Introduction aux mathématiques discrètes

Bachelier ingénieur civil, Juin 2021

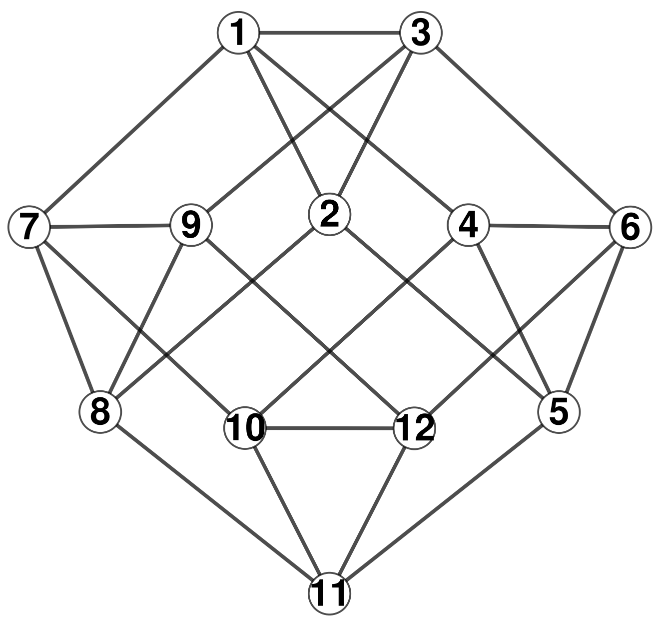
Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'examen.
Bon travail !

Laissez **les pages agraffées**, inscrivez votre **nom et prénom** sur chaque page (coin supérieur droit). Examen **de 8h30 à 11h30**.

1. [5 points] à répondre sur la feuille prévue à cet effet.

2. [6 points] Un 1-*triangle* est un graphe simple complet K_3 à trois sommets. Pour $n > 1$, un n-*triangle* est construit récursivement en prenant deux copies d'un $(n-1)$-triangle et en ajoutant des arêtes entre les sommets correspondants de chaque copie.

On a représenté ci-dessous un 3-triangle. Par exemple, le sous-graphe induit par les sommets $\{1, 2, 3\}$ est un 1-triangle et celui induit par les sommets $\{1, \dots, 6\}$ est un 2-triangle (on a joint les 1-triangles induits par $\{1, 2, 3\}$ et $\{4, 5, 6\}$).



a) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$, un n-triangle est-il eulérien ? Justifier.

b) Le 3-triangle représenté ci-dessus est-il hamiltonien ? Si oui, fournir un circuit hamiltonien (donner la suite des sommets visités).

c) Combien d'arêtes possèdent respectivement un 4-triangle et un 5-triangle ? Expliquer votre calcul.

d) Un n-triangle est-il k-régulier ? Si oui, quelle est la valeur de k (en fonction de n) ?

e) Si un n-triangle possède 3.2^{n-1} sommets, appliquer la "handshaking formula" pour déduire le nombre d'arêtes d'un n-triangle, $n \geq 1$.

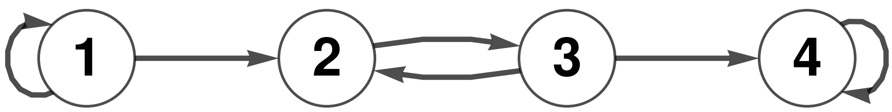
f) Démontrer que si un n-triangle est hamiltonien, alors un $(n+1)$-triangle est aussi hamiltonien. Suggestion : considérer un chemin hamiltonien dans le n-triangle.

3. [4 points] Soit un graphe planaire connexe dont les faces sont des triangles ou des carrés. Il y a deux types de sommets :

- ceux, de degré 5, appartenant exactement à une face carrée et à 4 faces triangulaires ;
- ceux, de degré 6, appartenant exactement à 6 faces triangulaires.

Chaque face triangulaire possède exactement un sommet de degré 6. Déterminer le nombre de sommets de chaque type, d'arêtes et de faces triangulaires et carrées de ce graphe.

4. [5 points] On considère le graphe orienté représenté ci-dessous :



a) Soit $f(n)$ le nombre de chemins de longueur n débutant au sommet 1 et arrivant au sommet 4. Montrer que $f(n)$ vérifie, pour tout $n \geq 0$, la relation de récurrence linéaire

$$f(n+4) = 2f(n+3) - 2f(n+1) + f(n)$$

avec $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ et $f(3) = 1$.

b) Donner une formule close pour $f(n)$.

c) En déduire la valeur de la limite suivante (justifier votre réponse)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{n^2}.$$

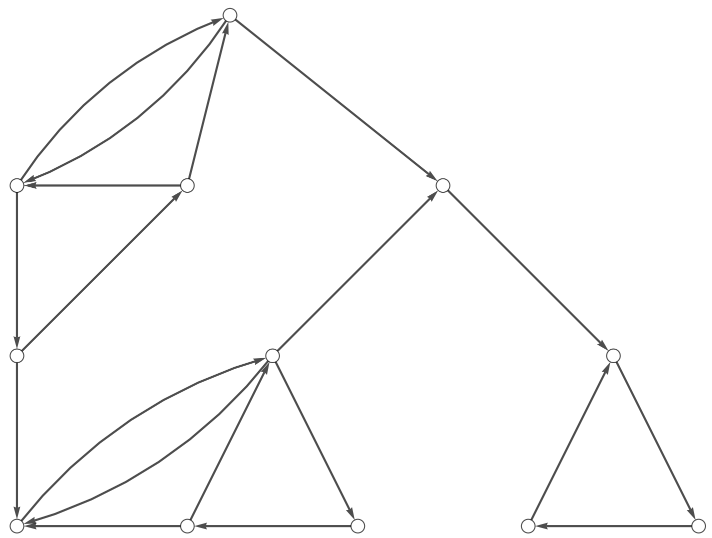
d) On considère les mots de la forme

$$a^i b (ab)^{j+1} a^k = \underbrace{a \cdots a}_{i \text{ fois } a} b \underbrace{abab \cdots ab}_{(j+1) \text{ fois } ab} \underbrace{a \cdots a}_{k \text{ fois } a}, \qquad i, j, k \geq 0.$$

On note $g(n)$ le nombre de mots de longueur n de cette forme ; par exemple $g(3) = 1$ car le seul mot de cette forme est bab (quand $i, j, k = 0$). Montrer que $g(n)$ satisfait la même relation de récurrence que $f(n)$. Suggestion: utiliser le graphe représenté ci-dessus.

BROUILLON ICI ET AU VERSO

1. a) Entourer les composantes fortement connexes du graphe orienté représenté ci-dessous. Dans un second temps, ajouter un nombre minimum d'arcs pour rendre ce graphe fortement connexe.



Réponse. Le graphe possède 4 composantes fortement connexes formées respectivement des 4 sommets en haut à gauche (on y trouve un cycle de longueur 4), des 4 sommets en bas à gauche, du triangle à droite et enfin, le sommet seul permettant d'accéder au triangle de droite (il ne faut pas oublier le cas pathologique d'une composante limitée à un unique sommet).

Il suffit d'ajouter un seul arc partant d'un des sommets du triangle en bas à droite et arrivant dans un des 4 sommets de la composante en haut à gauche. Pour vous aider, il était également possible de représenter le graphe acyclique des composantes connexes.

b) Définir la matrice d'adjacence A_G d'un graphe orienté $G = (V, E)$ où l'ensemble des sommets est $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Réponse. L'élément i, j de cette matrice, $[A_G]_{i,j}$ est le <u>nombre</u> d'arcs du sommet v_i (origine) vers v_j (destination).

Que représentent les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A_G \quad \text{et} \quad A_G \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Réponse. Ces deux vecteurs sont respectivement

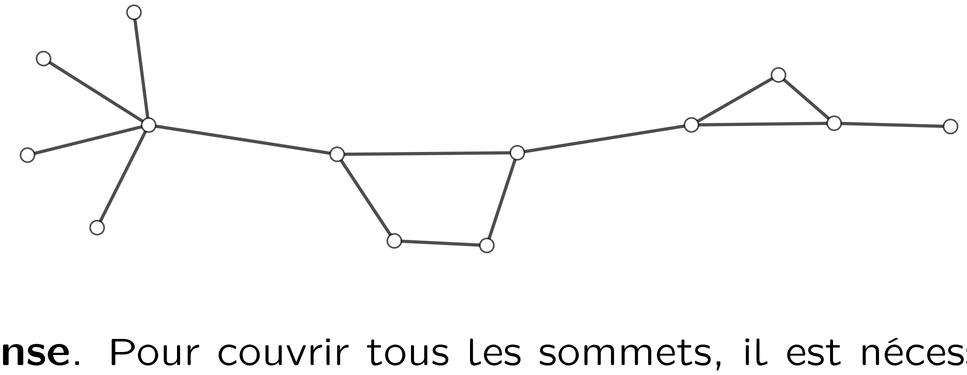
$$\begin{pmatrix} d^-(v_1) & \cdots & d^-(v_n) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} d^+(v_1) \\ \vdots \\ d^+(v_n) \end{pmatrix}$$

où $d^+(v)$ est le demi-degré sortant du sommet v et $d^-(v)$ son demi-degré entrant. En effet, ces multiplications reviennent à sommer tous les éléments d'une même colonne ou d'une même ligne.

c) Pour des graphes simples non orientés ayant au moins 8 sommets et contenant une copie de K_4, donner un exemple de graphe planaire et un exemple de graphe non planaire (justifier vos choix).

Réponse. Les réponses possibles sont bien évidemment multiples. Par exemple, K_8 contient K_4 comme sous-graphe et n'est pas planaire car il contient une copie de K_5 (on sait que K_5 n'est pas planaire — donc aucun graphe contenant K_5 ne peut être planaire — ou, on utilise le théorème de Kuratowski). Pour un exemple de graphe planaire, il suffit de partir de K_4 (qui est planaire) et d'ajouter à chacun des 4 sommets une arête vers un nouveau sommet (de degré 1). Ainsi, K_4 avec ces 4 arêtes supplémentaires reste planaire (une représentation convenable, i.e., un dessin dans lequel les arêtes ne se coupent pas, suffit à le prouver).

d) Dans le graphe ci-dessous, mettre en évidence un sous-arbre couvrant. Combien de sous-arbres couvrants différents ce graphe possède-t-il ?



Réponse. Pour couvrir tous les sommets, il est nécessaire dans les deux cycles présents (un de longueur 4, l'autre de longueur 3) de conserver toutes les arêtes sauf une (sinon on aurait un cycle). On doit donc retirer exactement une arête du cycle de longueur 4 et une arête du cycle de longueur 3. Au total, 12 choix possibles.

2. a) Pour quelles valeurs de $n \geq 1$, un n-triangle est-il eulérien ? Justifier.

Réponse. Les sommets d'un n-triangle sont tous de degré $n+1$. On sait qu'un graphe (connexe) est eulérien si et seulement si ses sommets sont de degré pair. Donc, un n-triangle est eulérien si et seulement si n est impair.

b) Le 3-triangle donné sur la feuille d'énoncés est-il hamiltonien ? Si oui, fournir un circuit hamiltonien (donner la suite des sommets visités dans l'ordre).

Réponse. Fournir un circuit hamiltonien suffit pour justifer (c'est la définition) :

$$1, 3, 6, 4, 5, 2, 8, 9, 12, 11, 10, 7, 1.$$

c) Combien d'arêtes possèdent respectivement un 4-triangle et un 5-triangle ? Expliquer votre calcul.

Réponse. Par construction, un n-triangle va posséder $2\times$ le nombre d'arêtes d'un $(n-1)$-triangle (car on considère deux telles copies) auquel on doit ajouter les arêtes liant les sommets correspondants des 2 copies (une arête par paire de sommets). Autrement dit,

$$\#E_n = 2\#E_{n-1} + \#V_{n-1}$$

où $\#E_j$ et $\#V_j$ dénotent le nombre d'arêtes et de sommets du j-triangle. On a $\#E_3 = 24$ et $\#V_3 = 12$. Donc, $\#E_4 = 2.24+12 = 60$. On remarque que $\#V_4 = 2.\#V_3 = 24$. Donc, $\#E_5 = 2.60 + 24 = 144$.

d) Un n-triangle est-il k-régulier ? Si oui, quelle est la valeur de k (en fonction de n) ?

Réponse. Comme déjà annoncé en a), chaque sommet est de degré $n+1$. Le n-triangle est donc $(n+1)$-régulier.

e) Si un n-triangle possède 3.2^{n-1} sommets, appliquer la "handshaking formula" pour déduire le nombre d'arêtes d'un n-triangle, $n \geq 1$.

Réponse. Il était possible de déjà utiliser la “handshaking formula” au point c). Celle-ci donne :

$$\sum_{v \in V_n} \deg v = 3.2^{n-1}.(n+1) = 2\#E_n.$$

Donc, le nombre d’arêtes vaut $3.2^{n-2}.(n+1)$. Pour $n = 4$, on retrouve bien $3.2^2.5 = 60$ et pour $n = 5$, $3.2^3.6 = 144$.

f) Démontrer que si un n-triangle est hamiltonien, alors un $(n+1)$-triangle est aussi hamiltonien. *Suggestion* : considérer un chemin hamiltonien dans le n-triangle.

Réponse. Si on dispose d’un circuit hamiltonien dans un n-triangle, on dispose en particulier d’un chemin hamiltonien partant d’un sommet a, passant par tous les sommets, pour finalement aboutir en b.

Pour construire un $(n+1)$-triangle, on considère 2 copies d’un n-triangle. Notons a' et b' les sommets de la deuxième copie correspondant à a et b dans la première copie. En particulier on dipsose d’un chemin hamiltonien joignant a' à b' dans cette deuxième copie.

On peut à présent construire un circuit hamiltonien du $(n+1)$-triangle en démarrant de a, en suivant le chemin hamiltonien (du “premier” n-triangle) aboutissant en b, en utilisant l’arête $\{b, b'\}$, en parcourant le chemin hamiltonien de b' à a' (dans le “second” n-triangle) et finalement en utilisant l’arête $\{a', a\}$ pour revenir en a.

3. Soit un graphe planaire connexe dont les faces sont des triangles ou des carrés. Il y a deux types de sommets :

- ceux, de degré 5, appartenant exactement à une face carrée et à 4 faces triangulaires ;
- ceux, de degré 6, appartenant exactement à 6 faces triangulaires.

Chaque face triangulaire possède exactement un sommet de degré 6. Déterminer le nombre de sommets de chaque type, d’arêtes et de faces triangulaires et carrées de ce graphe.

Réponse. Notons s_5 le nombre de sommets de degré 5 et s_6, pour ceux de degré 6. De la même façon, f_3 est le nombre de faces triangulaires et f_4 est le nombre de faces carrées. La relation d'Euler donne

$$s_5 + s_6 - a + f_3 + f_4 = 2.$$

Puisque 5 arêtes partent de chaque sommet de degré 5 et 6 arêtes partent de chaque sommet de degré 6, mais chaque arête a 2 extrémités, on en déduit que

$$2a = 5s_5 + 6s_6.$$

Le même genre de raisonnement sur les faces (mais chaque arête appartient à deux faces) donne

$$3f_3 + 4f_4 = 2a.$$

Puisque chaque face triangulaire possède exactement un sommet de degré 6 et qu'un sommet de degré 6 appartient à 6 faces triangulaires (autrement dit, 6 faces triangulaires partagent le même sommet de degré 6), on a

$$6s_6 = f_3.$$

Enfin, les 4 sommets d'une face carrée sont nécessairement de degré 5 (puisque ceux, de degré 6, appartenant exactement à 6 faces triangulaires). Dès lors, on a une cinquième équation

$$s_5 = 4f_4.$$

Le système de 5 équations à 5 inconnues a pour unique solution

$$s_5 = 24,\ \ s_6 = 8,\ \ a = 84,\ \ f_3 = 48,\ \ f_4 = 6.$$

4. a) Soit $f(n)$ le nombre de chemins de longueur n débutant au sommet 1 et arrivant au sommet 4 (cf. feuille d'énoncés). Montrer que $f(n)$ vérifie, pour tout $n \geq 0$, la relation de récurrence linéaire

$$f(n+4) = 2f(n+3) - 2f(n+1) + f(n)$$

avec $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ et $f(3) = 1$.

Réponse. La matrice d'adjacence du graphe est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1$. On retrouve bien la forme annoncée. Pour les conditions initiales, le plus court chemin permettant d'aller de 1 vers 4 est de longueur 3. Il n'y a donc aucun chemin de longueur $i \leq 2$, $f(i) = 0$, et un unique chemin de longueur 3, $f(3) = 1$.

b) Donner une formule close pour $f(n)$.

Réponse. Le polynôme caractéristique de la récurrence se factorise en

$$X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X-1)^3(X+1).$$

Dès lors -1 est zéro simple et 1 est zéro triple. Le théorème de structure des solutions stipule que

$$f(n) = (An^2 + Bn + C).1^n + D.(-1)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

On détermine les constantes grâce aux conditions initiales. On a le système

$$\begin{cases} f(0) = 0 &= C + D \\ f(1) = 0 &= A + B + C - D \\ f(2) = 0 &= 4A + 2B + C + D \\ f(3) = 1 &= 9A + 3B + C - D \end{cases}$$

On trouve la solution $A = 1/4$, $B = -1/2$, $C = 1/8$, $D = -1/8$.

c) En déduire la valeur de la limite suivante (justifier votre réponse)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{n^2}.$$

Réponse. Avec les notations précédentes, cette limite est donnée par A qui vaut donc $1/4$.

d) On considère les mots de la forme

$$a^i b (ab)^{j+1} a^k = \underbrace{a \cdots a}_{i \text{ fois } a} b \underbrace{abab \cdots ab}_{(j+1) \text{ fois } ab} \underbrace{a \cdots a}_{k \text{ fois } a}, \quad i, j, k \geq 0.$$

On note $g(n)$ le nombre de mots de longueur n de cette forme ; par exemple $g(3) = 1$ car le seul mot de cette forme est bab (quand $i, j, k = 0$). Montrer que $g(n)$ satisfait la même relation de récurrence que $f(n)$. *Suggestion* : utiliser le graphe représenté sur la feuille d'énoncés.

Réponse. Commencer par un nombre arbitraire i de a revient à emprunter la boucle sur 1 i fois, lire un b fait passer dans le sommet 2. Le cycle $2 \to 3 \to 2$ correspond à un facteur "ab". Emprunter j fois ce cycle va consommer $(ab)^j$. Ensuite le dernier facteur ab correspond au chemin $2 \to 3 \to 4$. Une fois en 4, les k derniers a à lire correspondent à la boucle sur 4. Ainsi, il y a une bijection entre les chemins de longueur n de 1 vers 4 dans le graphe et les mots de longueur n de la forme prescrite. Compter le nombre de tels mots revient à compter le nombre de chemins.