Examen écrit d'algèbre

Deuxième bachelier en sciences physiques,
mai–juin 2011

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées (préciser les étapes de calcul et rappeler un résultat du cours théorique peut suffire).
- Les étudiants doivent rendre leurs solutions pour **midi** au plus tard.

Bon travail !

1. [3 points] Décomposer en fractions simples sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle

$$\frac{3z^2 - 2z - 3}{z^3 - 2z^2 + z - 2}.$$

2. [5 points] Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base U d'un $\mathbb{C}$-vectoriel E de dimension 3. On note $T : E \to E$ l'application linéaire définie par $T(e_1) = -e_1 + e_2$, $T(e_3) = 2e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

a) Représenter matriciellement T dans la base $U = (e_1, e_2, e_3)$.

b) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
  - Montrer que $V = (f_1, f_2, f_3)$ est encore une base de E.
  - Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base U à la base V.
  - Représenter matriciellement T dans la base V.

c) Donner une base du noyau de T et une base de l'image de T. Montrer en quoi les résultats obtenus illustrent le théorème de la dimension.

3. [4 points] a) Pour quelles valeurs de $w, z \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ z & \overline{z} & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

est-elle respectivement normale ou hermitienne ?

b) Montrer (on peut utiliser les résultats obtenus au point précédent) que la matrice suivante A est normale, construire une matrice unitaire U qui la diagonalise et fournir la matrice diagonale U^*AU correspondante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. [5 points] Soit la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer explicitement que M n'est pas diagonalisable.
b) Réduire M à la forme canonique de Jordan. On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.
c) Donner le polynôme minimum de M.

5. [3 points] Dans $\mathbb{R}^3$ considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle$$

a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
b) Donner une base de F et une base de G.