Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
bachelier en sciences physiques,
Mai–Juin 2019

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h30**

Bon travail !

1. [5 points] Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \gamma - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 - 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs du paramètre $\gamma \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique est donné par

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 (3 - \lambda)^2.$$

Ce calcul est simplifié car A est une matrice bloc-triangulaire supérieure. On a donc deux valeurs propres 2 et 3, chacune de multiplicité algébrique 2. La matrice est diagonalisable si et seulement si, pour chaque valeur propre, on a l'égalité des multiplicités algébriques et géométriques.

Recherchons l'espace propre associé à la valeur propre 2, il s'agit des éléments de $\mathbb{C}^4$ vérifiant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma - 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 - 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A-2I} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à $x_3 = x_4 = 0$ et $(\gamma - 1)x_2 = 0$. Ainsi, si $\gamma = 1$, l'espace propre est donné par

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle$$

qui est bien de dimension 2. Par contre, si $\gamma \neq 1$, l'équation $(\gamma - 1)x_2 = 0$ est équivalente à $x_2 = 0$ et l'espace propre se réduit alors à un sous-espace de dimension 1 (< 2) :

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle.$$

Dans ce cas, A n'est donc pas diagonalisable.

On peut donc se limiter au cas $\gamma = 1$ et déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3. Il s'agit des éléments de $\mathbb{C}^4$ vérifiant

$$(\star) \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-3I \text{ avec } \gamma=1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice du système est de rang 2, ainsi l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 2 = 2$. Donc, pour $\gamma = 1$, on a bien égalité des multiplicités algébriques et géométriques. (*On pouvait aussi argumenter de la sorte pour E_2 ; c'est plus rapide mais cela ne fournit pas de base de l'espace propre.*)

b) Diagonaliser, si possible, la matrice A. En particulier, fournir une matrice S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale.

Pour $\gamma = 1$, on dispose déjà d'une base de E_2, il faut encore une base de E_3. On doit donc trouver une base de l'ensemble des solutions du système $(\star)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

Une base est donnée par les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de considérer la matrice (construite à partir d'une base de vecteurs propres)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est telle que

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(2, 2, 3, 3).$$

c) Pour $\gamma = 0$, sans effectuer de calculs, lister les candidats possibles pour être polynôme minimum de A ?

On sait que le polynôme minimum possède exactement les mêmes zéros que le polynôme caractéristique mais avec une multiplicité inférieure ou égale. Ainsi,

$$\mathcal{M}(\lambda) = (\lambda - 2)^i (\lambda - 3)^j$$

avec $i, j \in \{1, 2\}$. De plus, pour $\gamma = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable. Dès lors, $(i, j) = (1, 1)$ est à exclure. Il ne reste donc que 3 candidats possibles. (*On peut vérifier, mais ce n'était pas demandé, que $(A - 2I)^2(A - 3I) \neq 0$, $(A - 2I)(A - 3I)^2 \neq 0$ et que $(A - 2I)^2(A - 3I)^2 = 0$. Dès lors, le polynôme minimum est bien $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2$.*)

2. [4 points] Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4z^3 + 13z^2 + 14z + 13}{z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 6z + 3}$$

Suggestion : le dénominateur possède un zéro réel et deux zéros dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Soit $Q(z)$ le dénominateur de la fraction. On vérifie facilement que $Q(-1) = 0$. Ainsi,

$$Q(z) = (z + 1)(z^3 + z^2 + 3z + 3)$$

et le second facteur possède encore -1 comme zéro (*ceci correspond bien à la suggestion, s'il y a un unique zéro réel, il est nécessairement double ; si un zéro appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont conjugué est également zéro car on a un polynôme à coefficients réels*). Donc,

$$Q(z) = (z + 1)^2(z^2 + 3).$$

Le développement en fractions simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$\frac{a}{z+1} + \frac{b}{(z+1)^2} + \frac{cz+d}{z^2+3}.$$

Il reste à déterminer les constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si on réduit au même dénominateur, on trouve

$$\frac{(a + c)z^3 + (a + b + 2c + d)z^2 + (3a + c + 2d)z + 3a + 3b + d}{Q(z)}.$$

En identifiant les coefficients, on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a + b + 2c + d = 13 \\ 3a + c + 2d = 14 \\ 3a + 3b + d = 13 \end{cases}$$

qui a pour unique solution $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

Pour la décomposition en fractions simples sur $\mathbb{C}$, il suffit de décomposer le dernier terme de la décomposition (*les deux premiers termes de la décomposition restent identiques*)

$$\frac{3z+4}{z^2+3} = \frac{g}{z - \sqrt{3}i} + \frac{h}{z + \sqrt{3}i} = \frac{(g + h)z + \sqrt{3}i(g - h)}{z^2 + 3}.$$

Encore une fois, en identifiant les coefficients, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} g + h = 3 \\ \sqrt{3}i(g - h) = 4 \end{cases}$$

On trouve

$$g = \frac{3}{2} - \frac{2i}{\sqrt{3}}, \quad h = \frac{3}{2} + \frac{2i}{\sqrt{3}}.$$

3. [5 points] On considère une base $U = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(u_1) = u_1 + 2u_2$$
$$T(u_2) = u_1 + 3u_2 + u_3$$
$$T(u_3) = u_2 + u_3$$

a) Calculer $T(u_1 + u_2 + u_3)$.

Par linéarité,

$$T(u_1 + u_2 + u_3) = T(u_1) + T(u_2) + T(u_3) = 2u_1 + 6u_2 + 2u_3.$$

b) Représenter matriciellement T dans la base U.

Pour rappel, la j-ième colonne de la matrice est donnée par $\Phi_U(T(u_j))$. Ainsi, on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Soient les éléments $w_1 = -u_1 + 2u_3$, $w_2 = u_1 + u_3$, $w_3 = u_2$ (il est acquis que ces vecteurs forment une base). Représenter matriciellement T dans cette base (w_1, w_2, w_3).

Il faut déterminer les composante de $T(w_j)$ dans la base (w_1, w_2, w_3). Tout d'abord, en utilisant une fois encore la linéarité,

$$T(w_1) = -T(u_1) + 2T(u_3) = -u_1 + 2u_3 = w_1$$

ensuite,

$$T(w_2) = T(u_1) + T(u_3) = u_1 + 3u_2 + u_3 = w_2 + 3w_3$$

enfin,

$$T(w_3) = T(u_2) = u_1 + 3u_2 + u_3 = w_2 + 3w_3.$$

Donc, la matrice représentant T dans cette base (w_1, w_2, w_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Fournir une base de $\mathrm{Ker}(T)$. En déduire la dimension de l'image de T.

Un élément x appartient au noyau de T si et seulement si ses composantes (x_1, x_2, x_3) dans la base U vérifient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à $x_1 = -x_2 = x_3$. Autrement dit, une base du noyau est donné par l'élément $u_1 - u_2 + u_3$. Ceci revient à dire que la dimension du noyau vaut 1. Par le théorème de la dimension, $\dim \mathrm{Im}(T) = 3 - \dim \mathrm{Ker}(T) = 2$.

4. [2 points] A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice suivante N est-elle normale ?

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

On doit déterminer sous quelle condition $NN^* = N^*N$. On trouve

$$NN^* = \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha & 1-i \\ \overline{\alpha} & 3 & 3-3i \\ 1+i & 3+3i & 11 \end{pmatrix} \text{ et } N^*N = \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \overline{\alpha} & 1-i \\ \alpha & 3 & 3-3i \\ 1+i & 3+3i & 11 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, N est normale si et seulement si α est réel.

5. [4 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'on dispose des espaces propres suivants

$$E_3 = \Big\rangle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_2} \Big\langle \quad \text{et} \quad E_{-1} = \Big\rangle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_4} \Big\langle$$

et en conclure que M est diagonalisable (un argument suffit).

On effectue un calcul pour vérifier que

$$Mv_1 = 3v_1, \; Mv_2 = 3v_2, \; Mv_3 = -v_3, \; Mv_4 = -v_4.$$

On a donc bien 4 vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 3 et -1. Les vecteurs v_1 et v_2 (même raisonnement pour v_3 et v_4) sont linéairement indépendants. On a donc 2 sous-espaces propres de dimension 2. On en conclut que

$$\mathbb{C}^4 = E_3 \oplus E_{-1}.$$

Ceci signifie que M est diagonalisable (*une autre façon de l'exprimer est de remarquer qu'on a alors une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres.*)

b) Déduire du point précédent (il n'est pas nécessaire de diagonaliser M) que, pour tout $n \geq 0$,

$$M^n \begin{pmatrix}3\\2\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^{n+1}\\2.3^n\\3^n + 5.(-1)^n\\3^{n+1}\end{pmatrix}$$

Il faut remarquer que

$$\begin{pmatrix}3\\2\\6\\3\end{pmatrix} = 2v_1 + v_2 + 5v_4.$$

Pour rappel, si x est un vecteur propre de M de valeur propre λ, alors $M^n x = \lambda^n x$. Donc,

$$M^n \begin{pmatrix}3\\2\\6\\3\end{pmatrix} = 2M^n v_1 + M^n v_2 + 5M^n v_4 = 2.3^n v_1 + 3^n v_2 + 5.(-1)^n v_4.$$

c) La norme d'un vecteur $u \in \mathbb{C}^4$ est définie par $||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^4 |u_i|^2}$. Caractériser (i.e., décrire) les vecteurs $u \in \mathbb{C}^4$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} ||M^n u|| = +\infty.$$

Tout élément $x \in \mathbb{C}^4$ possède une décomposition unique de la forme

$$x = y + z, \qquad \text{avec } y \in E_3, z \in E_{-1}.$$

Ainsi, comme au point précédent, on a

$$M^n x = 3^n y + (-1)^n z.$$

Si $y \neq 0$, $||3^n y|| = 3^n ||y|| \to +\infty$, si $n \to +\infty$ et $||(-1)^n z|| = ||z||$ est borné. On en conclut que $\lim_{n\to+\infty} ||M^n x|| = +\infty$ si et seulement si $y \neq 0$. Autrement dit, x appartient à $\mathbb{C}^4 \setminus E_{-1}$.