Introduction aux mathématiques discrètes

Bachelier ingénieur civil, Examen Mai–Juin 2019

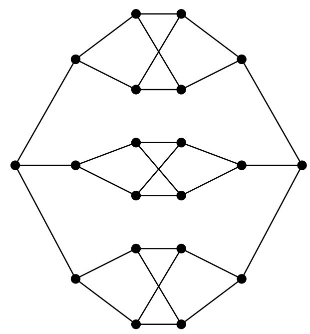
Correction

1. [3 points]

a) Pour des graphes ayant au moins 8 sommets, donner un exemple de graphe hamiltonien et un exemple de graphe non hamiltonien (justifier vos choix).

Par définition, un graphe est *hamiltonien* s'il contient un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet du graphe avant de revenir au sommet de départ. Ainsi, un graphe composé d'un unique circuit de longueur 8 convient. Tout graphe contenant comme sous-graphe un tel circuit convient également.

Si un graphe est hamiltonien et si on retire s sommets à ce graphe, alors le nombre total de composantes connexes obtenues est $\leq s$ (résultat théorique vu au cours). On peut utiliser ce résultat pour montrer qu'un graphe n'est pas hamiltonien (contraposée). Par exemple, on considère le graphe ci-dessous



Si on supprime le sommet le plus à gauche et celui le plus à droite, on obtient 3 composantes connexes alors que 2 sommets ont été supprimés. Le graphe ne peut donc pas être hamiltonien.

Ce n'est bien évidemment pas la seule façon de répondre à la question.

b) Dans une forêt formée de $k \geq 1$ arbres disjoints, quelle relation existe-t-il entre le nombre total de sommets et d'arêtes ?

Pour l'arbre T_i ($i = 1, \ldots, k$), on sait que $s_i = a_i + 1$ (où s_i désigne le nombre de sommets et a_i le nombre d'arêtes de l'arbre). Ainsi, en sommant sur les k arbres

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i + 1)$$

et donc,

$$S = A + k$$

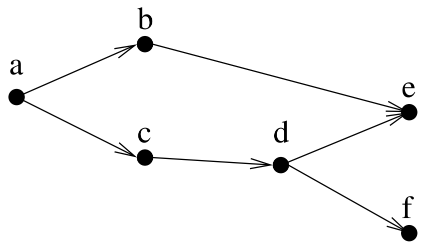
où S désigne le nombre total de sommets de la forêt et A le nombre d'arêtes.

Variante : ajouter un nouveau sommet fictif duquel partent k nouvelles arêtes reliant ce sommet aux k arbres de la forêt. Avec cette construction, on obtient un unique arbre ayant $S + 1$ sommets et $A + k$ arêtes pour lequel la relation

$$S + 1 = (A + k) + 1$$

est satisfaite. On en tire la même conclusion que ci-dessus.

c) Enoncer une condition pour qu'un graphe simple et orienté possède un tri topologique. Fournir au moins un tri topologique du graphe ci-dessous.



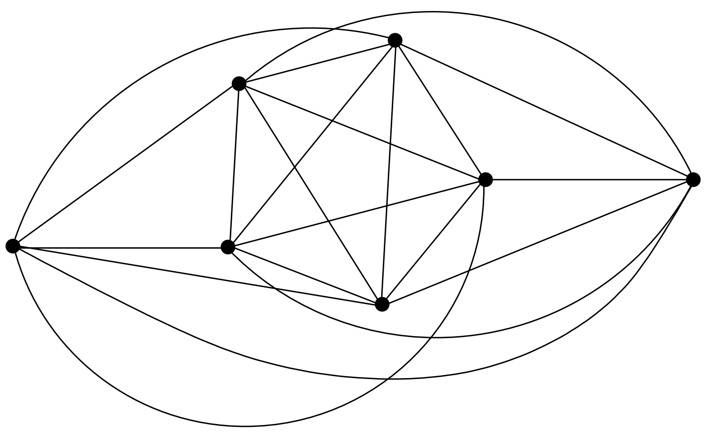
Un graphe simple et orienté admet un tri topologique si et seulement si il est sans cycle. Il est dès lors possible d'énumérer les sommets (chacun des n sommets se voit attribuer un indice allant de 1 à n) de telle sorte que si l'arc (v_i, v_j) est présent, alors $i < j$.

Le graphe possède le tri : $a < b < c < d < e < f$ (ce n'était pas le seul tri possible).

Les autres tris sont (non demandé dans la question)

$$a < b < c < d < f < e$$
$$a < b < e < c < d < f$$
$$a < c < d < b < e < f$$
$$a < c < d < b < f < e$$
$$a < c < d < f < b < e$$
$$a < c < b < d < e < f$$
$$a < c < b < d < f < e$$

2. [4 points] Soit le graphe ci-dessous. Justifier vos réponses.



a) Est-il eulérien ?

Il s'agit d'un graphe connexe dont chaque sommet est de degré pair (degré 6). Il est donc eulérien (c'est une condition nécessaire et suffisante).

b) Existe-t-il une valeur de k telle qu'il soit k-régulier ? En fonction de votre réponse, que pouvez-vous dire de la valeur propre de plus grand module (de la matrice d'adjacence) ?

Par définition, un graphe est k-régulier si tous les sommets sont de degré k. Ici, le graphe est 6-régulier et 6 est donc valeur propre de ce graphe: $(1, \ldots, 1)^{\sim}$ est un vecteur propre associé. Toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ est telle que $|\lambda| \leq 6$. (En outre, puisque le graphe est connexe, on peut même affirmer que 6 est une valeur propre simple.)

c) Existe-t-il une représentation planaire de ce graphe ?
Si oui, la dessiner.

Le graphe contient une copie de K_5 comme sous-graphe (alternative : il contient aussi une copie de $K_{3,3}$). Le théorème de Kuratowski stipule donc que ce graphe ne peut pas être planaire (un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$). Plus simplement, on sait que K_5 n'est pas planaire (idem pour $K_{3,3}$), donc tout graphe contenant une copie de celui-ci ne saurait être planaire.

d) Si des sommets voisins doivent recevoir des couleurs distinctes, combien de couleurs sont nécessaires pour colorier ce graphe ?

Etant en présence du graphe complet K_7, on doit attribuer des couleurs distinctes à chaque sommet : deux sommets quelconques sont toujours voisins. Il faut donc utiliser 7 couleurs.

3. [4 points] Soit un graphe planaire connexe possédant uniquement des faces triangulaires et carrées. Chaque sommet appartient exactement à une face carrée et 4 faces triangulaires. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de ce graphe.

On désigne par s, a, f respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe. Nous pouvons utiliser la formule d'Euler (graphe planaire et connexe),

$$s - a + f = 2.$$

On notera c et t respectivement le nombre de faces carrées et triangulaires. On a les relations suivantes :

$$f = c + t, \quad 5s = 2a, \quad 4c + 3t = 2a, \quad s = 4c, \quad 4s = 3t.$$

La deuxième relation provient du fait que chaque sommet est de degré 5 (5 arêtes partent de chaque sommet mais chaque arête a 2 extrémités). La troisième relation exprime que les faces sont délimitées par 4 ou 3 arêtes et que chaque arête appartient à la frontière de 2 faces. La relation suivante exprime que chaque sommet appartient à la frontière d'une face carré (et chaque face carrée a, dans sa frontière, 4 sommets). Enfin, la dernière relation exprime que chaque sommet appartient à la frontière de 4 faces triangulaires (et chaque face triangulaire a, dans sa frontière, 3 sommets). Ce système d'équations linéaires a pour solution unique

$$s = 24, \quad a = 60, \quad f = 38, \quad c = 6, \quad t = 32.$$

4. [2 points] Montrer que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ possède $\sqrt{mn}$ comme valeur propre. *Suggestion* : prendre comme vecteur propre un vecteur ayant m composantes égales à a et n composantes égales à b.
Bonus [+1 point] : donner toutes les valeurs propres de $K_{m,n}$ et leur multiplicité.

Si on énumère d'abord les sommets de la composante formée de m sommets indépendants, puisque les arêtes présentes sont exactement celles joignant les m premiers sommets aux n derniers, la matrice d'adjacence de ce graphe peut se mettre sous la forme suivante (matrice blocs)

$$A = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & 1_{m\times n} \\ 1_{n\times m} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Il faut comprendre, avec cette notation, que $t_{i\times j}$ est une matrice $i \times j$ dont toutes les entrées sont égales à t. Supposons avoir un vecteur propre x de valeur propre λ ayant la forme suggérée (on supposera $a, b \neq 0$ dans un premier temps). On a $Ax = \lambda x$.

D'autre part, vu la forme particulière de A, si on calcule le produit Ax (dans les vecteurs colonnes, on a séparé les m premières composantes des n dernières)

$$A \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ \hline b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nb \\ \vdots \\ nb \\ \hline ma \\ \vdots \\ ma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ \hline b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on trouve

$$nb = \lambda a \text{ et } ma = \lambda b.$$

Donc en multipliant membre à membre,

$$mnab = \lambda^2 ab$$

et on en tire $\lambda = \sqrt{mn}$ (une autre solution étant $\lambda = -\sqrt{mn}$). En fixant par exemple $a = 1$, on vérifie a posteriori que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \sqrt{m/n} \\ \vdots \\ \sqrt{m/n} \end{pmatrix}$$

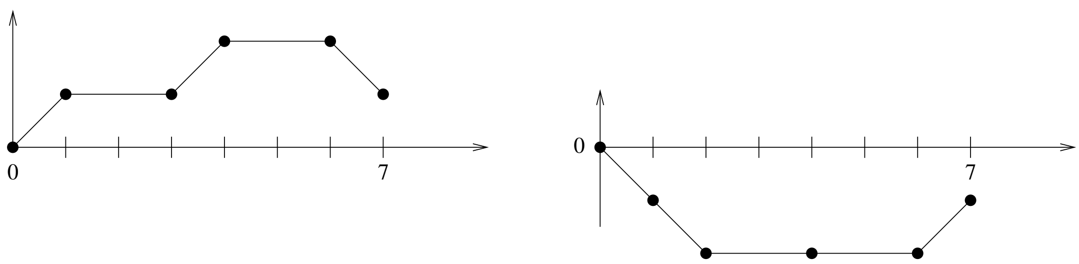
est bien un vecteur propre de A de valeur propre $\sqrt{mn}$. Puisque $K_{m,n}$ est un graphe biparti, $-\sqrt{mn}$ est aussi valeur propre (spectre symétrique par rapport à 0). Pour le bonus, la matrice A est de rang 2, donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 vaut $m + n - rg(A - 0I) = m + n - 2$. Ceci suffit : $\sqrt{mn}$ et $-\sqrt{mn}$ sont des valeurs propres simples, 0 a pour multiplicité $m + n - 2$.

Variante pour répondre au bonus, on peut trouver $m + n - 2$ vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 0 (dans les vecteurs colonnes, on a représenté les m premières composantes séparéees des n dernières)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{m-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

5. [7 points] Dans le plan muni d'un repère, on part du point de coordonnées $(0, 0)$ et on construit un chemin en juxtaposant des segments de trois types : **U** correspond au déplacement $(1, 1)$; **D** correspond au déplacement $(1, -1)$; **H** correspond au déplacement horizontal $(2, 0)$ de 2 unités.

Soit $\mathrm{p}(n)$ le nombre de chemins ainsi construits dont le sommet d'arrivée est un point de coordonnées de la forme $(n - 1, y)$; $y \in \mathbb{Z}$. Par exemple, le chemin $UHUHD$ mène à $(7, 1)$ et contribue donc à $\mathrm{p}(8)$. le chemin $DDHHU$ mène à $(7, -1)$ et contribue aussi à $\mathrm{p}(8)$.



Ainsi p(3) = 5 car on a les chemins H, UD, UU, DU et DD.

a) Justifier que la suite $(\mathrm{p}(n))_{n\geq 0}$ est solution de la récurrence

$$\begin{cases} x_0 = 0, \ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 2\,x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Enumérer tous les chemins qui contribuent à p(4).

Il n'y a aucun chemin arrivant en un point d'abscisse -1 donc $p(0) = 0$. Il y a un unique chemin (consistant à ne rien faire) menant au point $(0,0)$ donc $p(1) = 1$. Si on dispose des $p(n)$ chemins menant à un point d'abscisse $n-1$, chacun de ces chemins suivi par un déplacement **H** fourni un chemin aboutissant en un point d'abscisse $n+1$ (et tous ces chemins sont différents). Si on dispose des $p(n+1)$ chemins menant à un point d'abscisse n, chacun de ces chemins suivi par un déplacement **D** ou **U** fourni un chemin aboutissant en un point d'abscisse n (et ces chemins sont 2 à 2 distincts). Vu le dernier pas réalisé (**H**, **U** ou **D**), on passe bien en revue, une et une seule fois, tous les chemins possibles aboutissant en un point d'abscisse $n+1$. On en conclut que $2p(n+1) + p(n) = p(n+2)$ qui est exactement la relation proposée.

Les chemins contribuant à $p(4) = 12$ sont

$$UUU, UUD, UDU, UDD, DUU, DUD, DDU, DDD, HD, DH, HU, UH.$$

On remarque qu'on a effectivement étendu les chemins contribuant à $p(3)$ par un D ou un U. De plus, les deux chemins de longueur 1 : D et U sont étendus par un H.

b) Donner une formule close pour la suite $(\mathrm{p}(n))_{n\geq 0}$.

Le polynôme caractéristique de la récurrence est donné par

$$X^2 - 2X - 1 = (X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}).$$

Ainsi, $p(n)$ est de la forme

$$a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$$

et a, b sont déterminés par les conditions initiales $p(0) = 0, p(1) = 1$. On obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + b + (a - b)\sqrt{2} = 1 \end{cases}$$

et donc, pour tout $n \geq 0$,

$$p(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n.$$

c) Que valent les limites suivantes ? Jusitifier vos calculs.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{p}(n)}{2^n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{p}(n)}{3^n}.$$

Remarquons d'abord que $1+\sqrt{2} \simeq 2,41$ et $|1-\sqrt{2}| \simeq 0,41$. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0.$$

Au vu de la formule close obtenue au point précédent,

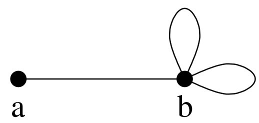
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{p}(n)}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(1+\sqrt{2})^n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n = +\infty$$

car $(1+\sqrt{2})/2 > 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{p}(n)}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(1+\sqrt{2})^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n = 0$$

car $|(1+\sqrt{2})/3| < 1$

d) Donner une relation de récurrence pour la suite comptant le nombre de chemins de longueur $n \geq 0$ partant du sommet a et aboutissant en b du graphe suivant :



Les chemins de longueur $n \geq 2$ partant de a et aboutissant en b sont de deux types. Soit, ils se terminent par une des deux boucles en b (et débutent donc par un chemin de longueur $n-1$ partant de a et aboutissant en b). Soit, ils se terminent par deux arêtes $\{b,a\}$ et $\{a,b\}$ (et débutent donc par un chemin de longueur $n-2$ partant de a et aboutissant en b). Autrement dit, on a une fois encore la même relation de récurrence

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Pour les conditions initiales, il n'y a aucun chemin de longueur 0 de a à b. Il y a un unique chemin de longueur 1 (l'arête $\{a,b\}$) menant de a à b.

e) La suite $\mathrm{t}(n)$ vérifie la même relation de récurrence linéaire $x_{n+2} = 2\,x_{n+1} + x_n, \quad \forall n \geq 0$ et on sait que $\mathrm{t}(3) = 19$ et $\mathrm{t}(4) = 46$. Quelles en sont les conditions initiales $\mathrm{t}(0)$ et $\mathrm{t}(1)$?

On tire de la relation que $x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1}$. De là,

$$t(2) = t(4) - 2t(3) = 46 - 38 = 8,$$

$$t(1) = t(3) - 2t(2) = 19 - 16 = 3,$$

$$t(0) = t(2) - 2t(1) = 8 - 6 = 2.$$

Alternative : on aurait pu exploiter le point b) ; on sait que $t(n)$ est de la forme

$$a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$$

et on résout alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(1+\sqrt{2})^3 + b(1-\sqrt{2})^3 & = & 19 \\ a(1+\sqrt{2})^4 + b(1-\sqrt{2})^4 & = & 46 \end{array}\right.$$

pour trouver

$$a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi,

$$t(0) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} = 2,$$

$$t(1) = (1 + \frac{\sqrt{2}}{4})(1+\sqrt{2}) + (1 + \frac{\sqrt{2}}{4})(1-\sqrt{2}) = 3.$$