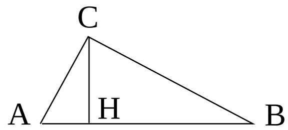
Examen écrit de géométrie

Premier bachelier en sciences physiques, juin 2011

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. Bon travail !

1.[3 points] Dans un espace affin euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, H et B de coordonnées respectives $(1, -2)$, $(4, 0)$ et $(10, 4)$. Déterminer les coordonnées des points C tels que le triangle ABC soit rectangle en C et que H soit le pied de la hauteur issue de C.



2. [6 points] Dans l'espace affin euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\mathcal{D} \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2y + z = 3 \\ x - y + 2 = 0 \end{array} \right.$$

et la famille de plans π_α (α est un paramètre réel) d'équation $\alpha\, x + 2y - z = \alpha$.

a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

b) Pour quelle valeur du paramètre α, le plan π_α est-il parallèle à la droite $\mathcal{D}$? Dans ce cas, la droite est-elle strictement parallèle à π_α ou incluse dans ce plan ?

c) On considère le point P de coordonnées $(0, 2, 3)$. Donner en fonction de α, la distance de P à π_α. Pour quelle valeur de α cette distance est-elle minimale ?

d) Donner les équations du symétrique orthogonal par rapport au plan $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$ de la droite passant par le point Q de coordonnées $(2, 1, -1)$ et de vecteur directeur de composantes $(2, 3, 8)$.

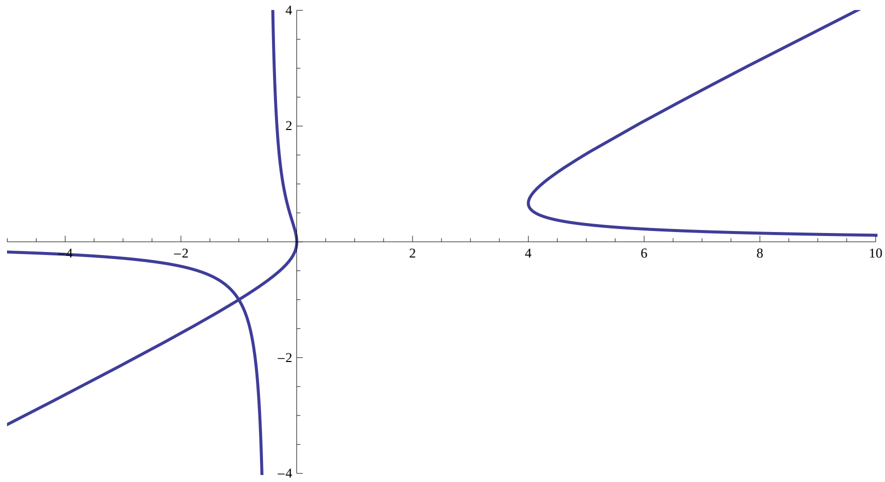
3. [2 points] Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on donne le vecteur u de composantes $(1, 1)$. Déterminer les composantes de v sachant que $|v| = 3$ et que l'angle orienté déterminé par (u, v) vaut $5\pi/6$.

4. [4 points] Dans un espace affin de dimension 3, on considère un tétraèdre $ABCD$. Dans un repère au choix, représenter matriciellement l'application affine $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T}(A) = B$, $\mathcal{T}(B) = C$, $\mathcal{T}(C) = D$ et $\mathcal{T}(D) = A$. La matrice obtenue ne contiendra aucune indéterminée, i.e., on donnera les valeurs numériques explicites de ses éléments. Utiliser cette représentation pour obtenir les coordonnées de $\mathcal{T}(G)$ où G est le centre de gravité du tétraèdre. Quelle est l'image par $\mathcal{T}$ de la droite passant par A et le milieu du segment $[B, C]$? On donnera les équations de cette droite dans le repère choisi.

$\longrightarrow$

5. [5 points] Dans le plan euclidien, on considère le paramétrage de courbe

$$P(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1} \right), \ t \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$



a) Vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.
b) Donner l'équation de la tangente au point $P(0)$
c) Déterminer toutes les valeurs du paramètre t pour lesquelles la courbe admet une tangente verticale en $P(t)$.
d) Vérifier (par le calcul) que le point de coordonnées $(-1, -1)$ est un point double de la courbe.
e) Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe.