Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
Juin 2015

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h30**

Bon travail !

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1-\alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix}$$

a) A quelles conditions sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Quand A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale.

2. On considère l'application linéaire :

$$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - 2x_5 \\ x_1 + x_4 + x_5 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

a) Dans des bases de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$ au choix, représenter T.

b) Soient $U = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $V = (f_1, \dots, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ où les e_i et les f_j sont des vecteurs unitaires. Trouver une base B de $\mathbb{R}^5$ telle que la matrice qui représente T dans les bases B et V possède

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme première colonne. Trouver une base C de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice qui représente T dans les bases U et C possède aussi ce vecteur comme première colonne.

c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T. Vérifier le théorème de la dimension.

3. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-vectoriels, $u_1, \ldots, u_k$ des éléments de E et $v_1, \ldots, v_k$ des éléments de F. Soit $T \in \mathcal{L}(E; F)$ vérifiant $T(u_i) = v_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

a) Montrer que si $v_1, \ldots, v_k$ sont linéairement indépendants, alors $u_1, \ldots, u_k$ aussi.

b) Si $v_1, \ldots, v_k$ sont linéairement dépendants, peut-on en déduire que $u_1, \ldots, u_k$ le sont aussi ? Justifier.

4. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que M est une matrice normale.

b) Fournir une base de vecteurs propres orthonormés de M.

c) Justifier le fait que $(\lambda - 3)(\lambda - 9)$ est le polynôme minimum de M.

5. (1BM seulement) Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré au moins 1. Montrer que la fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.