Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
mai–juin 2014

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Fin de l'examen à **12h00** (partie commune uniquement) – **13h00** (partie commune + partiel).

Bon travail !

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Pour éviter de longs calculs, on pose γ comme étant un nombre complexe vérifiant $\gamma^2 = \alpha^2 - \alpha$.

a) A quelles conditions sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Quand A est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit diagonale.

c) Quand A n'est pas diagonalisable, quelles réductions à la forme de Jordan sont envisageables ?

2. On considère les applications linéaires suivantes :

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b-c \\ c-b \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2c+d \\ a-b+c+d \\ -a+2b-d \end{pmatrix}$$

a) Dans des bases au choix, représenter T, S et $S \circ T : x \mapsto S(T(x))$.

b) Vérifier que S est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T.

3. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et T un endomorphisme de E tel que $T^3 = T^2$, $T \neq id$, $T^2 \neq 0$, $T^2 \neq T$.

a) Montrer que le spectre de T est inclus dans $\{0, 1\}$.
b) Montrer que 0 et 1 sont effectivement valeurs propres de T.
c) Montrer que T n'est pas diagonalisable.

4. Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{x^4+1}{x^4-1}.$$

5. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Toute matrice normale est unitaire.
b. Les matrices de $\mathbb{C}_7^7$ ayant $\chi(x) = (x-3)^2(x-5)^4(x+7)$ et $\mathcal{M}(x) = (x-3)(x-5)^2(x+7)$, respectivement comme polynôme caractéristique et minimum, à permutation de blocs près, n'ont qu'une réduction possible à la forme normale de Jordan.
c. Un polynôme à coefficients réels se factorise toujours en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients réels.
d. Si I et J sont des idéaux de $\mathbb{Z}$, alors $I \cup J$ est encore un idéal de $\mathbb{Z}$.

⋆ Matière du partiel (uniquement 1BM)

6. A quelles conditions sur le paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, le système suivant possède-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z &= \sqrt{2} \\ 2x + \lambda y - z &= \lambda^3 \\ \lambda x + \lambda y + 3z &= 0 \end{cases}$$

7. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$