Examen d'algèbre

Bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
lundi 30 mai 2022

Consignes : Répondre aux parties théorie [Q. 1,2,3] / exercices [Q. 4,5,6] sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Fin de l'examen : 12h00

1) [5 pts]

a) Enoncer deux corollaires du théorème fondamental de l'algèbre (concernant les zéros d'un polynôme).

b) Enoncer la règle de Descartes. Quel intervalle minimal I de $\mathbb{R}$ obtient-on en applicant cette règle à $P(X) = 5X^{20} - 80iX^{13} + 40X^7 - 11$? Autrement dit, si P possède un zéro réel α, alors $\alpha \in I$.

c) Enoncer le théorème de Cayley–Hamilton. En déduire que si $A \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice $n \times n$, alors les matrices $I, A, \ldots, A^n$ sont linéairement dépendantes, $\mathbb{C}_n^n$ étant considéré comme un $\mathbb{C}$-vectoriel.

d) Donner *un exemple* d'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ distincte de l'identité et de l'application nulle telle que $T^2 = T$. Justifier votre construction.

2) [5 pts] AU CHOIX (ne répondez qu'à <u>une</u> des deux questions)

- Enoncer et <u>démontrer</u> la propriété caractérisant les matrices unitaires (resp. hermitiennes) au sein de l'ensemble des matrices normales (en fonction des valeurs propres). Autrement dit, une matrice normale est unitaire (resp. hermitienne) *si et seulement si* ...
- Enoncer et <u>démontrer</u> le théorème de la dimension. On rappellera les définitions de l'image et du noyau d'une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E; F)$.

3) [4 pts] <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Une matrice normale est toujours inversible.

b) La fraction

$$\frac{1}{(z^2+4)(z-2)^3}$$

possède les mêmes décompositions en fractions simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

c) Les valeurs propres d'une matrice 3×3 à coefficients entiers sont réelles.

d) On peut trouver une fraction rationnelle $R(z)$ telle que $1+i$ est un pôle de R mais pas de $D_z R$.

4) [7 pts] Soit E un $\mathbb{C}$-vectoriel ayant $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ comme base. On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$Tu_1 = u_1 + u_2, \quad Tu_2 = 2u_1 + u_2, \quad Tu_3 = 3u_3 + 2u_4, \quad Tu_4 = 3u_4.$$

a) Représenter matriciellement T dans la base U.

b) Quelles sont les valeurs propres de T ainsi que leur multiplicité algébrique et géométrique respective ?

c) Représenter matriciellement $T^2 - id$ dans la base U ; déduire du point précédent les valeurs propres de $T^2 - id$.

d) Soit la base

$$V = (w_1 = u_1 + u_2 \ ; \ w_2 = u_1 - u_2 \ ; \ w_3 = u_3 + u_4 \ ; \ w_4 = u_3 - u_4).$$

Représenter matriciellement T dans la base V.

e) Déterminer l'image et le noyau de T. Que pouvez-vous conclure (injection, surjection, bijection) ?

5) [4 pts] Sachant que $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = (x-3)^2(x+1)^2$. Exprimer la fraction rationnelle suivante

$$\frac{3x^6 - 12x^5 - 5x^4 + 38x^3 + 15x^2 - 2x + 27}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9}$$

comme somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre que l'on décomposera ensuite en fractions simples (sur $\mathbb{R}$). Donner la forme de cette décomposition avec des constantes indéterminées puis, fournir un système permettant de déterminer ces constantes. On ne demande **pas** de le résoudre.

6) [5 pts] Soient $\phi \in \mathbb{R}$ un paramètre et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ \phi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \phi & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, la matrice M ne possède-t-elle que des valeurs propres simples ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, la matrice M est-elle diagonalisable ? (On ne demande **pas** de diagonaliser.)

c) Soient les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ, x est-il un vecteur propre de M ? Justifier que y n'est jamais vecteur propre de M.