Examen d'algèbre mardi 21 juin 2022
1ers bacheliers en sc. physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [1 point]

- Définir l'indépendance linéaire.
- Définir la notion de sous-espace vectoriel.

2) [5 points] Au CHOIX répondre à une des deux questions suivantes.

- Enoncer et démontrer les deux lois des mineurs en ce compris le lemme nécessaire à la preuve.
- Enoncer et démontrer la formule donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

3) [5 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \beta & -1 & \beta - 1 & 3 \\ \beta & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de M.

b) Etudier le rang de M en fonction du paramètre complexe β.

c) Quand le système suivant est-il compatible (on ne demande pas de le résoudre) ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .M. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) [5 points] On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{C}^4$, vu comme $\mathbb{C}$-vectoriel,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

et

$$G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle$$

a) Donner une base de F.

b) Déterminer une base de $F \cap G$.

c) Quelle est la dimension de $F + G$?

d) Fournir une base de deux supplémentaires distincts de F dans $\mathbb{C}^4$.

e) Fournir une base d'un supplémentaire de $F + G$ dans $\mathbb{C}^4$.

5) [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Soient A, B deux matrices carrées inversibles, si $A+B$ est inversible, alors $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.

b) On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2022} = I.$$

c) Soit $A \in \mathbb{R}^n_n$ une matrice, $n \geq 2$. Si le système $Ax = 0$ possède l'unique solution 0, alors pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, le système $Ax = b$ est compatible.

d) Les polynômes $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2 + 4X$, $P_3(X) = 3 + 4X + X^2$ sont linéairement indépendants ($\mathbb{R}[X]$ étant considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel).