Examen d'algèbre

Bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
lundi 31 mai 2021

Consignes : Répondre aux parties théorie [Q. 1–4] / exercices [Q. 5,6,7] sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Fin de l'examen : 12h30

1) [3 pts]

a) Définir les notions de matrices *normale*, *hermitienne* et *unitaire*.

b) Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de valeur propre λ d'une matrice hermitienne H, en calculant $\langle Hx, x\rangle$, montrer que λ est réel.

c) Expliquer pourquoi les zéros du polynôme

$$5\,z^6 + (1+2i)\,z^4 + (4-3i)\,z^3 + 3\,z^2 - 2$$

ont tous un module inférieur ou égal à 2.

Solution : a) Une matrice $N \in \mathbb{C}^n_n$ est normale si $NN^* = N^*N$, une matrice H est hermitienne si $H^* = H$. Enfin, une matrice U est unitaire si $U^*U = I$.

b) On a $\langle Hx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda|x|^2$. On a utilisé ici le fait que x est un vecteur propre et que le produit scalaire est linéaire sur le premier facteur. On a aussi $\langle Hx, x\rangle = \langle x, H^*x\rangle$ mais puisque H est hermitienne, on obtient $\langle x, Hx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}|x|^2$. On a utilisé le fait que pour toute matrice A, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ et que le produit scalaire est anti-linéaire sur le second facteur. En conclusion, $\lambda|x|^2 = \overline{\lambda}|x|^2$ et on peut diviser par la norme de $x \neq 0$ pour obtenir $\lambda = \overline{\lambda}$.

c) C'est une application de la règle de Descartes qui stipule que les zéros du polynôme se trouvent dans le disque fermé de rayon $1 + \max_{0\leq i<6} |c_i/5|$ où c_i désigne le coefficient de z^i. Le coefficient de plus grand module est $4-3i$ dont le module vaut $\sqrt{16+9} = 5$. Ainsi, $1 + \max_{0\leq i<6} |c_i/5| = 2$.

2) [2 pts] Donner *un exemple* d'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\ker T) = 2$. Justifier votre construction.

Solution : Il y a bien évidemment de multiples solutions possibles. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère l'application $T : x \mapsto Ax$. Si $e_1, \ldots, e_4$ sont les vecteurs unitaires usuels, il est clair que $\operatorname{Im} T = \rangle e_1, e_2 \langle$ et que $\ker T = \rangle e_3, e_4 \langle$. Une autre façon de répondre à la question est d'expliquer que T se représente dans la base canonique par la matrice A qui est de rang 2. Ainsi $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} T = \operatorname{rg} A = 2$ et utiliser le théorème de la dimension pour conclure que le noyau est aussi de dimension 2.

3) [5 pts] AU CHOIX (ne répondez qu'à <u>une</u> des deux questions)

- Enoncer et <u>démontrer</u> la propriété comparant les multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre d'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$. On définira ces deux multiplicités.
- Enoncer et <u>démontrer</u> la propriété de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice normale. Au préalable, on énoncera et <u>démontrera</u> également le lemme concernant le conjugué d'une valeur propre d'une matrice normale.

4) [4 pts] <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Une matrice unitaire est toujours inversible.

VRAI. Par définition, si U est unitaire, alors $U^*U = I$. Ceci signifie que U possède bien un inverse (en l'occurrence, U^*).

b) Si 0 est valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$, alors A n'est pas diagonalisable.

FAUX. Un contre-exemple suffit. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est déjà diagonale (donc, trivialement diagonalisable) et ses valeurs propres sont 0 et 1.

c) Un polynôme $P \in \mathbb{R}[z]$ de degré 17 possède toujours un zéro réel.

VRAI. On sait que si un polynôme à coefficients réels possède un zéro $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, alors $\overline{\alpha}$ est aussi zéro (avec la même multiplicité). Autrement dit, les zéros "complexes" (ayant une partie imaginaire non nulle) vont par paire. Puisque P est de degré impair, il possède au moins un zéro réel.

Une variante pour répondre à la question est de considérer les limites $\lim_{x \to \pm\infty} P(x)$ et de s'apercevoir que l'une vaut $+\infty$ et l'autre $-\infty$ (et ce quel que soit le signe du coefficient dominant de P). On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires, puisque P est continu, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $P(\beta) = 0$.

d) Une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est toujours injective.

FAUX. Un contre-exemple suffit. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

définit une application $x \mapsto Ax$. Les éléments

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ont même image par A. Cette application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est donc pas injective. Une autre façon de répondre à la question est d'expliquer que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

5) [5 pts]
a) On considère $\mathbb{C}^4$ comme un $\mathbb{C}$-vectoriel. Montrer que l'endomorphisme $T_M : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, x \mapsto Mx$ n'est pas diagonalisable

$$\text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) En complétant une base de l'espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

représenter matriciellement T_M dans cette nouvelle base.

Solution. Le polynôme caractéristique de M, $\det(M - \lambda I)$ vaut

$$\lambda^4 - 10\lambda^3 + 37\lambda^2 - 60\lambda + 36$$

qui se factorise en

$$(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^2.$$

La matrice étant bloc-triangulaire, ce calcul est aisé. Déterminons E_2, l'espace propre associé à la valeur propre 2,

$$(M - 2I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donne

$$x_3 = x_4 = 0 \text{ et } x_1 = -x_2.$$

Autrement dit, une base de E_2 est donnée par le vecteur $(1, -1, 0, 0)^{\sim}$. Ainsi, 2 a une multiplicité géométrique (dimension de l'espace propre E_2) égale à 1 alors que sa multiplicité algébrique (comme zéro du polynôme caractéristique) vaut 2. La matrice M n'est donc pas diagonalisable. (Une alternative est de remarquer que le rang de la matrice du système vaut 3 et donc, l'espace des solutions est de dimension $4 - 3 = 1$. Ceci évite de résoudre le système.)

b) Il est nécessaire d'également déterminer une base de l'espace propre E_3. On procède comme au point précédent et on trouve (la base n'est bien évidemment pas unique)

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

On considère la base

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Il s'agit bien d'une base, on peut par exemple vérifier que le déterminant construit sur ces 4 vecteurs colonnes vaut 1 et est donc non nul, les vecteurs sont donc linéairement indépendants.) Puisque u_1 et u_2 sont des vecteurs propres, on a immédiatement $Mu_1 = 3u_1$ et $Mu_2 = 3u_2$. On calcule $Mu_3 = 2u_3$ et

$$Mu_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_3 + 2u_4.$$

Maintenant que l'on dispose des décompositions des images des vecteurs de base par M, la matrice qui représente T_M dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) [5 pts]
a) Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de

$$P = z^5 - 3z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 21 \quad \text{par} \quad D = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4.$$

b) Réduire en fractions simples sur $\mathbb{C}$,

$$\frac{-6\,z^3 + 9\,z^2 + 17}{(z-2)^2\,(z^2+1)}.$$

Solution. Si on effectue la division, on trouve

$$P = (z+1).D + (-6z^3 + 9z^2 + 17).$$

Le reste est bien de degré strictement inférieur au degré du diviseur D.
b) le théorème de décomposition en fractions simples stipule que la fraction peut se mettre sous la forme

$$\frac{a}{(z-2)^2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{z-i}.$$

Si on réduit au même dénominateur, on trouve au numérateur

$$(b{+}c{+}d)z^3{+}[a{-}2b{-}(4{+}i)c{-}(4{-}i)d]z^2{+}[b{+}(4{+}4i)c{+}(4{-}4i)d]z{+}a{-}2b{-}4ic{+}4id.$$

En identifiant les coefficients, on a le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} (b+c+d) & = & -6 \\ a-2b-(4+i)c-(4-i)d & = & 9 \\ b+(4+4i)c+(4-4i)d & = & 0 \\ a-2b-4ic+4id & = & 17 \end{array}\right.$$

pour trouver $a = c = d = 1$ et $b = -8$. Ainsi, la décomposition demandée est

$$\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{8}{z-2} + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}.$$

7) [6 pts] Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & 2-2\alpha \\ 2-\alpha & \alpha-2 & 3 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}.$$

On donne (inutile de le vérifier)

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \alpha - 1)^2(\lambda - 3 + \alpha)^2$$

a) Montrer que pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$, les matrices correspondantes ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A possède-t-elle une unique valeur propre (de multiplicité algébrique 4). Dans ce(s) cas, A est-elle diagonalisable ?

c) Pour $\alpha = 0$, si possible, diagonaliser A.

d) En exploitant le point précédent, pour $\alpha = 0$, vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{A}{3}\right)^n \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(Suggestion: plusieurs méthodes de résolution sont possibles, il n'est pas nécessaire de réaliser un calcul du type S^{-1}, on peut aussi décomposer le vecteur colonne u dans une base formée de vecteurs propres.)

e) Toujours pour $\alpha = 0$, justifier que $P(z) = z^2 - 4z + 3$ est le polynôme minimum de A (i.e., polynôme de plus petit degré annulé par A).

Solution. a) Pour $\alpha = 0$, le polynôme caractéristique devient

$$(\lambda - 0 - 1)^2(\lambda - 3 + 0)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$$

et pour $\alpha = 2$, celui-ci est

$$(\lambda - 2 - 1)^2(\lambda - 3 + 2)^2 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^2.$$

Il s'agit donc du même polynôme (on a donc les mêmes valeurs propres 1 et 3 de multiplicité algébrique 2).

b) On cherche à résoudre $\alpha + 1 = 3 - \alpha$ et donc $\alpha = 1$. Pour $\alpha = 1$, on a donc une unique valeur propre 2 de multiplicité algébrique 4. Avec $\alpha = 1$, on cherche alors la dimension de l'espace propre E_2,

$$(A - 2I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice est de rang 1, l'ensemble des solutions est de dimension $4 - 1 = 3$. Autrement dit, la multiplicité algébrique de l'unique valeur propre est strictement supérieure à sa multiplicité géométrique. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

c) Pour $\alpha = 0$, on sait déjà que les valeurs propres sont 1 et 3 de multiplicité algébrique 2 (puisqu'on nous donne le polynôme caractéristique). Avec $\alpha = 0$, on cherche alors une base de l'espace propre E_1,

$$(A - I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\\2 & -2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ceci donne

$$x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = x_2.$$

Avec $\alpha = 0$, on cherche alors une base de l'espace propre E_3,

$$(A-3I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ceci donne

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = x_4.$$

Une base de $\mathbb{C}^4$ formée de 2 vecteurs propres de E_1 et de 2 vecteurs propres de E_3 est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Si S a pour colonnes, ces 4 vecteurs, alors

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1,1,3,3).$$

d) Si on exploite le point précédent (sans la suggestion), alors

$$\frac{A}{3} = S\operatorname{diag}(1/3, 1/3, 1, 1)\, S^{-1}$$

et

$$\left(\frac{A}{3}\right)^n = S\operatorname{diag}(1/3^n, 1/3^n, 1, 1)\, S^{-1}.$$

Ainsi, on trouve (mais cela nécessite de calculer S^{-1})

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A}{3}\right)^n = S\operatorname{diag}(0,0,1,1)\, S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ce qui permet de conclure.

Si on utilise la suggestion, u se décompose comme

$$u = v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4$$

Donc,

$$\frac{A}{3}u = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + v_3 + 2v_4$$

et en itérant

$$\left(\frac{A}{3}\right)^n u = \frac{1}{3^n}v_1 - \frac{1}{3^n}v_2 + v_3 + 2v_4.$$

La limite pour $n \to \infty$ vaut donc $v_3 + 2v_4$.

e) On sait que le polynôme caractéristique et le polynôme minimum ont les mêmes zéros et que la multiplicité comme zéro du polynôme minimum est $\leq$ à celle du polynôme caractéristique. Ainsi, le polynôme minimum est de la forme

$$(z-1)^a(z-3)^b$$

avec $1 \leq a \leq 2$ et $1 \leq b \leq 2$. Il y a donc *a priori* 4 candidats possibles. Le polynôme minimum est le polynôme de plus petit degré annulé par A. Dans l'énoncé, on suggère de prendre $a = b = 1$, $P(z) = (z-1)(z-3) = z^2 - 4z + 3$. Dès lors, vérifier que $A^2 - 4A + 3I = 0$ suffit.