**Examen d'algèbre** vendredi 11 juin 2021
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

**Consignes** : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

**1)** [2 points] Définir

- la notion de base d'un $\mathbb{K}$-vectoriel $E$
- l'indépendance linéaire de $k$ éléments de $E$.

**2)** [5 points] Au CHOIX répondre à une des deux questions suivantes.

- Enoncer et démontrer le théorème de Rouché (conditions nécessaires et suffisantes pour la compatibilité d'un système linéaire) .
- Enoncer et démontrer la formule exprimant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

**3)** [4 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \beta^3 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de $M$.

b) Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe $\beta$.

c) Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang ?

d) On considère le système homogène $Mx = 0$. En fonction de $\beta$, préciser la dimension de l'ensemble des solutions.

**Solution** : a) On vérifiera que $\det M = -2\beta^4 + 2\beta^3 + 2\beta - 2$ qui se factorise en

$$-2(\beta - 1)^2 \left(\beta^2 + \beta + 1\right).$$

b) Ainsi ce déterminant est nul ($M$ n'est pas inversible) si et seulement si $\beta = 1$, $\beta = (-1 - \sqrt{3}i)/2$ ou $\beta = (-1 + \sqrt{3}i)/2$. Pour ce faire, il est nécessaire de résoudre l'équation $\beta^2 + \beta + 1 = 0$.

c) On sait déjà que le rang ne peut valoir 4 (puisque $\det M = 0$). On sait aussi que $\mathrm{rg}(M) \geq 2$ car la matrice $2 \times 2$ du coin inférieur gauche a un déterminant non nul. Ainsi $\mathrm{rg}(M)$ vaut 2 ou 3. Si $\beta = 1$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le déterminant de la sous-matrice $3 \times 3$ du coin inférieur droit est non nul ($= -1$). Ainsi $\mathrm{rg}(M)$ vaut 3.

Si $\beta = (-1 - \sqrt{3}i)/2$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encore une fois, le déterminant de la sous-matrice $3 \times 3$ du coin inférieur droit est non nul ($= -\frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$). Ainsi $\mathrm{rg}(M)$ vaut 3. On procède exactement de la même façon avec la même conclusion pour la troisième valeur possible pour $\beta$.

**4)** [5 points] On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}_3^3$ des matrices $3 \times 3$ et le sous-ensemble $F$ des matrices dont la somme des éléments de chacune des lignes et de chacune de colonnes est nulle. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ appartient à } F$$

a) Vérifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

b) Donner une base de $F$ et décomposer la matrice $A$ dans celle-ci.

c) Quelle est l'intersection de $F$ avec le sous-espace $G$ des matrices symétriques. En déduire la dimension de $F+G$.

d) Donner une base d'un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}_3^3$.

**Solution** : a) Il faut remarquer que deux éléments d'une ligne déterminent entièrement le troisième sur celle-ci, idem pour les colonnes (il s'agit de la condition de somme nulle) — on répond en fait déjà partiellement à la deuxième partie de la question. Considérons dès lors deux éléments arbitraires de l'ensemble $F$,

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ c & d & -c-d \\ -a-c & -b-d & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a' & b' & -a'-b' \\ c' & d' & -c'-d' \\ -a'-c' & -b'-d' & a'+b'+c'+d' \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$. La somme de deux telles matrices appartient encore à $F$ :

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' & -a-b-a'-b' \\ c+c' & d+d' & -c-d-c'-d' \\ -a-c-a'-c' & -b-d-b'-d' & {\scriptstyle a+b+c+d \atop +a+b+c+d} \end{pmatrix}.$$

On effectue la même vérification quand on multiplie une matrice de $F$ par un scalaire, on obtient encore une matrice de $F$.

b) On peut prendre pour base :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ces matrices sont notées $U_1, \ldots, U_4$ respectivement, alors $A = U_1 - U_2 - 2U_3 + U_4$.

c) Les matrices symétriques de $F$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ b & d & -b-d \\ -a-b & -b-d & a+2b+d \end{pmatrix}$$

Ainsi la dimension de $F \cap G$ vaut 3. Dès lors,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 4+6-3 = 7.$$

En effet, nous avons vu en b) qu'une base de $F$ est donnée par 4 éléments. Pour les matrices symétriques, il suffit de déterminer les 6 éléments au-dessus de la diagonale principale (diagonale comprise) pour connaître entièrement la matrice envisagée.

d) Puisque $F$ est de dimension 4 et que $\mathbb{R}_3^3$ est de dimension 9, il suffit de trouver 5 matrices venant compléter une base de $F$ pour former une base de $\mathbb{R}_3^3$. On peut prendre les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, ces 5 matrices et les 4 données en b) engendrent $\mathbb{R}_3^3$ et sont en nombre égal à la dimension de l'espace.

**5)** [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Soit $A \in \mathbb{R}_4^4$.

$$\text{Si } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.A = 0, \text{ alors } A = 0.$$

**FAUX**. Il suffit de considérer la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

b) Dans un $\mathbb{C}$-vectoriel, les éléments $x, y, z$ sont linéairement indépendants si et seulement si $2\,x,\ i\,y,\ (2+i)\,z$ sont linéairement indépendants.

**VRAI**. Une preuve est nécessaire. Supposons $x, y, z$ linéairement indépendants et supposons

$$2\,\lambda_1 x + i\,\lambda_2 y + (2+i)\lambda_3 z = 0.$$

Par hypothèse, cela implique que les coefficients de cette dernière combinaison sont nuls : $2\,\lambda_1 = i\,\lambda_2 = (2+i)\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il faut aussi démontrer la réciproque. Supposons à présent que $2\,x$, $i\,y$, $(2+i)\,z$ sont linéairement indépendants et que

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0.$$

Ceci se réécrit comme

$$\frac{\lambda_1}{2} 2x - i\,\lambda_2 iy + \frac{\lambda_3}{2+i}(2+i)z = 0$$

et donc, par hypothèse, cela implique

$$\frac{1}{2}\lambda_1 = -i\,\lambda_2 = \frac{\lambda_3}{2+i} = 0$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c) Soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$. Si $\dim F \leq \dim G$, alors $F$ est un sous-espace de $G$.

**FAUX**: encore une fois, un contre-exemple suffit. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $e_1, e_2, e_3$. Il suffit de considérer $F = \rangle e_1 \langle$ et $G = \rangle e_2, e_3 \langle$.

d) Si les $r$ premières lignes d'une matrice $M$ sont linéairement indépendantes, alors le rang de $M$ vaut $r$.

**FAUX**: on peut juste en déduire que le rang vaut au moins $r$. Pour s'en convaincre, on considère encore un contre-exemple. La matrice identité $3 \times 3$ a ses $r = 2$ première lignes linéairement indépendantes mais cependant, son rang vaut 3.