Examen écrit d'algèbre (1ère partie)

Premier bachelier en sciences mathématiques
Juin 2015

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

Bon travail !

Théorie — à rendre pour 10h30 —

- Enoncer et démontrer les deux lois des mineurs (y compris le lemme portant sur l'expression d'un cofacteur).
- Définir la signature d'une permutation.
- Définir la somme directe de 3 sous-espaces vectoriels.
- Fournir un exemple d'espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie (justifier).

[2 points] **Ex. 1.** On considère la matrice de $\mathbb{C}_3^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4i \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout naturel n.

[5 points] **Ex. 2.** Soit $\mathbb{C}_2^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel. On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices hermitiennes de $\mathbb{C}_2^2$. Pour rappel, $M \in \mathbb{C}_2^2$ est *hermitien* si $M^* = M$.

a) Vérifier que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel.
b) Donner une base de $\mathcal{H}$.
c) Soit le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{G} = \Big\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\langle.$$

Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?
Déterminer un sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{G} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{H}$.

d) Donner un supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}_2^2$.
e) Donner une base de

$$\mathcal{H} \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

[3 points] **Ex. 3.** On considère les cycles $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On considère l'ensemble A des permutations de la forme

$$\mu^{i_1} \nu^{i_2} \mu^{i_3} \nu^{i_4} \cdots \mu^{i_{2j-1}} \nu^{i_{2j}}$$

avec $i_n \geq 0$ pour tout $n \in \{1, \ldots, 2j\}$ et $j > 0$ naturel.

a) Montrer que A contient 12 éléments.
b) Donner une permutation ξ de $\mathcal{S}_4$ n'appartenant pas à A.
c) Montrer que $\mathcal{S}_4 = A \cup \{\xi \circ \lambda \mid \lambda \in A\}$.