**Examen d'algèbre** lundi 13 juin 2022
1ers bacheliers en sc. mathématiques

**Consignes** : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

**1)** [1,5 points]

- Définir la notion de système compatible.
- Enoncer le théorème de Rouché (exprimant la compatibilité d'un système). On précisera les dimensions des différentes matrices utilisées.

**2)** [5 points] Au CHOIX répondre à une des deux questions suivantes.

- Enoncer et démontrer le théorème de Steinitz (concernant la dépendance linéaire).
- Enoncer et démontrer la formule de changement de bases (on précisera le contexte et les notations utilisées).

**3)** [3,5 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \beta & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2\beta & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de $M$.

b) Etudier le rang de $M$ en fonction du paramètre complexe $\beta$.

c) On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y + \beta z + 3t &= 0 \\ x - z + t &= 0 \\ 2x + 2\beta y + 4t &= 0 \\ -y + t &= 0 \end{cases}$$

Préciser, en fonction de $\beta$, quand ce système possède une infinité de solutions et, dans ce cas, donner une base de l'ensemble des solutions.

**4)** [6 points] On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^4$, vu comme $\mathbb{C}$-vectoriel,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ -i \end{pmatrix}, \; u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a) Les vecteurs $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ sont-ils linéairement indépendants ? Justifier.

b) Quelle est la dimension de $\rangle u_1, u_2, u_3, u_4 \langle$ ?

c) A-t-on $\rangle u_1, u_2, u_3, u_4 \langle = \rangle u_1, u_2 \langle \oplus \rangle u_3 \langle$ ? Discuter la somme directe et l'égalité.

d) Donner une base de $\rangle u_1, u_2 \langle \cap \rangle u_3, u_4 \langle$.

e) Vérifier que $u_1, u_2, u_4, u_5$ forment une base. Quelles sont les composantes de $u_3$ dans cette base ?

f) Donner une base d'un supplémentaire de $\rangle u_1, u_2 \langle + \rangle u_5 \langle$ dans $\mathbb{C}^4$.

**5)** [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) L'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

b) Dans le $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}_2^2$, les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendantes.

c) Si on permute circulairement trois colonnes d'une matrice carrée, alors le déterminant change de signe.

d) On considère trois vecteurs $x, y, z$ de $\mathbb{R}^5$, si le mineur formé par les trois premières lignes de $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ est nul, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.