# Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
bachelier en sciences physiques,
Mai–Juin 2018

**1.** [6 points] Soient les matrices

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\gamma & \gamma+1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -\gamma & 0 & \gamma & 2-\gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Pour quelles valeurs du paramètre $\gamma \in \mathbb{C}$, la matrice $A_\gamma$ est-elle diagonalisable ?

On recherche d'abord les valeurs propres, i.e., les zéros du polynôme caractéristique $\det(A_\gamma - \lambda I)$. Si on applique la règle des mineurs sur la première ligne, puis sur la dernière colonne, on s'aperçoit qu'il suffit de faire le produit des éléments diagonaux :

$$\det(A_\gamma - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\gamma-\lambda)(2-\gamma-\lambda).$$

Si toutes les valeurs propres sont simples, $A_\gamma$ est diagonalisable. Il faut discuter le cas d'éventuelles valeurs propres multiples :

$$1-\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 0,$$
$$1-\gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = -1,$$
$$2-\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1,$$
$$2-\gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 0.$$

Ainsi, si $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, les valeurs propres sont simples et $A_\gamma$ est diagonalisable.

• $\gamma = -1$. Deux valeurs propres simples 1 et 3, une valeur propre double 2. La matrice est diagonalisable si la multiplicité géométrique de cette dernière valeur propre vaut 2. Les vecteurs propres sont caractérisés par

$$(A_{-1} - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$x = 0, \quad z = t.$$

On trouve ainsi que l'espace propre associé est de dimension 2

$$E_2 = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

La matrice $A_{-1}$ est donc diagonalisable.

Remarque : Pour ces trois sous-cas, il est en fait inutile de chercher une base de l'espace propre. En effet, la dimension de dernier est la dimension de l'ensemble des solutions d'un système homogène. Elle est donnée par le nombre d'inconnues (ici, 4) moins le rang de la matrice du système. Il est immédiat de voir que le rang de $A_{-1} - 2I$ vaut 2. On peut procéder de même dans les deux autres cas. On vérifiera que toutes les matrices rencontrées sont de rang 2.

• $\gamma = 0$. Deux valeurs propres doubles 1 et 2. Etudions la multiplicité géométrique de la valeur propre 1:

$$(A_0 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$t = 0, \quad x = z.$$

Ainsi, l'espace propre est bien de dimension 2

$$E_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle.$$

Il reste à considérer la valeur propre 2:

$$(A_0 - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$x = 0, \quad y = z.$$

Ainsi, l'espace propre est bien de dimension 2

$$E_1 = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

• $\gamma = 1$. Deux valeurs propres simples 0 et 2, une valeur propre double 1. La matrice est diagonalisable si la multiplicité géométrique de cette dernière valeur propre vaut 2. Les vecteurs propres sont caractérisés par

$$(A_1 - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$x = y = z.$$

On trouve ainsi que l'espace propre associé est de dimension 2

$$E_1 =\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle.$$

La matrice $A_1$ est donc diagonalisable. En conclusion, dans tous les cas, $A_\gamma$ est diagonalisable.

**b)** Diagonaliser, si possible, la matrice $B$.

Encore une fois, le polynôme caractéristique de $B$ est immédiat à calculer. Par exemple, règle des mineurs sur la quatrième ligne, puis sur la première colonne; on trouve

$$\det(B - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Cherchons un vecteur propre de valeur propre 0 :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = z = t = 0. \text{ Prenons } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons deux vecteurs propres (linéairement indépendants) de valeur propre 1 :

$$(B - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à $x = z$ et $z = y + t$. On a par exemple, les vecteurs

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad et \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, cherchons un vecteur propre de valeur propre 2 :

$$(B - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $y = t = 0$ et $2z = x$. Prenons,

$$u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $S$ la matrice formée des colonnes $u_1, \ldots, u_4$ (dans cet ordre), on a

$$S^{-1}BS = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 2).$$

**c)** Pour quelle(s) valeur(s) de $\gamma$, les matrices $A_\gamma$ et $B$ ont-elles les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques respectives ?

La matrice $B$ a pour valeurs propres 0, 1 (multiplicité 2) et 2. Ceci correspond exactement au cas $\gamma = 1$.

**d)** Pour une valeur de $\gamma$ trouvée au point précédent, fournir une matrice $T$ telle que $T^{-1}A_\gamma T = B$. Il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de $T$.

On sait que $S^{-1}BS = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 2)$ avec la matrice $S$ trouver au point b). On sait aussi qu'il existe une matrice $S'$ telle que

$$S'^{-1}A_1S' = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 2).$$

De là, on a

$$B = S\ \mathrm{diag}(0, 1, 1, 2)\ S^{-1} = S\ S'^{-1}A_1S'\ S^{-1}$$

et la matrice $T$ demandée est donc égale à $S'S^{-1}$. Si on mène le calcul à terme,

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et au final,

$$S'S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**2.** [3 points] Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, <u>puis</u> sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4z^3 - 5z^2 + 5z + 2}{z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 4z + 2}.$$

*Suggestion* : le dénominateur possède un zéro réel et deux zéros dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit $B$ le dénominateur, on voit directement que $B(1) = 0$. En utilisant la suggestion, 1 doit être un zéro double et les deux autres zéros sont complexes conjugués. Si on divise $B$ par $(z-1)^2$, on trouve

$$B = (z-1)^2(z^2 + 2).$$

Pour ce faire, on peut procéder par division euclidienne ou en identifiant les coefficients. On cherche $a, b, c$ tels que

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 4z + 2 = (z^2 - 2z + 1)(az^2 + bz + c).$$

Ainsi, la décomposition en fractions simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2+2}.$$

En réduisant au même dénominateur, le numérateur se réécrit

$$A(z-1)(z^2+2) + B(z^2+2) + (Cz+D)(z-1)^2$$

et en distribuant

$$\underbrace{(A+C)}_{=4} z^3 + \underbrace{(-A+B-2C+D)}_{=-5} z^2 + \underbrace{(2A+C-2D)}_{=5} z \underbrace{-2A+2B+D}_{=2}.$$

En identifiant avec les coefficients du numérateur, le système dont les inconnues sont $A, B, C, D$ donne $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ et $D = 0$. Pour la décomposition sur $\mathbb{C}$, inutile de décomposer l'entièreté, il suffit de décomposer

$$\frac{3z}{z^2+2} = \frac{E}{z+\sqrt{2}i} + \frac{F}{z-\sqrt{2}i} = \frac{(E+F)z + \sqrt{2}i\,(F-E)}{z^2+2}.$$

Ainsi, $E = F = 3/2$.

**3.** [5 points] On considère une base $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de $\mathbb{R}^4$ et l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$T(u_1) = u_1 + 2u_2 + u_4$$
$$T(u_2) = u_1 + u_2 + u_3$$
$$T(u_3) = u_2 + u_3 + u_4$$
$$T(u_4) = 3u_1 + 4u_2 + u_4$$

a) Représenter matriciellement $T$ dans la base $U$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit la base $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ définie par

$$w_1 = -2u_1 - u_2 + u_3 + u_4$$
$$w_2 = -u_1 - u_2 + 2u_3$$
$$w_3 = -3u_1 + u_2 + 3u_3$$
$$w_4 = 2u_1 + 3u_2 + u_3 + u_4.$$

Il est acquis que ces vecteurs forment une base.
Représenter matriciellement $T$ dans cette base $W$.
*Suggestion* : pour répondre à la question, plusieurs pistes peuvent être suivies. Certaines sont plus efficaces que d'autres.

On pourrait effectuer un changement de bases, mais le plus direct est d'exprimer les $T(w_i)$ dans la base $W$. On a

$$T(w_1) = -2T(u_1) - T(u_2) + T(u_3) + T(u_4) = 0$$

$$T(w_2) = -T(u_1) - T(u_2) + 2T(u_3) = -2u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = w_1$$

$$T(w_3) = -3T(u_1) + T(u_2) + 3T(u_3) = -2u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 2w_2$$

$$T(w_4) = 2T(u_1) + 3T(u_2) + T(u_3) + T(u_4) = 8u_1 + 12u_2 + 4u_3 + 4u_4 = 4w_4$$

et ainsi, la matrice $M$ qui représente $T$ dans cette base $W$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Calculer pour tout $n \geq 1$, $T^n(w_1)$, $T^n(w_2)$, $T^n(w_3)$, $T^n(w_4)$.

Du point précédent, on a $T^n(w_1) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Puis,

$$T^n(w_2) = T^{n-1}T(w_2) = T^{n-1}(w_1)$$

qui vaut $w_1$ si $n = 1$ et $0$ sinon. Ensuite, $T(w_3) = 2w_2$, $T^2(w_3) = 2T(w_2) = 2w_1$ et $T^n(w_3) = 2T^{n-2}(w_1) = 0$ pour tout $n \geq 3$. Enfin, $w_4$ est un vecteur propre de valeur propre 4. Donc, $T^n(w_4) = 4^n w_4$ pour tout $n \geq 1$.

d) En déduire $\dim(\operatorname{Im} T)$, $\dim(\operatorname{Im} T^2)$, $\dim(\operatorname{Im} T^3)$ ainsi que $\dim(\operatorname{Ker} T)$, $\dim(\operatorname{Ker} T^2)$, $\dim(\operatorname{Ker} T^3)$.

Du point précédent, on déduit qu'une base de l'image de $T$ est donnée par $w_1, w_2, w_4$ donc $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$. Une base de l'image de $T^2$ est donnée par $w_1, w_4$ donc $\dim(\operatorname{Im} T^2) = 2$. Enfin, une base de l'image de $T^3$ est donnée par $w_4$ donc $\dim(\operatorname{Im} T^3) = 1$. En appliquant le théorème de la dimension, les noyaux ont des dimensions respectives $1, 2, 3$.

<u>alternative</u> : on pouvait calculer $M^2$ et $M^3$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

et remarquer que les rangs des matrices $M, M^2$ et $M^3$ sont respectivement $3, 2, 1$.

**4.** [3 points]

a) Montrer que toute matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ peut se mettre sous la forme

$$A = B + iC$$

où $B$ et $C$ sont des matrices hermitiennes. *Suggestion* : prendre pour $B$ et $C$ respectivement $(A + A^*)/2$ et $(A - A^*)/2i$.

Il s'agit d'une simple vérification:

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i}.$$

De la même manière, $B$ et $C$ sont hermitiennes,

$$\left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + A}{2}$$

et

$$\left(\frac{A - A^*}{2i}\right)^* = \frac{A^* - A}{2\bar{i}} = \frac{A - A^*}{2i}.$$

b) Si $A$ est normale, prouver que $A, B, C$ sont simultanément diagonalisables par une même matrice unitaire.

On sait que tout matrice normale est diagonalisable par une matrice unitaire. Soit $U$ unitaire qui diagonalise $A$, $U^*AU = \Delta$ où $\Delta$ est diagonale. En particulier, $(U^*AU)^* = U^*A^*U = \Delta^*$. La matrice $U$ diagonalise aussi $B$ et $C$,

$$U^*\frac{A + A^*}{2}U = \frac{U^*AU + U^*A^*U}{2} = \frac{\Delta + \Delta^*}{2}$$

et la somme de deux matrices diagonales est encore diagonale. De même, on a

$$U^*\frac{A - A^*}{2i}U = \frac{U^*AU - U^*A^*U}{2i} = \frac{\Delta - \Delta^*}{2i}.$$

<u>alternative</u> : On aurait pu aussi vérifier que les matrices $A, B, C$ commutent deux à deux et sont donc diagonalisable par une même matrice unitaire.

c) Si $A$ est normale, quel lien existe-t-il entre les valeurs propres de $A$ et celles de $B$ et $C$ ? Autrement dit, connaissant les valeurs propres de la matrice normale $A$, comment en déduire celles de $B$ et $C$ ?

Si $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\Delta^* = \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$. Du point précédent, on a alors que $B$ (resp. $C$) a pour valeurs propres, les parties réelles (resp. imaginaires) des valeurs propres de $A$.

**5.** [3 points] VRAI–FAUX, justifier vos réponses.

a) Une matrice réelle de $\mathbb{R}^3_3$ possède au moins une valeur propre réelle.

VRAI : son polynôme caractéristique a des coefficients réels. Donc, si ce polynôme possède un zéro dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il possède aussi son conjugué comme zéro. Ainsi, on a soit 3 zéros réels (comptés avec leur multiplicité), soit un zéro réel simple et deux zéros complexes conjugués.

Une variante vue dans les copies : le polynôme caractéristique est un polynôme de degré 3 ayant $-1$ comme coefficient dominant. Il s'agit donc une fonction réelle continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} \chi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \chi(x) = -\infty.$$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, ce polynôme possède un zéro.

b) Toute matrice de $\mathbb{C}^2_2$ est diagonalisable.

FAUX : la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possède l'unique valeur propre 1 ayant une multiplicité algébrique 2 et une multiplicité géométrique égale à 1.

c) Soient $E, F$ deux espaces vectoriels[1] sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Si une application linéaire $T : E \to F$ possède 0 comme valeur propre, alors $T$ n'est pas un isomorphisme de $E$ dans $F$.

VRAI : $T$ n'est pas injectif. En effet, il existe un vecteur propre non nul $x$ de valeur propre 0. Ainsi, $Tx = 0 = T0$. On dispose de deux éléments distincts de $E$, $x$ et 0, ayant la même image par $T$. Une alternative est de remarquer que le noyau de $T$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Une variante vue dans les copies : il existe un vecteur non nul $x$ tel que $Tx = 0$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de $E$. Dans cette base, $x$ se décompose comme $x = \sum_i x_i \, u_i$ avec les $x_i$ non tous nuls. Ainsi,

$$0 = Tx = \sum_i x_i T u_i.$$

Puisque les $x_i$ sont non tous nuls, on en déduit que $Tu_1, \dots, Tu_n$ ne sont pas linéairement indépendants. Or $T$ est un isomorphisme si et seulement si $(Tu_1, \dots, Tu_n)$ est une base.

[1] Coquille dans cet énoncé, il faut lire $T : E \to E$ pour que la notion de vecteur propre soit bien définie. Nous n'avons donc pas pénalisé les étudiants pour cette question.