Examen d'algèbre (1ère partie)

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Juin 2016

Consignes : Répondez à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante liant le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{R}^n_n$ et la dépendance linéaire des lignes ou colonnes de A.

2) Définir les notions suivantes :

a. cofacteur d'une matrice $A \in \mathbb{R}^n_n$,
b. permutation d'un ensemble X,
c. application $f : A \to B$ injective,
d. vecteurs linéairement indépendants.

3) <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soient x, y, z trois élements distincts d'un espace vectoriel tels que deux quelconques d'entre eux ne sont jamais multiples l'un de l'autre. Ces trois éléments sont linéairement indépendants.
b. Soit $A \in \mathbb{R}^n_n$. Si $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A = 0$, alors $\det(A) = 0$.
c. Si $A \in \mathbb{R}^n_n$ possède un inverse à gauche, alors A possède aussi un inverse à droite.
d. L'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
e. Soient μ, ν deux permutations de $\mathcal{S}_n$, $n \geq 2$. Si $\mu\,\nu = \nu\,\mu$, alors μ ou ν est la permutation identité.

4) Calculer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta - \alpha & 1 \\ \alpha - \beta & -\beta & \alpha & 0 \\ \alpha + \beta & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}^4$ du système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 9x_4 & = & -16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 8 \end{array} \right.$$

6) Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ le $\mathbb{R}$-vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. Soit F le sous-ensemble formé des polynômes P de E tels que $P(2) = 0$.

a. Montrer que les polynômes $X - 1$ et $X^2 - 1$ sont linéairement indépendants.
b. Donner une base de E contenant le polynôme $X + 3$.
c. Montrer que F est un sous-vectoriel de E et en donner une base.
d. Soit l'enveloppe linéaire H des polynômes $X^2 - 3X + 2$ et $X^2 + 3X + 2$. Caractériser $F \cap H$. Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? (Justifier.)
e. Fournir un supplémentaire de F dans E.
f. Vérifier que
$$X^2 + 2 \text{ et } X$$
forment une base de H. Considérer un élément quelconque de H et donner sa décomposition dans cette base.