Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
Deuxième bachelier en sciences physiques,
mai–juin 2012

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
  La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.
- Pour tous, fin de l'examen à **12h30**.

Bon travail !

1. [7 points] On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \gamma-2 & 2-\gamma & 0 \\ 1 & \gamma-1 & 4-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma-1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'il existe une unique valeur de $\gamma \in \mathbb{C}$ pour laquelle la matrice M n'est pas diagonalisable ?

b) Quand M n'est pas diagonalisable, réduire M à la forme canonique de Jordan. On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.

c) On considère l'application $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4,\ x \mapsto Mx$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $\gamma \in \mathbb{C}$, $\ker(T)$ est-il réduit à $\{0\}$?
Quand $\ker(T)$ n'est pas réduit à zéro, en donner une base.

2. [6 points] Soient E le $\mathbb{C}$-vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus 2 et F celui des polynômes de degré au plus 3. On considère l'application linéaire $T : E \to F$ définie par $T(1) = 1 + X$, $T(X) = 1 + 2X$ et $T(X^2) = X - X^3$.

a) Donner des bases de E et de F et représenter matriciellement T dans celles-ci.

b) Quelle est l'image par T de $1 - 3X + 2X^2$?

c) Montrer que l'image de T est un sous-espace vectoriel de F de dimension 3. En déduire que pour tout polynôme P non nul de E, on a $T(P) \neq 0$.

d) On considère la restriction de T au sous-vectoriel G des polynômes de degré au plus 1.
   - Montrer que cette restriction $T|_G$ est un endomorphisme de G.
   - Représenter $T|_G$ dans une base de G au choix.
   - $T|_G$ est-il un projecteur ?

3. [3 points] Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \alpha & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \alpha & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

est-elle

- normale ?
- hermitienne ?
- unitaire ?

4. [4 points] **QCM** Vrai–Faux, chaque réponse doit être justifiée (sans justification, une réponse même correcte ne sera pas comptabilisée).

a) Soit $A \in \mathbb{C}_5^5$ ayant $(X-2)^2(X-1)$ comme polynôme minimum. La matrice A est diagonalisable.

b) Soit $A \in \mathbb{C}_5^5$ ayant $(X-2)^2(X-1)$ comme polynôme minimum et $(X-2)^3(X-1)^2$ comme polynôme caractéristique. À permutation près des blocs de Jordan, A possède une unique forme de Jordan.

c) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. On peut toujours trouver $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A.P + B.Q = 5$.

d) Soit le polynôme $P(z) = z^9 + 2\,z^5 + 3\,z^4 + 4\,z^3 + 5\,z^2 + 6\,z + 7$. Le polynôme P possède un zéro de module supérieur à 9.

⋆ Matière du partiel (uniquement 1BM)

On considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

a) Montrer que l'ensemble F des solutions de (S) est un sous-vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

b) Quelle est la dimension de F ? En donner une base.

c) Soit

$$G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

Les sous-espaces F et G sont-ils en somme directe ?

d) Décrire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^5$.

e) Donner une base d'un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^5$.