Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
Mai–Juin 2016

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h30**

Bon travail !

1. [3 points] Vérifier (méthode au choix) que les polynômes

$$P(z) = z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 12z + 9$$

et

$$Q(z) = z^3 - 3z + 2$$

sont premiers entre eux.

2. [5 points] On considère l'application linéaire :

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a) Dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, représenter T.
b) Dans la base $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, représenter T.
c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T.
   Vérifier le théorème de la dimension.
d) T est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ?
   Justifier votre réponse.

2. [6 points] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha & \alpha & 2\alpha - 2 \\ -\alpha - 1 & \alpha + 3 & \alpha & \alpha + 1 \\ 2 - \alpha & \alpha - 2 & \alpha + 1 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

On sait que 2 et 3 sont des valeurs propres de A (cela permet de vérifier vos calculs).

a) A quelles conditions sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Quand $\alpha = 2$, vérifier que A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale et fournir également cette dernière.

4. [3 points] Soient la matrice M et l'élément $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ donnés ci-dessous

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, on considère la suite de réels : $[\mathbf{x}]_j$, $[M\mathbf{x}]_j$, $[M^2\mathbf{x}]_j$, $[M^3\mathbf{x}]_j$, ... Montrer que cette suite possède une limite. Que vaut

$$\lim_{n \to +\infty} [M^n \mathbf{x}]_j \ ?$$

5. [3 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

VRAI–FAUX (justifier vos réponses)

a) M est une matrice unitaire.
b) M est une matrice normale.
c) M est une matrice hermitienne.
d) Il existe une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de M.
e) Les valeurs propres de M sont de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.
f) La matrice M et la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont simultanément diagonalisables par une même matrice unitaire.