Examen d'algèbre

Premiers bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
lundi 24 juin 2019

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geq 1$. Enoncer et démontrer la formule de *changement de bases* en explicitant le contexte et les notations utilisées (il ne suffit pas d'écrire la formule, il faut expliquer ce que représentent les différents élements qui y interviennent).

cf. cours théorique.

2) Enoncer le *théorème de Steinitz*. Appliquez ce théorème aux fonctions suivantes

$$f_1(x) = \sin(x) + \cos(x),\ f_2(x) = \frac{2\sin(x) - \cos(x)}{3},\ f_3(x) = \pi\sin(x) + 4\cos(x)$$

considérées comme éléments de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues.

On remarque que f_1, f_2, f_3 sont 3 fonctions qui sont combinaisons linéaires des 2 fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$. En application du théorème de Steinitz, ces 3 fonctions sont linéairement dépendantes (3 combinaisons de 2 éléments).

3)

a) Démontrer que l'ensemble des solutions d'un système homogène d'équations linéaires à coefficients complexes et à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$.

Soit le système $Ax = 0$ où A est une matrice $p \times n$ (i.e., système de p équations à n inconnues noté matriciellement, ici 0 représente l'élément $0 \in \mathbb{C}^p$). L'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel car

- le vecteur nul $0 \in \mathbb{C}^n$ appartient à S car $A0 = 0$,
- si $x, x' \in S$, alors $A(x+x') = Ax+Ax' = 0$ et donc $x+x'$ appartient à S,
- si $x \in S$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$ et donc $\lambda x \in S$.

C'est la définition d'un sous-espace vectoriel : ensemble non vide contenant les combinaisons linéaires de ses éléments.

b) Que pouvez-vous dire de sa dimension (on peut l'exprimer grâce à la matrice du système) ?

Résultat théorique du cours (structure de l'ensemble des solutions) : la dimension est donnée par $n - \mathrm{rg}(A)$.

c) Si le système n'est pas homogène, l'ensemble des solutions a-t-il nécessairement une structure de sous-espace vectoriel ?

Non car le vecteur nul appartient à tout sous-espace vectoriel or, si le système n'est pas homogène (second membre non nul), alors 0 n'est pas solution.

4) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Deux matrices diagonales de même dimension commutent.

Vrai. Soient $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Par définition du produit matriciel,

$$A.B = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n) = B.A$$

car $\alpha_i\beta_i = \beta_i\alpha_i$ (le produit de nombres est commutatif).

b)

$$\rangle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}_{u_2} \langle = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\5\\7\end{pmatrix}}_{v_3} \langle$$

Vrai. On remarque que $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = 2u_2$ et $v_3 = v_1 + v_2 = u_1 + 3u_2$. De là, on en déduit que le sous-espace de droite est inclus dans celui de gauche. Il faut en outre comparer leur dimension. Puisque u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) sont linéairement indépendants, les deux sous-espaces sont de même dimension ($= 2$) donc égaux.

c) L'union de deux sous-espaces vectoriels est toujours un sous-espace vectoriel.

Faux. Un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ suffit:

$$F = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{u} \langle, \ G = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v} \langle$$

Les éléments u, v appartiennent à l'union, mais $u + v$ n'appartient pas à $F \cup G$. Or un sous-espace vectoriel contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

d) Les polynômes $x^2 + x + 1$, $x^2 + 4x + 3$, $3x + 2$, 5 forment une partie génératrice de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

Vrai. Les polynômes x^2+x+1, $3x+2$, 5 forment une partie génératrice (donc, si on ajoute des éléments, cela reste une partie génératrice). Tout polynôme $ax^2 + bx + c$ se décompose en une combinaison de ces 3 polynômes:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + x + 1) + \frac{b - a}{3}(3x + 2) + \frac{3c - a - 2b}{15} 5.$$

On peut aussi montrer que ces 3 polynômes forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Si on considère les composantes de ces 3 polynômes dans la base $(x^2, x, 1)$ et que l'on calcule le déterminant suivant

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix} = 15 \neq 0$$

cela signifie que ces 3 polynômes sont linéairement indépendants et en nombre égal à la dimension de l'espace.

5) Soient les matrices de $\mathbb{R}_2^2$

$$u_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une base U de $\mathbb{R}_2^2$.

On sait que $\mathbb{R}_2^2$ est un espace de dimension 4. Il suffit donc de montrer que les 4 matrices forment une partie génératrice (ou une partie libre) de $\mathbb{R}_2^2$. Si on considère les composantes des u_i dans la base canonique

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et qu'on représente les vecteurs de composantes en colonnes, on calcule

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Cela signifie que u_1, u_2, u_3, u_4 sont linéairement indépendants (ce qui suffit).

Alternative 1 : on utilise la définition de l'indépendance linéaire ; supposons que

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $a + b = 0$, $a + 2b = 0$, $c + d = 0$, $c + 2d = 0$. Ce système possède l'unique solution $a = b = c = d = 0$. Les matrices sont donc bien linéairement indépendantes.

Alternative 2 : si on utilise la définition de partie génératrice, il faut montrer que pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4.$$

On vérifie facilement que le système $a + b = x$, $a + 2b = y$, $c + d = z$, $c+2d = t$ possède une solution (il s'agit même d'un système de Cramer).

b) Quelles sont les composantes de
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
dans la base U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (-2).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Caractériser (donner la forme des matrices) le sous-espace vectoriel
$$F = \rangle 2u_1 - u_2, 2u_3 - u_4 \langle.$$
Quelle en est sa dimension ?

$$2u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; 2u_3 - u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Le sous-espace F est formé des combinaisons linéaires de ces deux matrices, il s'agit donc de l'ensemble des matrices 2×2 ayant une seconde colonne nulle,
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$
Les matrices $2u_1 - u_2$ et $2u_3 - u_4$ étant linéairement indépendantes, $\dim F = 2$.

d) Donner une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^2_2$ (justifier votre choix).

Une base d'un supplémentaire est donnée par les matrices
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Elles engendrent un sous-espace G de dimension 2 et $F \cap G = \{0\}$. Il est clair que $F + G = \mathbb{R}^2_2$.

6) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$, a-t-on
$$(1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

On a tout d'abord
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Si on effectue les produits matriciels, on trouve
$$x^2 + x + 2 = 0$$
qui a pour solutions $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

7) Soit λ un paramètre complexe. Discuter l'existence de solutions du sytème suivant — il n'est **pas** demandé de le résoudre. Enoncer les théorèmes utilisés.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & \lambda+2 \\ (1+\lambda)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & + & 3z & = & \lambda+2 \end{array}\right.$$

Il faut comparer les rangs des deux matrices suivantes (thm. de Rouché)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1+\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 3 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda & \lambda+2 \\ 1+\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\det(A) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Ainsi, si $\lambda \neq 0, 2, -2$, alors les rangs de A et de $(A|b)$ valent tous les deux 3 et le système est compatible.

Si $\lambda = 0, 2, -2$, on vérifie facilement que le rang de A vaut 2 (on trouve, dans chaque cas, une sous-matrice 2×2 de déterminant non nul — vous devez la donner explicitement).

Si $\lambda = 0, -2$ on vérifie facilement que le rang de $(A|b)$ vaut encore 2. Le système est donc compatible (encore une fois, vous devez le faire explicitement : par exemple en montrant qu'une ligne est combinaison des deux autres lignes qui sont linéairement indépendantes ou en utilisant la méthode des sous-matrices bordées).

Enfin, si $\lambda = 2$ on vérifie facilement (le faire en trouvant une sous-matrice 3×3 de déterminant non nul) que le rang de $(A|b)$ vaut 3. Donc, le système n'est pas compatible dans cette unique situation.