Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
mai–juin 2013

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Pour tous, fin de l'examen à **12h30**.

Bon travail !

1. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) A quelles conditions sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Quand M est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

c) Quand M n'est pas diagonalisable, quelles réductions à la forme de Jordan sont envisageables ?

d) Existe-t-il des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice M est nilpotente ?

2. On considère les applications linéaires suivantes :

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

et

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Dans des bases au choix, représenter T, S et $S \circ T : x \mapsto S(T(x))$.

b) Vérifier que S est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. Dans ce cas, que sont les sous-espaces $\ker(S)$ et $\mathrm{Im}(S)$? Pour tout $n \geq 1$, déterminer $\det S^n$.

c) Donner une base du noyau de T, une base de l'image de T. En quoi votre résultat illustre-t-il le théorème de la dimension ?

d) En utilisant les résultats obtenus aux points précédents, en *déduire* une base de l'image de $S \circ T$.

3. Soient $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ deux matrices normales telles que $AB = BA$. Montrer que AB et $A + B$ sont normales.

4. Sachant que les polynômes $P(x) = 3x^4 - 13x^3 + 11x^2 + 5x - 6$ et $Q(x) = 18x^4 + 51x^3 - x^2 - 48x - 20$ ont $(x-1)(3x+2)$ comme pgcd, factoriser complétement le polynôme P et vérifier que $-2/3$ est un zéro multiple de Q.

5. Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. L'application $T : \mathbb{R}^2 \to [-1, 1],\ (x, y) \mapsto \sin(x + y)$ est linéaire.

b. Une matrice $A \in \mathbb{C}_5^5$ ayant $\chi_A(x) = (x-3)^2(x-5)^2(x+7)$ et $\mathcal{M}_A = (x-3)(x-5)^2(x+7)$, respectivement comme polynôme caractéristique et minimum, n'est pas diagonalisable et sa réduction à la forme normale de Jordan possède deux blocs de Jordan de dimension 2.

c. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. On peut toujours trouver $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A.P + B.Q = 5$.

$\star$ **Matière du partiel (uniquement 1BM)**

6. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère la matrice $J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ dont tous les éléments sont égaux à 1. Pour tous $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf $(E_{k,\ell})_{k,\ell} = 1$.

- L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients réels est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}_n^n$?
- Calculer $\det(I + J)$ et vérifier ainsi que $\det(I + J) \neq 0$.
- Montrer que les matrices $E_{k,\ell} + I$ sont inversibles.
- Déduire des points précédents que l'enveloppe linéaire de $GL_n(\mathbb{R})$ est égale à $\mathbb{R}_n^n$.

7. Soient les applications $f, g : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ définies par

$$f : x \mapsto 4.x \pmod{12}$$

et

$$g : x \mapsto 7.x \pmod{12}.$$

Pour chacune de ces deux applications, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Déterminer les points fixes de g, i.e., les éléments x tels que $g(x) = x$.