynômes

$$p_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n+1, \\ k \neq i}} (x - \lambda_k).$$

Montrer que $p_1, \ldots, p_{n+1}$ sont des éléments linéairement indépendants de $\mathbb{K}[x]$.

X.19. **Exercice** (Roudier). Vérifier que les fonctions suivantes du $\mathbb{R}$-vectoriel $C_\infty(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendantes :

a) $\cos x$ et $\sin x$,
b) $e^{\alpha x}$ et $e^{\beta x}$, avec $\alpha \neq \beta$,
c) $e^{\alpha x}$ et $x\, e^{\alpha x}$.

X.20. **Exercice**. Soit v un vecteur non nul de

$$(\mathbb{Z}_3)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

Combien y a-t-il de vecteurs dans le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{Z}_3)^2$ engendré par v?
En déduire toutes les bases de $(\mathbb{Z}_3)^2$. Combien y en a-t-il?
Déterminer de même le nombre de bases possibles dans $(\mathbb{Z}_2)^3$.

X.21. **Exercice**. Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$. Montrer que P, $\mathrm{D}_X P$, $\mathrm{D}_X^2 P$ et $\mathrm{D}_X^3 P$ constituent une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}[X]_3$. Donner la matrice de changement de base S de la base canonique à cette base.
Si

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = b_0 P(X) + b_1 (\mathrm{D}_X P)(X) + b_2 (\mathrm{D}^2 P)(X) + b_3 (\mathrm{D}^3 P)(X),$$

écrire les réels b_0, b_1, b_2 et b_3 en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3. En déduire la matrice inverse de S.

X.22. **Exercice** (Matthews). Soit x, y, z trois vecteurs d'un espace vectoriel E. Démontrer que

$$\rangle x, y, z \langle = \rangle x+y, x+z, y+z \langle.$$

X.23. **Exercice** (1BM Janvier 2003). Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel $F = \rangle u, v, w \langle$. On considère également le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) Quelle est la dimension de F ? En donner une base.

c) Quelle est la dimension de G ? En donner une base.

d) Donner une base de $F+G$ et en déduire la dimension de $F \cap G$.

e) Caractériser les éléments de $F \cap G$.

f) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

Bien évidemment, toutes vos réponses doivent être justifiées.

X.24. **Exercice**. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F = \{X \in \mathbb{R}_2^2, AX = 0\} \\ G = \{X \in \mathbb{R}_2^2, XA = 0\} \\ H = \{X \in \mathbb{R}_2^2, AX = XA\} \end{cases}$$

Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. Préciser une base et leur dimension.

X.25. **Exercice**. Soient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad F = \Big\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big\langle .$$

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$? Quelle condition doivent vérifier les réels x, y et z pour que v soit un élément de F ?

X.26. **Exercice**. Soient v_1, v_2, $\ldots v_n$ des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel E.

a) On pose $u_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ pour $k = 1, 2, \ldots n$. Montrer que la famille $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ est libre.

b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ et $v \in E$. Montrer que v_1, v_2, $\ldots v_n$, v sont linéairement indépendants si et seulement si $v \notin F$.

X.27. **Exercice**. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel

$$G = \big\rangle 1, \sin^2(x), \cos^2(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(x), \cos(x) \big\langle$$

de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

X.28. **Exercice**. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel de E distinct de E et $A = E \setminus F$.

a) Montrer que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que si $x \in F$ et $y \in A$ alors $x + y \in A$. En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par A est E.

X.29. **Exercice**. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $B = \{f_k : x \mapsto e^{kx}, k \in \{0, \ldots, n\}\}$ est une partie libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

X.30. **Exercice**. Soit A et B les parties de $\mathbb{R}^4$ définies par :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, 2x_1 + 3x_2 = 0 \text{ et } x_3 = x_4^2 + 1 \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par A et B.
Montrer que $F \subset G$. En déduire que $F = G$.

X.31. **Exercice** (1BM Janvier 2005). On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0 \right\}.$$

a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Donnez une base U de A ainsi que sa dimension.
c) Soit le vecteur

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

appartenant à A. Quelles sont les composantes de y dans la base U que vous avez choisie au point précédent ?
d) Connaissant les composantes d'un vecteur $x \in A$ dans la base U choisie en b), donnez les composantes de ce même vecteur x dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$?
e) Soit le sous-espace vectoriel

$$B = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

Les sous-espaces vectoriels A et B sont-ils en somme directe ?

X.32. **Exercice** (1BM Janvier 2005). Soit $\mathbb{C}_2^2$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes considéré comme un espace vectoriel **réel** E. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & i\,b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Suggestion : pour les distraits, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; on considère uniquement des combinaisons linéaires à coefficients réels. En outre, l'élément du coin supérieur droit d'une matrice de A est réel.)

a) Montrez que A est un sous-espace vectoriel de E.
b) Déterminez une base et la dimension de A.
c) A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, une matrice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & i\,b \end{pmatrix} \in A$$

est-elle hermitienne ?
d) Soit H le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices hermitiennes. Sachant que sa dimension comme sous-espace de E est 4, en déduire la dimension de $A + H$.
e) Donnez un supplémentaire de A dans E.

X.33. **Exercice** (Interro 1BM 11/2003). On considère les matrices de $\mathbb{C}_2^2$ suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4i & -1 \\ 3i & m^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbb{C}_2^2$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-vectoriel, à quelle(s) condition(s) sur le paramètre $m \in \mathbb{C}$, les matrices sont-elles linéairement indépendantes ? Même question lorsque $\mathbb{C}_2^2$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.

X.34. **Exercice** (Interro 1BP 10/2005). Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la base $\mathcal{A}$ constituée des vecteurs suivants

$$x = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \; t = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

a) Les vecteurs $u = x + 2y$, $v = x - y$ et $w = 2x + 7y$ sont-ils linéairement indépendants ?
b) Soit la base $\mathcal{B}$ donnée par les vecteurs

$$a = 2x + y, \; b = y + z, \; c = z - t, \; d = x + y + t.$$

Donner la matrice de changement de base permettant de passer de la base $\mathcal{A}$ à la base $\mathcal{B}$. Si $m = 3x - y - 2z - t$, quelles sont les composantes de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$?

X.35. **Exercice** (Examen 1BM Sept. 2004). On considère l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^4$ et les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix}1\\i\\0\\2\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1+i\end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix}-1\\i\\i\\-3+i\end{pmatrix}.$$

a) Ces vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants ?
b) En déduire la dimension de $F = \rangle u, v, w\langle$.
c) Soient les deux vecteurs linéairement indépendants

$$x = \begin{pmatrix}i\\1\\0\\3i\end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Les sous-vectoriels F et $G = \rangle x, y\langle$ sont-ils en somme directe ?
d) A-t-on $F + G = \mathbb{C}^4$?

Justifier vos réponses.

X.36. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère deux vecteurs u et v et l'application $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T : x \mapsto \begin{pmatrix}\langle x, u\rangle\\ \langle x, v\rangle\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que T est linéaire.

Dans la suite de cette question, on suppose que

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

b) Construire une base de $\mathbb{R}^4$ dont u et v sont les deux premiers éléments et représenter T dans la base ainsi construite.
c) Donner une base du noyau de T
d) Quelle est la dimension de l'image de T. En déduire que pour tous nombres réels λ et μ, il existe $x \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$Tx = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}.$$

e) Caractériser les vecteurs appartenant au sous-espace vectoriel $T^{-1}(F)$ où

$$F = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

f) Soient les deux sous-espaces vectoriels

$$G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle \quad \text{et } H = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle.$$

A-t-on $T(G) = T(H)$ ou bien $T(G) \neq T(H)$? Justifier votre choix (démonstration ou contre-exemple).

X.37. **Exercice** (Matthews). Si les vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ forment une base du sous-espace vectoriel F, démontrer que toute base de F est donnée par des vecteurs $y_1, \ldots, y_r$ tels que

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} x_j$$

et que la matrice $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$ soit inversible.

X.38. **Exercice**. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Montrer que $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.

X.39. **Exercice** (LM). On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u_1 et u_2 est égal au sous-espace vectoriel engendré par u_3 et u_4.

X.40. **Exercice** (LM). Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathbb{R}_3^3$ telles que $MD = DM$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}_3^3$ et en donner une base. Même question avec la matrice

$$D' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

X.41. **Exercice**. Soit F (resp. G) l'ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de $\mathbb{K}_n^n$. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriel du $\mathbb{K}$-vectoriel $\mathbb{K}_n^n$. Déterminer leur dimension, en donner une base et montrer que

$$F \oplus G = \mathbb{K}_n^n.$$

X.42. **Exercice** (LM). Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel. Soient a un nombre réel non nul et F l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_{n+1} = a x_n$ pour tout naturel n.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$.
b) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $x_n = a^n x_0$.
c) En déduire que F est une droite vectorielle.

X.43. **Exercice** (LM). Soit E le $\mathbb{R}$-vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Soient $f, g \in E$ deux fonctions linéairement indépendantes. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = \det \begin{pmatrix} f(x_0) & f(x) \\ g(x_0) & g(x) \end{pmatrix}$$
n'est pas nulle.

b) Soient $f, g \in E$. Montrer que f et g sont linéairement indépendantes si et seulement si il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que
$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \neq 0.$$

X.44. **Exercice** (Roudier). Soit E un $\mathbb{K}$-vectoriel. Démontrer que l'union de deux sous-espaces vectoriels est elle même un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un d'eux est inclus dans l'autre.

X.45. **Exercice** (Roudier). Soient E un $\mathbb{K}$-vectoriel et A une partie non vide de E. Prouver qu'un vecteur v appartient à $\rangle A \langle$ si et seulement si v est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de A.

X.46. **Exercice** (Roudier). Soient F (resp. G) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathbb{K}_n^n$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n^n$ et vérifier que leur somme n'est pas directe.

X.47. **Exercice** (Roudier). Soient F et G deux $\mathbb{K}$-vectoriels. On définit sur $F \times G$ l'addition de deux éléments comme
$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2)$$
et la multiplication par un scalaire λ de $\mathbb{K}$ par
$$\lambda(f_1, g_1) = (\lambda f_1, \lambda g_1).$$

a) Montrer que $F \times G$ est un $\mathbb{K}$-vectoriel.

b) Si $F_1 = F \times \{0_G\}$ et $G_1 = \{0_F\} \times G$, montrer que F_1 et G_1 sont des sous-espaces vectoriels de $F \times G$ et que
$$E \times F = F_1 \oplus G_1.$$

c) Si F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, donner une base de $F \times G$ en fonction d'une base de F et d'une base de G. En déduire que
$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G.$$

X.48. **Exercice** (Roudier). Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On considère l'ensemble
$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\}$$
et l'ensemble G des fonctions constantes sur $[0, 1]$. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.

X.49. **Exercice** (Roudier). Une matrice $A \in \mathbb{K}_n^n$ est *magique* si les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales sont égales. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
est une matrice magique. On note $Mag_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathbb{K}_n^n$.

a) Démontrer que $Mag_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n^n$ et que la transposée d'une matrice magique est encore magique.

b) Il est bien connu (cf. exercice X.41) que toute matrice M se décompose de manière unique comme $M = S_M + A_M$ où S_M est symétrique et A_M est anti-symétrique. Démontrer que si M est magique, il en est de même de S_M et A_M.

c) Trouver une base de l'intersection de $Mag_3(\mathbb{R})$ avec l'ensemble des matrices anti-symétriques (resp. symétriques).

X.50. **Exercice**. Répondre aux questions à choix multiples suivantes.

(1) Si a, b et c sont trois vecteurs linéairement indépendants alors il en est de même pour $a+b$, $b+c$ et $a+c$. □ Vrai □ Faux

(2) Si u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants alors les vecteurs $u+iv$, $v+iw$ et $w+iu$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$. □ Vrai □ Faux

(3) Soient α une racine quatrième de l'unité dans $\mathbb{C}$ et les vecteurs $u_1 = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$, $u_2 = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, 1)$, $u_3 = (\alpha^2, \alpha^3, 1, \alpha)$ et $u_4 = (\alpha^3, 1, \alpha, \alpha^2)$ de $\mathbb{C}^4$. Quelle est le rang de $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$?
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4

(4) Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans $\mathbb{R}$, les fonctions $\sin(x)$, $\sin(x+1)$ et $\sin(x+2)$ sont linéairement indépendantes. □ Vrai □ Faux

(5) Les polynômes 1, z, $z(z-1)$, $z(z-1)(z-2)$ forment une base de $\mathbb{C}_3[z]$ □ Vrai □ Faux

(6) Dans un espace vectoriel E, l'enveloppe linéaire de l'ensemble vide est
□ $\varnothing$ □ $\{0\}$ □ E □ autre

(7) Le sous-ensemble des matrices de $\mathbb{C}_n^n$ dont la première colonne est nulle n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$. □ Vrai □ Faux

(8) L'ensemble $\{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = A\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}_n^n$.
□ Vrai □ Faux

(9) La dimension de l'espace vectoriel complexe $\{A \in \mathbb{C}_3^3 : \tilde{A} = -A\}$ est
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ autre

(10) La dimension du sous-espace vectoriel $\{A \in \mathbb{C}_3^3 : A^* = A\}$ de $\mathbb{C}_3^3$ considéré comme espace vectoriel réel est □ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ autre

(11) La dimension de $\{A \in \mathbb{C}_n^n : A^* = -A\}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ vaut
□ n^2 □ $\frac{n(n+1)}{2}$ □ $\frac{n(n-1)}{2}$ □ n □ autre

(12) La dimension de $\{P \in \mathbb{C}[X] : P(X^2) = XP(X)\}$ est □ 0 □ 1 □ 2 □ 4 □ 8

(13) L'espace vectoriel $\{P \in \mathbb{C}_5[X] : P(X) = P(2X)\}$ est de dimension
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6

(14) Le sous-espace vectoriel $\{P \in \mathbb{C}_5[X] : P(X) = P(X+1)\}$ de $\mathbb{C}_5[X]$ est de dimension
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5

(15) Le sous-espace vectoriel $\{P \in \mathbb{C}_6[X] : P(X) = P(-X)\}$ de $\mathbb{C}_6[X]$ est de dimension
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6

(16) Si E et F sont des espaces vectoriels respectivement de dimension n et p alors $\dim(E \times F)$ vaut

☐ $\inf(n, p)$ ☐ $\sup(n, p)$ ☐ $n + p$ ☐ np ☐ autre

X.51. **Exercice** (Examen Juin 2006). Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les quatre vecteurs suivants

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (w, x) et (y, z) sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, puis construire la matrice de changement de base pour passer de la première à la seconde base. Utiliser cette matrice de changement de base pour obtenir la décomposition du vecteur $2w + 3x$ dans la base (y, z).

X.52. **Exercice** (Examen août 2006). Justifier vos réponses.

(Vrai/Faux) On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}_2^2$ des matrices 2×2 à coefficients réels. Cinq matrices quelconques de $\mathbb{R}_2^2$ sont toujours linéairement dépendantes.

(Vrai/Faux) On considère le $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}_n^n$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. L'ensemble des matrices hermitiennes et celui des matrices anti-hermitiennes de $\mathbb{C}_n^n$ sont deux sous-espaces vectoriels en somme directe.

X.53. **Exercice** (Examen Janvier 2008). Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ un entier et $S_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ un sous-ensemble de E.

On définit le sous-ensemble $S_2 = \{g_1, \dots, g_n\}$ par

$$g_j = e_j + e_{j+1}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\}$$

et

$$g_n = e_n + e_1.$$

Démontrer les trois assertions suivantes :

a) Pour $n = 3$, si S_2 est libre, alors S_1 l'est aussi.
b) Pour n impair, si S_1 est libre, alors S_2 l'est aussi.
c) Pour n pair, S_2 est une partie liée.

X.54. **Exercice** (Examen Janvier 2008). Soient $\mathbb{R}_n^n$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées de dimension n et $J \in \mathbb{R}_n^n$ tel que $J^2 = I$. On considère l'ensemble

$$E = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : A = aI + bJ\}.$$

(1) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n^n$?
(2) Montrer que pour tous $A, B \in E$, $A.B$ appartient à E.
(3) Soit $A = aI + bJ$, déduire du point précédent que

$$\forall n \geq 1,\ \exists a_n,\, b_n \in \mathbb{R}\ :\ A^n = a_n I + b_n J$$

et vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

X.55. **Exercice** (Examen Janvier 2008). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rangle e_1 + g, \dots, e_k + g \langle$ est un supplémentaire de G dans E.

X.56. **Exercice** (Examen Juin 2007). Soit F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}_3^3$ de trace nulle (pour rappel, si $A \in \mathbb{R}_n^n$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$).

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel réel
b) Son complémentaire, $\mathbb{R}_3^3 \setminus F$ est-il aussi un sous-espace vectoriel ?
c) Quelle est la dimension de F ? En donner une base.
d) Si $A \in F$, la matrice A^2 est-elle symétrique ?
e) Si $A \in F$, la matrice A^2 appartient-elle aussi à F ?

X.57. **Exercice** (Examen Juin 2008). Soit $n \geq 3$ un entier. On considère l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels dont seuls les éléments se trouvant sur la diagonale principale ou sur la diagonale secondaire peuvent être non nuls. Par exemple, la matrice suivante appartient à $\mathcal{D}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que le produit de deux matrices quelconques de $\mathcal{D}_n$ appartient à $\mathcal{D}_n$.
b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^n_n$? Si oui, quelle en est sa dimension ?
c) Son complémentaire $\mathbb{R}^n_n \setminus \mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n_n$?
d) Expliciter un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n_n$ tel que $\mathcal{D}_n \oplus F = \mathbb{R}^n_n$.
e) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_5.$$

Quelle est la forme générale de M^k, pour tout $k \geq 1$. La formule obtenue sera démontrée par récurrence sur k.
f) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d, e, la matrice A est-elle inversible ? Dans de telles conditions, quel est l'inverse de A ?

X.58. **Exercice** (Examen Août 2008). Soient les ensembles de polynômes suivants

$$\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}[X] : P = (1 - X)Q(X^2)\},$$
$$\mathcal{B} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall X \in \mathbb{R} : P(-X) = P(X)\},$$

(*NB:* Si Q est un polynôme, alors $Q(X^2)$ contient uniquement des termes de degré pair. Par exemple, si $Q(X) = 3X^2 - 5X + 1$, alors $Q(X^2) = 3X^4 - 5X^2 + 1$.)

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
b) Caractériser les polynômes appartenant à $\mathcal{B}$.
c) Donner une base de $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}[X]_6$.
d) Montrer que $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathbb{R}[X]$.

X.59. **Exercice** (Examen Août 2008). Soit $n \geq 2$ un entier. Pour tout réel r, on dénote par $\mathcal{S}_n(r)$, l'ensemble des matrices de $\mathbb{R}^n_n$ dont la somme des éléments de chacune des lignes vaut r. Par exemple, la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathcal{S}_3(2)$.

a) Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n(r)$ et pour tout $B \in \mathcal{S}_n(s)$, alors AB appartient à $\mathcal{S}_n(r.s)$.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(0)$. A-t-on toujours $\widetilde{A} \in \mathcal{S}_n(0)$?
c) Pour quelle(s) valeur(s) de $r \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_n(r)$ forme-t-il un espace vectoriel ? Pour de telles valeurs de r, quelle est la dimension de $\mathcal{S}_n(r)$ comme $\mathbb{R}$-vectoriel ?

d) Soit $A \in \mathcal{S}_n(r)$. On considère le vecteur $u = (1, \dots, 1)^{\sim}$. Ce vecteur est-il vecteur propre de A ? Si oui, quelle en est la valeur propre ?

X.60. **Exercice** (Examen Août 2008). Soient u, v deux réels distincts. Montrer que les polynômes

$$(X-u)^2,\ (X-u)(X-v),\ (X-v)^2$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_2$ des polynômes de degré au plus 2. (Une solution inutilement trop longue sera pénalisée.)

X.61. **Exercice** (Examen "à blanc" Janvier 2008). Sauf mention explicite du contraire (point (g) uniquement), on considère tout au long de l'exercice, l'ensemble $E = \mathbb{C}_2^2$ des matrices 2×2 à coefficients complexes comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Soient $\mathcal{A}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments est nulle et $\mathcal{B}$, le sous-ensemble de $\mathbb{C}_2^2$ formé des matrices dont la somme des éléments diagonaux est nulle, i.e.,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b+c+d = 0 \right\} \text{ et } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+d = 0 \right\}.$$

(1) Montrez que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Montrez que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(3) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? oui/non, justifiez.
(4) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? oui/non, justifiez.
Une justification "courte" est-elle possible ?
référence à un résultat théorique admise.
(5) La somme de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est-elle directe ? oui/non, justifiez.
(6) Donnez une base de $\mathcal{A}$.
(7) Donnez une base de $\mathcal{A}$, si cet espace est, cette fois, considéré non pas comme un $\mathbb{C}$-vectoriel mais comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.
(8) Donnez un supplémentaire de $\mathcal{B}$ dans E. Quelle en est sa dimension ?
(9) Toute matrice de $\mathcal{A}$ est-elle inversible ? oui/non, justifiez.

Opérateurs linéaires

XI.1. **Exercice**. Déterminer parmi les applications suivantes celles qui sont linéaires :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z)^\top & \mapsto & x+2y-z \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y)^\top & \mapsto & xy \end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y)^\top & \mapsto & (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1})^\top \end{array} \qquad i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y)^\top & \mapsto & (x+y, x-2y, y)^\top \end{array}$$

$$j : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z)^\top & \mapsto & (x+2y, 1-z)^\top \end{array} \qquad k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)^\top & \mapsto & (x+2y, x-z, x+y+z)^\top \end{array}$$

Dans le cas linéaire, écrire la matrice associée dans les bases canoniques et déterminer une base des images et noyaux.

XI.2. **Exercice**. Déterminer si l'application T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E dans les cas suivants :

a) E est l'espace des fonctions réelles dérivables sur $]0,1[$ et

$$\forall f \in E,\ \forall x \in]0,1[,\ T(f)(x) = x(D_x f)(x),$$

b) E est l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ de période 2π et

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy,$$

c) E est l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = (x^2+1)f(-x)$$

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ et $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = |f(x)|$,

e) $E = \mathbb{R}[X]_2$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et

$$\forall P \in E,\ T(P)(X) = P(0) + XP(1) + X^2P(2)$$

f) $E = \mathbb{R}[X]_n$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et

$$\forall P \in E,\ T(P)(X) = \int_0^1 (X+y)^n P(y)\,dy$$

XI.3. **Exercice**. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $u(P)(X) = P(X+a)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]_n$. Ecrire la matrice représentant cet endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{C}[X]_n$. Déterminer u^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

XI.4. **Exercice**. On définit les suites numériques u_n, v_n, w_n comme suit :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \left\{ \begin{array}{rcl} 2u_{n+1} & = & u_n \\ 12v_{n+1} & = & u_n + 5v_n - w_n \\ 12w_{n+1} & = & u_n - v_n + 5w_n \end{array} \right.$$

a) Déterminer la matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est A. Déterminer la représentation matricielle M de f dans la base $\mathcal{B}$.
d) Calculer M^n et en déduire A^n.
e) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

XI.5. **Exercice**. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(P) = (2X+1)P - (X^2+1)\mathrm{D}_X P$
a) Montrer que f est linéaire. Trouver son noyau (déterminer d'abord le degré de $f(P)$)
b) Trouver n tel que la restriction f_n de f à $\mathbb{R}[X]_n$ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]_n$. Montrer que f_n est bijective.

XI.6. **Exercice**. Montrer que l'application de l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égale à 3 dans l'espace des matrices complexes 3×3 définie par :

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{C}_3[z] & \to & \mathbb{C}_3^3 \\ p & \mapsto & p(M) \end{array} \qquad \text{avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un opérateur linéaire. Donner une base du noyau et de l'image.

XI.7. **Exercice**. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une partie de E.

a) Montrer que si la partie $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$ est libre alors il en est de même pour $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.
b) La réciproque est-elle vraie ? Sinon à quelle condition l'est-elle ?
c) Montrer que si $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ engendre E alors $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$ engendre Im, f.

XI.8. **Exercice**. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

XI.9. **Exercice**. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2)$
b) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$
c) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$
d) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

(indication : considérer la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ et à $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.)

XI.10. **Exercice**. Soient E_0, E_1,... E_n des espaces vectoriels sur un champ $\mathbb{K}$ avec $n > 1$. On dit que le diagramme

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \to \dots \to E_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \to \dots \to E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

est une suite exacte si pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}$.

a) Vérifier que : $\left(\{0\} \to E \xrightarrow{f} F \text{ est une suite exacte}\right) \iff f$ est injective,
$\left(E \xrightarrow{f} F \to \{0\} \text{ est une suite exacte}\right) \iff f$ est surjective.
b) On considère la suite exacte:

$$\{0\} \to E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \to \dots \to E_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \to \dots \to E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \to \{0\}$$

où les E_k sont de dimension finie. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$.
c) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que le diagramme suivant est une suite exacte

$$0 \to F \cap G \xrightarrow{f} F \times G \xrightarrow{g} F + G \to 0$$

où $f(x) = (x, x)$ et $g(x, y) = x - y$. Retrouver l'égalité $\dim(F\cap G) + \dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

XI.11. **Exercice**. Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie.

a) Si $f,\, g \in \mathcal{L}(E,F)$, montrer que $|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$.
b) Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f,\, g \in \mathcal{L}(F,G)$, montrer que

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim F \leqslant \mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \inf(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g).$$

(indication : considérer la restriction de g à $\mathrm{Im}\, f$.)

XI.12. **Exercice**. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur a dans E tel que $(a, f(a), f^2(a))$ est une base de E.
b) En déduire les endomorphismes de E qui commutent avec f.

XI.13. **Exercice**. On appelle trace d'une matrice carrée M le scalaire $\mathrm{tr}\, M$ égal à la somme de ses éléments diagonaux.

a) Montrer que tr est un opérateur linéaire. Déterminer son noyau et son image.
b) Montrer que pour toutes matrices M et N on a $\mathrm{tr}\,(MN) = \mathrm{tr}\,(NM)$.
c) Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie. On définit la trace d'un endomorphisme u de E comme la trace de sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que cette définition ne dépend du choix de la base.
d) Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v de E tels que $uv - vu = id_E$.
e) En est-il de même si E n'est pas de dimension finie ?

XI.14. **Exercice**. Notons V l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n^n$ formé par les matrices complexes de type (n,n) et rappelons que les matrices

$$E_{rs} = (\delta_{rj}\delta_{sk})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$$

avec $r, s \in \{1, 2 \ldots, n\}$ forment une base de V. Fixons $A \in V$.

a) Montrer que la loi $X \mapsto XA$ définit un endomorphisme u de V.
b) Montrer que la matrice de u dans la base $(E_{11}, E_{12} \ldots, E_{1n}, E_{21} \ldots E_{nn})$ est diagonale par bloc.
c) En déduire la valeur du déterminant de u.

XI.15. **Exercice** (Interro 1BM 02/2005). On considère l'application T qui à toute matrice A de $\mathbb{C}_2^2$ associe le polynôme $\det(A - zI)$ et l'application S qui, à tout polynôme $p(z)$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3, fait correspondre le reste de la division euclidienne de $p(z)$ par $z^2 + 1$.
Pour chacune de ces applications, on demande de répondre aux questions suivantes.

(1) L'application est-elle linéaire? Justifier.
(2) L'application définit-elle un endomorphisme? Pourquoi?

Dans le cas d'une réponse affirmative à la question précédente,

(3) Déterminer l'image et le noyau de l'application.
En donner une base et la dimension.
(4) Représenter l'opérateur dans les bases canoniques.
(5) L'opérateur est-il un projecteur? Si oui, quel est le projecteur associé, de manière à obtenir un système de projecteurs?

XI.16. **Exercice** (Examen 1BM Août 2005). Soit l'application $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2^2$ définie par

$$T(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{Re}\, z & \mathbf{Im}\, z \\ -\mathbf{Im}\, z & \mathbf{Re}\, z \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{C}$ est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a) L'application T est-elle linéaire (justifier) ?
b) L'application T est-elle injective (à justifier en se ramenant à la définition même de l'injectivité) ?

c) Déduire du point précédent la forme de $\operatorname{Ker} T$.
d) L'application T est-elle surjective dans $\mathbb{R}_2^2$?
e) Montrer que pour tous nombres complexes x et y, on a
$T(x.y) = T(x).T(y)$.

XI.17. **Exercice** (Examen 1BM Août 2005). Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que
$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$
Démontrer que $E = \operatorname{Kerf} f \oplus \operatorname{Im} g$. (*Suggestion* : $x = x - g \circ f(x) + g \circ f(x)$.)

XI.18. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). On considère les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}[x]_4$ et $\mathbb{R}_2^2$ formés respectivement des polynômes à coefficients réels de degré au plus 4 et des matrices réelles de dimension 2×2. Soit l'application $T : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}_2^2$ définie par
$$T(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{pmatrix} a_4 + a_0 & a_3 \\ a_3 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que T est linéaire et en donner une représentation matricielle dans des bases au choix.
b) Caractériser les matrices appartenant à $\operatorname{Im} T$.
Fournir une base de ce sous-espace vectoriel et en déduire la dimension de $\operatorname{Im} T$.
c) Fournir une base de $\ker T$. Quelle est la dimension de $\ker T$?
Ce dernier résultat peut-il être justifié par le point précédent ?
d) Soient
$$G = \rangle x^4 + x^2 + 3x + 1, x^3 \langle \quad \text{et} \quad H = \rangle x^4 + x, 1 - x^2 \langle$$
deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[x]_4$. Donner une base de $T(G)$ et de $T(H)$.
e) Avec les notations du point précédent, G et H sont-il en somme directe ? Même question pour $T(G)$ et $T(H)$? Dans les deux cas, si la somme n'est pas directe, caractérisez l'intersection des sous-espaces vectoriels correspondants.
f) L'application T est-elle un isomorphisme entre $\mathbb{R}[x]_4$ et $\mathbb{R}_2^2$?

Justifiez vos résultats.

XI.19. **Exercice** (Examen 1BM Sept. 2004). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit l'application
$$f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^4$$
définie par
$$f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$$
pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que l'application f est linéaire.
b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si le polynôme P est multiple de $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$.
c) Soient E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus 3 et $g : E \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par
$$g(P) = f(P)$$
pour tout $P \in E$. Montrer que l'application g est linéaire et injective.
d) Déduire du point précédent que pour tous nombres réels a, b, c, d, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $P(1) = a$, $P(2) = b$, $P(3) = c$ et $P(4) = d$.
e) Donner une représentation matricielle de l'application g dans des bases au choix (à préciser). Montrer que la représentation obtenue permet de retrouver le résultat du point précédent.

XI.20. **Exercice** (LM). Trouver une infinité d'isomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(1,1) = (1,2)$.

XI.21. **Exercice** (LM). Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathbb{R}^3$ telles que $f(1,-1,2) = 1$.

XI.22. **Exercice** (LM). Soit E un $\mathbb{K}$-vectoriel ayant $B = (e_1, e_2, e_3)$ pour base. Soit l'application linéaire f dont la représentation dans la base B est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Représenter f dans la base (e_3, e_2, e_1).
b) Représenter f dans la base $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

XI.23. **Exercice**. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -6x + 4y + 2z \\ 3x - y + z \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que f est une application linéaire.
b) Représenter f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
c) Montrer que $f \circ f = 2f$. En déduire que si $v \in \operatorname{Im} f$, alors $f(v) = 2v$.
d) Montrer que

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

e) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur appartient à $\operatorname{Ker} f$ et dont les deux derniers appartiennent à $\operatorname{Im} f$. Représenter f dans cette base.

XI.24. **Exercice** (LM). Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_2$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_2$ définie par $f(M) = AM - MA$.

a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Représenter f dans la base

$$B = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

c) Si $a = d$ et $b = -c \neq 0$, les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

XI.25. **Exercice** (Roudier). Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-vectoriels et $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. Prouver que $\psi \circ \varphi = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \psi$.

XI.26. **Exercice** (Théorème des noyaux). Soient f et g deux applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui-même (i.e., deux endomorphismes de E) tels que

$$f \circ g = g \circ f \quad \text{et} \quad f + g = id_E.$$

Démontrer que

$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g.$$

XI.27. **Exercice** (Roudier). Soient E un $\mathbb{Q}$-vectoriel de dimension 3 rapporté à une base B_E et F un $\mathbb{Q}$-vectoriel de dimension 4 rapporté à une base B_F. Déterminer le rang, l'image et le noyau de l'application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice qui représente f dans ces deux bases est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

XI.28. **Exercice**. Répondre aux questions à choix multiples suivantes.

(1) Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension n et p respectivement, alors $\dim(L(E;F))$ vaut
☐ n^p ☐ $\sup(n,p)$ ☐ $n+p$ ☐ np ☐ autre

(2) $\dim(L(\mathbb{C}_n^p, \mathbb{C}_k[X])) =$
☐ npk ☐ $n+p+k$ ☐ $np(k+1)$ ☐ $np+k$ ☐ $np+k+1$
☐ autre

(3) Si E est un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $T \in L(E)$, alors $T^{-1}(F) = \{x \in E : Tx \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de E. ☐ Vrai
☐ Faux

(4) Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0$ alors u est inversible.
☐ Vrai ☐ Faux

(5) Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $u^3 + u^2 - u = 0$ alors u n'est pas inversible.
☐ Vrai ☐ Faux

(6) Si $T \in L(E)$, $\dim(E) = 2m$, $T^2 = 0$ et $\dim(\operatorname{Im} T) = m$, alors $\operatorname{Im} T = \ker(T)$
☐ Vrai ☐ Faux

(7) Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in L(E;F)$. Si x_1,...,x_n sont des vecteurs linéairement indépendants de E alors $u(x_1)$,...,$u(x_n)$ sont linéairement indépendants. ☐ Vrai ☐ Faux

(8) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n et p respectivement. Si $T \in (L(E;F))$ est injectif alors ☐ $n < p$ ☐ $n = p$ ☐ $n > p$
☐ autre

(9) Soient U et V deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n. Si $\mathrm{rg}(UV) = \mathrm{rg}(U) = n$ alors V est inversible. ☐ Vrai ☐ Faux

XI.29. **Exercice** (Examen Juin 2006). Soit α un nombre complexe non nul et l'application $T : \mathbb{C}[z]_2 \to \mathbb{C}_2^2$ qui à un polynôme de degré au plus deux de la forme $a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c$ associe la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

(1) Vérifier que T est linéaire.
(2) Réprésenter T matriciellement dans des bases de $\mathbb{C}[z]_2$ et $\mathbb{C}_2^2$ de votre choix (ces deux espaces étant considérés comme $\mathbb{C}$-vectoriels).
(3) Donner une base de $\operatorname{Im} T$ tout d'abord si $\mathbb{C}_2^2$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-vectoriel puis ensuite, s'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.
(4) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)$$

des applications linéaires définies sur $\mathbb{C}[z]_2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}_2^2$ (tous les espaces envisagés étant des $\mathbb{C}$-vectoriels) ? En donner une base et décomposer T dans celle-ci.

XI.30. **Exercice** (Examen août 2006). Soient l'espace vectoriel réel E donné par

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + y - z + t = 0\}$$

et l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T : (x,y,z,t) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ z+t \end{pmatrix}$$

a) Quelle est la dimension de E comme $\mathbb{R}$-vectoriel ?
b) T est-il surjectif dans $\mathbb{R}^2$?
c) Que vaut la dimension de $\ker T$ et préciser une base de cet espace.
d) Déterminer un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$T(F) = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

e) Représenter T dans des bases au choix.

XI.31. **Exercice** (Examen Juin 2007). Soient $n > 1$ un entier, $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ et ν une permutation de $\{0, 1, \ldots, n\}$. On définit l'application $T : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ par

$$\begin{aligned} &T(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0) \\ &= a_{\nu(n)} X^n + a_{\nu(n-1)} X^{n-1} + \cdots + a_{\nu(1)} X + a_{\nu(0)}. \end{aligned}$$

a) Expliquer pourquoi T est linéaire ?
b) Quel est le rang de l'application ?
c) Représenter T dans une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ au choix.

XI.32. **Exercice** (Examen Juin 2007). Avec les mêmes notations que dans l'exercice précédent, on définit l'application $S : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ par

$$S(a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) = a_3(X^3 + X^2) + a_1(X + 1).$$

a) S est-il un projecteur ? Justifier.
b) Expliciter $\ker(S)$ et $\mathrm{Im}(S)$ et illuster le théorème de la dimension.

XI.33. **Exercice** (Examen Juin 2008). Soit l'ensemble $\mathbb{R}^2_2$ des matrices 2×2 à coefficients réels, considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On définit deux applications $S, T : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_2$ par respectivement

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2a-b \\ b+d & 2c-d \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que S est linéaire.
b) Caractériser le noyau de S (i.e., donner la forme explicite de ses éléments).
c) Quel est le rang de S ?
d) Sachant que l'application T est linéaire, T est-il un isomorphisme ?
e) En explicitant une base de $\mathbb{R}^2_2$, représenter S et T dans cette base.
f) L'application $T \circ S : A \mapsto T(S(A))$ est-elle linéaire ? Si tel est le cas, représenter $T \circ S$ dans la base choisie au point précédent.
g) Calculer

$$T^{369} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

h) Un point fixe de T est une matrice A telle que $TA = A$. L'ensemble des points fixes de T est-il un sous-espace espace vectoriel de $\mathbb{R}^2_2$? Et le cas échéant, en donner la dimension.

XI.34. **Exercice** (Examen Août 2007). Soit $\mathbb{C}[z]_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. On considère l'application

$$T : \mathbb{C}[X]_3 \to \mathbb{C}[X]_3 : P(z) \mapsto (z^2 - 1)\,\mathrm{D}_z^2 P + (2z + 1)\,\mathrm{D}_z P$$

a) Montrer que T est linéaire.
b) Représenter T dans une base au choix.
c) Montrer que T est diagonalisable.

XI.35. **Exercice** (Examen Août 2007). Soient E un espace vectoriel complexe de dimension 10, F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On pose $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel des endomorphismes T de E pour lesquels F et G sont stables (i.e., $T(F) \subset F$, $T(G) \subset G$). Formuler explicitement la dimension de $\mathcal{U}$ en fonction de $\dim F$ et $\dim G$. (Suggestion : *plusieurs argumentations sont possibles, le plus rapide consiste certainement à penser à la représentation de $T \in \mathcal{U}$ dans une base adéquatement choisie.*)

CHAPITRE XII

Polynômes

XII.1. **Exercice**. Combien y a-t-il de polynômes de degré au plus d sur $\mathbb{Z}_m$? Même question, mais cette fois, on demande le nombre de polynômes de degré exactement d sur $\mathbb{Z}_m$?

XII.2. **Exercice**. Notons P et Q les polynômes de $\mathbb{Z}_5[X]$ définis par

$$P(X) = X^3 + X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^2 + 2.$$

a) Montrer que P et Q sont irréductibles dans $\mathbb{Z}_5[X]$.
b) Déterminer des polynômes U_0, V_0 de $\mathbb{Z}_5[X]$ tels que $U_0P + V_0Q = 1$.
c) Décrire l'ensemble des couples (U, V) de polynômes de $\mathbb{Z}_5[X]$ tels que

$$UP + VQ = 1.$$

CHAPITRE XIII

Opérateurs et réduction

XIII.1. **Exercice** (Hefferon). Soit l'application $t : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ définie par

$$t : ax^2 + bx + c \mapsto (c - 2a)x^2 + (b + 8c)x + 2a + 6b + 5.$$

Quelles sont les valeurs propres de t et en déterminer des vecteurs propres non nuls associés.

XIII.2. **Exercice** (Hefferon). Soit l'application $t : \mathbb{C}_2^2 \to \mathbb{C}_2^2$ définie par

$$t : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de t et en déterminer des vecteurs propres non nuls associés.

XIII.3. **Exercice**. Réduire à la forme de Jordan les matrices suivantes:

- $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

XIII.4. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et T un endomorphisme du $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension finie E. Démontrez que

$$\ker(P(T)) \oplus \ker(Q(T)) \subset \ker(PQ(T)).$$

(Suggestion : utiliser le théorème de Bezout pour tirer parti du fait que P et Q sont premiers entre eux.)

XIII.5. **Exercice** (Examen 1BM Août 2005). Soient E un espace vectoriel de dimension 5 et T un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est

$$P(x) = (x - 1)^4(x - 5)^2.$$

a) Quelles sont les formes possibles des tableaux formant une base de l'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 (resp. 5) et répartie en chaînes engendrées par $T-\mathrm{id}$ (resp. $T - 5\,\mathrm{id}$) ?

b) A une permutation des blocs de Jordan près, combien de réductions à la forme canonique de Jordan existe-t-il pour un endomorphisme ayant P pour polynôme caractéristique ?

c) Si on sait de plus que le polynôme minimun de T est

$$M(x) = (x - 1)^3(x - 5)^2,$$

donner (à une permutation des blocs de Jordan près), les réductions possibles à la forme canonique de Jordan pour un tel opérateur T. En particulier, dans ce cas, T est-il diagonalisable (justifier) ?

XIII.6. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2004). Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2-i & -1 & 0 \\ -1-i & 1+i & -1 & -3-i & -1 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 4+i & -2 & -5-2i & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Pour éviter d'éventuelles erreurs de calcul lors de vos développements, vous pouvez utiliser le résultat suivant :

$$(A-\lambda I)^2 =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda(2+\lambda) & -2(2+\lambda) & 2(\lambda-i) & 5+(4+2i)\lambda & 2(2+\lambda) & 0 \\ 1+\lambda(2+2i) & -5-(2+2i)\lambda+\lambda^2 & 2(\lambda-i) & 5-2i+(6+2i)\lambda & 2(2+\lambda) & 2(\lambda-i) \\ 0 & 0 & (\lambda-i)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-i) & (\lambda-i)^2 & 0 & 0 \\ -3+2i\lambda & -13-(8+2i)\lambda & 4(\lambda-i) & 10-2i+(10+4i)\lambda & (2+\lambda)(6+\lambda) & 2(\lambda-i) \\ 0 & 0 & 2(\lambda-i) & 0 & 0 & (\lambda-i)^2 \end{pmatrix}$$

XIII.7. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Soit λ un nombre réel. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice M est-elle diagonalisable ? (Justifier)
b) Si λ est une valeur telle que M soit diagonalisable, déterminer une matrice S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale. Déterminer en particulier les éléments diagonaux de cette dernière.
c) Quelle est la matrice obtenue après réduction de M à la forme canonique de Jordan lorsque $\lambda = 0$?

XIII.8. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Soit l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$ où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 11 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) A quelle condition sur $\mu \in \mathbb{R}$, le vecteur

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

est-il la tête d'une chaîne de longueur 2 engendrée par T ?
b) Construire une chaîne de longueur 3 engendrée par T.

XIII.9. **Exercice** (Examen 1BM Juin 2005). Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que B possède une valeur propre double α et une valeur propre triple β. De plus, la forme du tableau associé à une base répartie en chaînes de l'espace caractéristique F_α est

$$\begin{array}{|c|c|}\hline * & * \\ \hline \end{array}$$

et celle pour l'espace caractéristique F_β est

$$\begin{array}{|c|c|}\hline * & * \\ \hline * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

En utilisant ces informations, montrer que les matrices I, B, B^2, B^3, B^4 sont linéairement dépendantes en exhibant une relation linéaire les liant. Il est demandé d'obtenir des valeurs exactes pour les coefficients de cette dernière relation (i.e., ne faisant plus intervenir α et β).

XIII.10. **Exercice** (Examen 1BM août 2006). a) Démontrer que le polynôme minimum d'une matrice diagonale bloc composée

$$\Delta = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k)$$

(où chacun des blocs A_i est carré) est égal au ppcm des polynômes minimums des A_i, $i = 1, \ldots, k$.

b) En utilisant le point précédent, quel est le polynôme minimum de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire que A, A^2, A^3 sont linéairement dépendants.

c) En utilisant a), déterminez le polynôme minimum de

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A_2}).$$

On donnera au préalable le polynôme minimum de A_1 et de A_2.

XIII.11. **Exercice** (Examen 1BM août 2006). Soit A une matrice 8×8 dont les polynômes minimum et caractéristique sont respectivement

$$\mathcal{M}_A(x) = (x-1)^2\,(x-2)^2\,(x-3) \text{ et } \chi_A(x) = (x-1)^3\,(x-2)^3\,(x-3)^2.$$

a) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Pour répondre à cette question, un simple argument théorique suffit.)

b) Si elle est diagonalisable, donner une réduction possible de A sous forme diagonale. Sinon, donner une réduction possible de A sous forme de Jordan.

XIII.12. **Exercice** (Examen 1BM Sept. 2004). On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner les valeurs propres de A et leur multiplicité algébrique respective.

b) Pour chaque valeur propre λ de A, donner la forme du tableau d'une base du sous-espace caractéristique F_λ répartie en chaînes engendrées par $A - \lambda I$?

c) En déduire une réduction de la matrice A à la forme canonique de Jordan. Pour ce point, il n'est pas nécessaire de donner la matrice permettant d'effectuer cette réduction.

XIII.13. **Exercice** (Hefferon). Quel est le polynôme minimum de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

XIII.14. **Exercice** (Hefferon). Une matrice $S \in \mathbb{C}_n^n$ est une racine carrée d'une matrice T si $S^2 = T$. Montrer que toute matrice inversible possède une racine carrée. (Sugestion : utiliser la forme de Jordan.)

XIII.15. **Exercice** (Examen Juin 2006). Réduire la matrice suivante à la forme de Jordan

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veillera à donner explicitement une matrice permettant d'effectuer cette réduction et à en donner la forme de Jordan correspondante.

XIII.16. **Exercice** (Examen Juin 2007). Soit M une matrice carrée de $\mathbb{C}_n^n$ ayant

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 3)^4\ (\lambda - 5)^2 \text{ et } \mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda - 3)^2\ (\lambda - 5)$$

respectivement comme polynôme caractéristique et minimum.

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.

b) A quelle(s) forme(s) de Jordan M peut-il être réduite. (Donner toutes les formes possibles, à une permutation près des blocs.)

c) Pour chacune des formes de Jordan J obtenues au point précédent, donner la forme générale de J^n, $n \geq 0$.

d) Donner la dimension du sous-espace vectoriel $\{P(M) : P \in \mathbb{C}[z]\}$?

XIII.17. **Exercice** (Examen Juin 2008). Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sachant que $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^4$, on donnera une matrice S et la forme de Jordan $S^{-1}AS$ correspondante.

XIII.18. **Exercice** (Examen Août 2007). Soit la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sachant que -1 est une valeur propre de M, réduire M à la forme canonique de Jordan. Donner explicitement une matrice S donnant cette forme de Jordan et la matrice $S^{-1}MS$ correspondante.

XIII.19. **Exercice** (Examen Août 2008). On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}[X]_3$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. Déterminez une base de polynômes (p_1, p_2, p_3, p_4) de $\mathbb{R}[X]_3$ dans laquelle l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3 : P \mapsto 2P + \mathrm{D}_X P$$

se représente par une matrice sous forme canonique de Jordan (D_X représente la dérivée usuelle). On calculera explicitement la représentation matricielle de T dans la base (p_1, p_2, p_3, p_4). Quel est le degré du polynôme minimum de T ?

CHAPITRE XIV

Polynômes d'endomorphisme, projecteurs

XIV.1. **Exercice**. Démontrer que le polynôme minimum d'une matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$$

(où chacun des A_i est carré) est égal au ppcm des polynômes minimum de A_i (pour $i \in \{1 \dots, k\}$).

XIV.2. **Exercice**. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On désigne par T l'application

$$T : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x] : p \mapsto p(\alpha) + \alpha(\mathrm{D}_x p)(\alpha)x + \frac{\alpha^2}{2}(\mathrm{D}_x^2 p)(\alpha)x^2.$$

(1) Montrer que T est linéaire.
(2) Donner une représentation matricielle de la restriction M de T à $\mathbb{C}_2[x]$ ainsi que son polynôme caractéristique.
(3) Pour quelle(s) valeur(s) de α l'opérateur M est-il diagonalisable?
(4) Déterminer le polynôme minimum de M.
(5) Quel est le rang de T? Montrer que $\mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T) = \mathbb{C}_n[x]$.
(6) Donner le polynôme minimum et le polynôme caractéristique de T.

XIV.3. **Exercice**. On considère $\mathbb{C}_n^n$ comme $\mathbb{C}$-vectoriel.

(1) Montrer que l'application
$$P : \mathbb{C}_n^n \to \mathbb{C}_n^n : A \mapsto \frac{\mathrm{tr}A}{n} I$$
est un projecteur.
(2) Décomposer V sous la forme $\ker(P) \oplus \mathrm{Im}P$ et caractériser ces deux sous-espaces;
(3) Donner la forme explicite de la projection de V sur $\ker(P)$ parallèlement à $\mathrm{Im}P$.

XIV.4. **Exercice**. Soit $T \in L(E)$, involutif, c'est-à-dire que $T^2 = I$. Démontrer que

$$\ker(T - I) = \mathrm{Im}(T + I) \quad \text{et} \quad \ker(T + I) = \mathrm{Im}(T - I),$$

et

$$E = \ker(T - I) \oplus \ker(T + I).$$

Réciproquement, montrer qu'à toute décomposition

$$E = A \oplus B$$

correspond une unique involution T telle que $A = \ker(T - I)$ et $B = \mathrm{Im}(T - I)$.