Examen de mathématiques discrètes

Troisième bachelier en sciences mathématiques

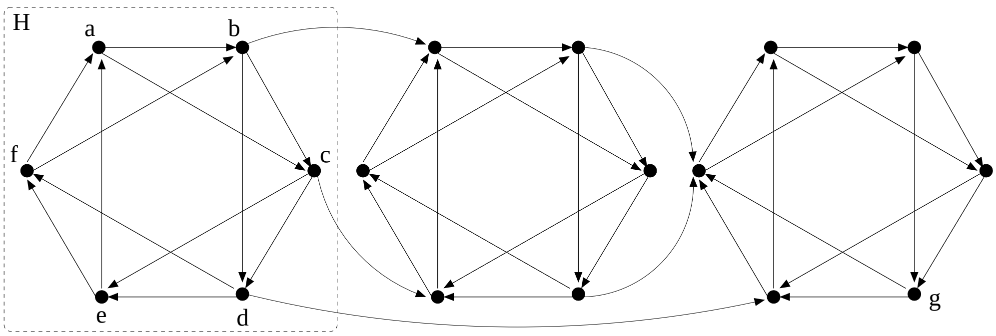
mai–juin 2013

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation

Bon travail !

1. [3 points] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté à n sommets. On note $\delta = \min_{v \in V} \deg v$ et $\Delta = \max_{v \in V} \deg v$. Montrer que si $\delta + \Delta \geq n - 1$, alors le graphe G est connexe. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. [8 points] On considère le graphe orienté G représenté ci-dessous et le sous-graphe H induit par les 6 premiers sommets (cf. figure)



a) Donner la matrice d'adjacence M_H du sous-graphe H.

b) Sachant que l'ensemble des valeurs propres de H est

$$\{-1, 0, 2, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\},$$

vérifier que -1 est valeur propre double de H. Préciser quelles sont les valeurs propres de G en donnant, pour chacune, leur multiplicité (algébrique).

c) Exhiber un vecteur propre non nul de valeur propre 2 pour la matrice M_H. En déduire un vecteur propre non nul de valeur propre 2 pour la matrice d'adjacence M_G de G. Combien de vecteurs propres de valeur propre 2 linéairement indépendants peut-on trouver pour M_H et M_G respectivement ?

d) Obtenir une formule close comptant le nombre de chemins fermés de longueur n issus du sommet a.

e) Donner le comportement asymptotique du nombre de chemins de longueur n joignant a à g (justifier votre réponse).

f) Déterminer le groupe des automorphismes de H.

g) Le sous-graphe H est-il eulérien ? Si oui, fournir un circuit eulérien.

3. [3 points] Sachant que $R(3,4) = 9$ et que $R(5,9) \leq 316$, expliquer pourquoi tout coloriage avec trois couleurs rouge/vert/bleue des arêtes du graphe complet K_{316} contient toujours une copie de K_3 rouge ou une copie de K_4 verte ou une copie de K_5 bleue.

Pour tous $p, q, r \geq 2$, existe-t-il un entier n tel que tout coloriage des arêtes de K_n contienne toujours une copie de K_p rouge ou une copie de K_q verte ou une copie de K_r bleue ?

4. [4 points] Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$. Obtenir une formule close pour F_n et démontrer que la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{F_i}{10^{i+1}} = 0,1 + 0,01 + 0,002 + 0,0003 + 0,00005 + \cdots$$

converge vers un nombre rationnel (quel est ce nombre ?).

5. [2 points] On considère la suite $(f(n))_{n\geq 1}$ satisfaisant $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ et $f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$. Montrer que la série génératrice $F(z) = \sum_{n\geq 1} f(n)\, z^{n-1}$ satisfait

$$F(z) = (1 + z + z^2)\, F(z^2).$$

Questions de théorie:

- Définir les notions de matrice irréductible et de matrice primitive.
- Enoncer la formule d'Euler pour les graphes planaires.
- Enoncer le petit théorème de Fermat.
- Enoncer le théorème de “raréfaction” des nombres premiers.
- Dans un groupe de 229 personnes, où doit se placer Josephus ?